ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 79, №3, 2026 Механика
УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2026.79.3-51

ФЛАТТЕР УДЛИНЕННОЙ ПАНЕЛИ, ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО ОДНОМУ КРАЮ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНО СЖАТОЙ ПО ДВУМ НАПРАВЛЕНИЯМ, ПРИ НАБЕГАНИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ГАЗА НА СВОБОДНЫЙ КРАЙ

Мартиросян С. Р.

Ключевые слова: удлинённая прямоугольная пластинка, первоначальные сжимающие усилия, сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота, сверхзвуковое обтекание, аэроупругая устойчивость, аналитический метод решения

Martirosyan S.R.

Flutter of a Biaxially Pre-Compressed Elongated Panel Clamped Along One Edge under a Supersonic Gas Flow Directed Toward the Free Edge

Key words: rectangular elongated plate, the initial compressive forces, concentrated inertial masses and moments, supersonic overrunning, aeroelastic stability, analytical solution method

By analyzing, as an example, a thin elastic elongated plate with one free edge and clamped edge, initially loaded in two directions compressive forces, we study the influence of the initial stress state of the plate on the stability of the unperturbed equilibrium state of the dynamical system “plate – flow” under the assumption of presence of concentrated inertial masses and moments on its free edge, when the supersonic gas flow impacts its free edge. An analytical solution of the problem of stability is obtained. The smallest relative thickness of the plate that ensures the stability of the system at the beginning of the supersonic velocity range has been found. The influence of initial compressive forces on the stability threshold of the system under combined loading is estimate for the purpose of subsequent analysis of its control.

Մարտիրոսյան Ս.Ռ.

Մեկ եզրով ամրակցված և երկու ուղղություններով նախապես սեղմված երկարաձիգ սալի ֆլատերը, երբ ազատ եզրին վրավազք է կատարում գազի գերձայնային հոսքը

Հիմնաբառեր՝ երկարաձիգ ուղղանկյուն սալ, սեղմող ուժեր, իներցիոն զանգվածներ և պտույտի մոմենտներ, գերձայնային շրջհոսում, առաձգական կայունություն, անալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է գերձայնային գազի հոսքում նախապես սեղմված երկու ուղղություններով մեկ ազատ և մեկ ամրակցված եզրերով առաձգական երկարաձիգ ուղղանկյուն սալի կայունությունը, իր ազատ եզրին կենտրոնացված իներցիոն զանգվածների և պտույտի մոմենտների առկայությամբ, երբ գերձայնային գազի հոսքը վրավազք է կատարում սալի ազատ եզրին: Ստացված է սալ–հոսք համակարգի հավասարակշռության ոչխոտորված վիճակի կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: Գտնված է սալի հարաբերական հաստության փոքրագույն արժեքը, որի դեպքում համակարգը կայուն է գերձայնային արագությունների տիրույթի սկզբում: Տրված է, պայմանավորված տարբեր ուժերով, սալի լարվածային վիճակի ազդեցության գնահատականը համակարգի կայունության շեմի վրա, վերջինիս հետագա կառավարման համար:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначального напряжённого состояния тонкой упругой удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным и с

одним защемлённым краями, нагруженной по двум направлениям сжимающими силами, на устойчивость невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» в предположении, что сверхзвуковой поток газа набегает на свободный край пластинки, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота. Получено аналитическое решение задачи устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка-поток» при комбинированном нагружении. Найдена наименьшая относительная толщина пластинки, обеспечивающая устойчивость системы в начале интервала сверхзвуковых скоростей. Дана оценка влиянию первоначальных сжимающих усилий, приложенных сосредоточенных инерционных сил и моментов поворота, а также, влиянию относительной толщины пластинки на порог устойчивости системы, с целью последующего анализа возможности управления им.

Введение. Рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение [1, 2]. Теоретические исследования этих задач позволяют выявить различные виды потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток», обусловленные характером деформаций: статическую неустойчивость в виде эйлеровой, неэйлеровой дивергенции панели и локализованной дивергенции; динамическую неустойчивость – в виде панельного флаттера. А также, позволяют дать оценку влиянию каждой из составляющих комбинированного нагружения на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им. Как известно [1, 2], деформации, возникающие при флаттере, более опасны для конструкции, так как быстро приводят к потере прочности и развитию усталостных трещин.

Изучению статической и динамической устойчивости пластинок и оболочек посвящено огромное количество работ, обзор которых, в основном, содержится в монографиях и в статьях [1–6]. Однако здесь, как правило, построены приближённые решения и не дана эффективная оценка точности этих приближений, за исключением работ А.А. Мовчана [6].

В предлагаемой статье, в отличие от вышеупомянутых работ, исследуется задача устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа упругой прямоугольной пластинки при комбинированном нагружении на примере одной из некоторых моделей, допускающих получение её аналитического решения. А именно: задача устойчивости достаточно удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным, с одним защемлённым и с двумя шарнирно закреплёнными краями, первоначально сжатой по двум направлениям силами, равномерно распределёнными по соответствующим краям, в предположении, что сверхзвуковой поток газа набегает на её свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота.

Получено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка-поток» с помощью алгоритма, подробно изложенного в [12].

Показано, что невозмущённое состояние равновесия системы «пластинка–поток» в данной постановке теряет устойчивость как в виде эйлеровой и неэйлеровой дивергенции панели, так и в виде панельного флаттера, в отличие от постановки задачи устойчивости при тех же граничных условиях с ненагруженными краями, изученной ранее в работе [2].

Определены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости [11].

Найдена наименьшая относительная толщина пластинки, обеспечивающая устойчивость системы вблизи начала интервала сверхзвуковых скоростей.

Дана точная оценка влиянию первоначальных сжимающих сил на порог устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка–поток», в зависимости от остальных её «существенных» параметров, в частности, от относительной толщины пластинки и от коэффициента отношения приложенных сосредоточенных инерционных моментов поворота и масс.

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

Ранее, данный метод был применён в статьях [13–15] при исследовании и решении подобной задачи устойчивости при иных граничных условиях и первоначальных силах нагружения.

Результаты работы могут быть использованы при обработке данных экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая достаточно удлинённая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$, $ab^{-1} \in (0;\ 0.33)$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа принимается плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки – свободен, край $x = a$ – жёстко защемлён, а края $y = 0$ и $y = b$ закреплены идеальными шарнирами. На свободном краю $x = 0$ приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 9]. Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию сжимающих сил $N_x = 2h\sigma_x$ и $N_y = 2h\sigma_y$, равномерно распределённых, соответственно, по кромкам пластинки $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$, являющимися результатом нагрева, или каких–либо других причин; усилия σ_x и σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности пластинки и неменяющимися с изменением прогиба $w = w(x, y, t)$ [1, 2, 5].

Прогиб $w = w(x, y, t)$ вызывает избыточное давление δp на верхнюю, обтекаемую потоком газа, поверхность пластинки, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [7,8]: $\delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа. Будем полагать, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$ [1,2,5].

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамиче-

скими нагрузками δp, первоначальными сжимающими усилиями σ_x и σ_y в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c, приложенными вдоль её свободного края $x = 0$, в предположении, что усилия σ_x и σ_y малы по сравнению с критическими значениями $(\sigma_x)_{cr.}$ и $(\sigma_y)_{cr.}$, где $(\sigma_x)_{cr.}$ и $(\sigma_y)_{cr.}$ – усилия, которые могут произвести «выпучивание» пластинки в отсутствие и обтекания $(V = 0)$ и сосредоточенных инерционных масс и моментов $(m_c = 0, I_c = 0)$.

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в рамках справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» в предположении малости интенсивности $m\partial^2 w/\partial t^2$ распределённой массы m пластинки в сравнении с интенсивностями $m_c\,\partial^2 w/\partial t^2$ и $I_c\,\partial^2 w/\partial t^2$, соответственно, приложенных сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, учитываемых в граничных условиях, будет описываться соотношением [1, 2, 9]:

$$D\Delta^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0,\ w = w(x, y, t); \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1, 2, 9]:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \tag{1.2}$$

$$D \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + N_x \frac{\partial w}{\partial x} = -m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad \text{при } x = 0;$$

$$w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = a \text{ и } w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b; \tag{1.3}$$

ν – коэффициент Пуассона.

Задача устойчивости линейной динамической системы (1.1)–(1.3) состоит:

1) в нахождении критической скорости V_{cr} – наименьшей скорости потока газа – в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}),\ M_0 = \sqrt{2},\ M_{2\cos m.} \approx 33.85; \tag{1.4}$$

приводящей к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» в предположении:

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{cr.},\ \sigma_y < (\sigma_y)_{cr.}, \tag{1.5}$$

когда все параметры системы заданы, кроме скорости потока V;

2) в определении минимальной относительной толщины пластинки $\left(2ha^{-1}\right)_{\min}$, которая обеспечивала бы её прочность по критерию устойчивости колебаний, когда форма, материал пластинки и все параметры потока известны.

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы (1.1) – (1.3) по Ляпунову [10] сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) и (1.3) для прогиба $w(x,y,t)$ в интервале (1.4) при условии (1.5).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.5) будем исследовать в случае достаточно удлинённых прямоугольных пластинок [1, 2, 12–15]:

$$\gamma = ab^{-1} \in \left(0;\ 0.33\right), \tag{1.6}$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b.

Заметим, что подобная модель задачи устойчивости линейной динамической системы (1.1) – (1.5) исследована в [13–15] при иных ограничениях (1.5), когда кромка $x = a$ шарнирно закреплена.

2. Общее решение задачи устойчивости динамической системы (1.1) – (1.5). Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы (1.1) – (1.3) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), будем искать в виде гармонических колебаний [1, 2, 12–15]:

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t)\cdot \sin(\mu_n y), \qquad \mu_n = \pi n b^{-1}, \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Как известно [10], невозмущённое состояние равновесия системы (1.1) – (1.3) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\,\lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\,\lambda > 0$). Критическая скорость потока газа V_{cr}, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\mathrm{Re}\,\lambda = 0$) [1, 2, 10].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» в виде:

$$r^4 - 2\cdot(1-\beta_x^2)\cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + (1-\beta_y^2) = 0, \tag{2.2}$$

где α_n^3 – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3} \in (a_0^2\rho_0 M_0 D^{-1}\mu_n^{-3},\ a_0^2\rho_0 M_{2\cos m.} D^{-1}\mu_n^{-3}); \tag{2.3}$$

β_x^2 и β_y^2 – коэффициенты напряжений усилий σ_x и σ_y соответственно, характеризующие консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2\, N_x D^{-1}\mu_n^{-2} = h\sigma_x D^{-1}\mu_n^{-2} < h(\sigma_x)_{cr.} D^{-1}\mu_n^{-2} = (\beta_x^2)_{cr.} \tag{2.4}$$

$$\beta_y^2 = N_y D^{-1}\mu_n^{-2} = 2h\sigma_y D^{-1}\mu_n^{-2} < 2h(\sigma_y)_{cr.} D^{-1}\mu_n^{-2} = (\beta_y^2)_{cr.} \ ; \qquad (2.5)$$

согласно условиям (1.4) , (1.5) и обозначению (2.3).

В соответствии с известным методом решения Феррари, уравнение (2.2) можно представить в виде произведения двух квадратных уравнений [12], или в виде группы уравнений:

$$\left(r^2 + \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot r + q - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right) = 0\,; \qquad (2.6)$$

$$\left(r^2 - \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot r + q + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right) = 0\,; \qquad (2.7)$$

где $q > 0$ – единственный действительный корень кубического уравнения:

$$8\cdot(q+1-\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2) - \alpha_n^6 = 0\,. \qquad (2.8)$$

Согласно обозначению (2.3) отсюда следует, что q характеризует скорость потока газа V при фиксированных значениях остальных параметров системы: $q = q(V)$. При этом, учитывая условие (1.4), имеем: $q \in (q(a_0 M_0), q(a_0 M_{2\cos m.}))$.

Здесь, как и в работах [12 – 15], с помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), записанного в виде (2.6) и (2.7), можно показать, что

$$q = q(V) \in \left(q_0,\ q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right) \subseteq \left(q\left(a_0 M_0\right), q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right), \qquad (2.9)$$

$$q_0 = \left(-(1-\beta_x^2)) + 2\sqrt{(1-\beta_x^2)^2 + 3(1-\beta_y^2)}\right)\Big/3\,,\ \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{cr}\,,\ \beta_y^2 < (\beta_y^2)_{cr}\,, \qquad (2.10)$$

где $(\beta_x^2)_{cr}$ и $(\beta_y^2)_{cr}$ – решения соответствующих дисперсионных уравнений исходной задачи в статической постановке в отсутствии обтекания и сосредоточенных инерционных масс и моментов.

А тогда, в силу естественного требования к корням [1,2]:

$$r_1 < 0,\ r_2 < 0,\ r_{3,4} = \alpha \pm i\beta \in W,\ \alpha > 0, \qquad (2.11)$$

являющимися решением квадратных уравнений (2.6) и (2.7) соответственно:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} - 0.5(q-1+\beta_x^2)}\,, r_1 < 0\,, r_2 < 0\,; \qquad (2.12)$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + 0.5(q-1+\beta_x^2)}\,; \qquad (2.13)$$

общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда:

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4} C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x + \lambda t)\cdot\sin(\mu_n y)\,. \qquad (2.14)$$

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.8), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q) = 2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)}\cdot\pi^3 n^3\gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}, \text{ когда } a \le b\,; \qquad (2.15)$$

$$V(q)=2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)}\cdot\pi^3 n^3 D(a_0\rho_0 b^3)^{-1},\ \text{когда}\ a>b; \qquad (2.16)$$

позволяющую по известному значению параметра $q=q\left(n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2,\nu\right)$ определить приведённую скорость потока газа $V\left(q\right)\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$, или $V\left(q\right)\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$.

2.1. Определение значений $(\beta_x^2)_{cr.}=(\beta_x^2)_{cr.}\left(n,\gamma,\nu\right)$ и $(\beta_y^2)_{cr.}=(\beta_y^2)_{cr.}\left(n,\gamma,\nu\right)$. Для определения критических значений коэффициентов β_x^2 и β_y^2 найдем решение исходной задачи при условии $V=0, m_c=0, I_c=0$, когда $\gamma\in\left(0,\infty\right)$. Подставляя общее решение дифференциального уравнения (2.1) в виде [1,2,13– 15]

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp(\mu_n rx+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y),\qquad \mu_n=\pi n b^{-1}, \qquad (2.17)$$

в уравнение (1.1) в отсутствие обтекания, получаем характеристическое уравнение

$$r^4-2(1-\beta_x^2)r^2+(1-\beta_y^2)=0, \qquad (2.18)$$

корни которого, соответственно, при условии $N_x\neq 0, N_y=0$ и $N_x=0, N_y\neq 0$, будут определяться выражениями:

$$r_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{1-0.5\beta_x^2}\pm i\sqrt{0.5\beta_x^2},\ \beta_x^2<2; \qquad (2.19)$$

$r_{1,2}=\pm\ i$ кратности 2, $\beta_x^2=2$; $r_{1,2,3,4}=\pm\ i\sqrt{\left(\beta_x^2-1\right)\pm\sqrt{\beta_x^2\left(\beta_x^2-2\right)}}$, $\beta_x^2>2$;

$$r_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{1\pm\sqrt{\beta_y^2}},\ \beta_y^2<1;\ r_{1,2}=\pm\sqrt{2},\ r_{3,4}=0,\ \beta_y^2=1; \qquad (2.20)$$

$$r_{1,2}=\pm\sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}},\ r_{3,4}=\pm i\sqrt{\sqrt{\beta_y^2}-1},\ \beta_y^2>1.$$

Далее, подставляя решение (2.17), записанного в виде (2.14), в котором корни r_i определяются выражениями (2.19) и (2 20), в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородные системы алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненные к нулю определители этих систем уравнений – характеристические определители – когда $\beta_x^2<2$ и $\beta_y^2<1$ описываются, соответственно, соотношениями:

$$F\left(\beta_x^2\right)=$$

$$\left(1-\nu-\beta_x^2\right)\left\{\beta_x^2(1+\nu)\,\mathrm{sh}^2\left(\pi n\gamma\sqrt{1-0.5\beta_x^2}\right)+(2-\beta_x^2)(1-\nu)\sin^2\left(\pi n\gamma\sqrt{0.5\beta_x^2}\right)\right\}+$$

$$+\beta_x^2(2-\beta_x^2)\left\{(1-\nu)\,\mathrm{ch}^2\left(\pi n\gamma\sqrt{1-0.5\beta_x^2}\right)+(1+\nu)\cos^2\left(\pi n\gamma\sqrt{0.5\beta_x^2}\right)\right\}=0; \qquad (2.21)$$

$$F(\beta_y^2)=$$

$$= \left\{\left(\sqrt{1-\beta_y^2}-1\right)\left((1-\nu)^2+\beta_y^2\right)+2\beta_y^2(1-\nu)\right\}\operatorname{ch}\pi n\gamma\left(\sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}}+\sqrt{1-\sqrt{\beta_y^2}}\right)+$$

$$+\left\{\left(\sqrt{1-\beta_y^2}+1\right)\left((1-\nu)^2+\beta_y^2\right)-2\beta_y^2(1-\nu)\right\}\operatorname{ch}\pi n\gamma\left(\sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}}-\sqrt{1-\sqrt{\beta_y^2}}\right)-$$

$$-2\sqrt{1-\beta_y^2}\cdot\left((1-\nu)^2-\beta_y^2\right)=0 \quad \text{при} \quad \beta_y^2<1; \tag{2.22}$$

откуда находятся критические значения $(\beta_x^2)_{cr.}=(\beta_x^2)_{cr.}(n,\gamma,\nu)$ (табл.1) и $(\beta_y^2)_{cr.}=(\beta_y^2)_{cr.}(n,\gamma,\nu)$ (табл. 2).

Таблица 1. Значения $(\beta_x^2)_{cr.}=(\beta_x^2)_{cr.}(n,\gamma,\nu)$ при $n=1$.

γ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
≤ 0.282	1.999	1.999	1.999	1.999	1.910
0.30	1.999	1.998	1.996	1.987	1.817
0.35	1.960	1.805	1.742	1.638	1.470
0.40	1.759	1.589	1.528	1.427	1.256
0.50	1.552	1.378	1.313	1.208	1.031
0.80	1.452	1.274	1.200	1.087	0.891
1.00	1.441	1.268	1.196	1.084	0.889
1.20	1.408	1.248	1.181	1.074	0.886
1.50	1.375	1.226	1.161	1.060	0.879
≥ 2.00	1.367	1.219	1.155	1.055	0.874

Таблица 2. Значения $(\beta_y^2)_{cr.}=(\beta_y^2)_{cr.}(n,\gamma,\nu)$ при $n=1$.

γ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
≤ 2.9	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998
3.0	0.999	0.999	0.998	0.997	0.994
5.0	0.998	0.998	0.997	0.996	0.961
20.0	0.990	0.989	0.987	0.982	0.957
$\ge$ 50.0	0.930	0.930	0.930	0.930	0.930

Данные таблиц 1 и 2 определены с точностью до порядка 10^{-4}.

Как показали численные исследования, характеристические определители, соответствующие значениям $\beta_x^2 \ge 2$ и $\beta_y^2 \ge 1$, описываются отрицательными неравенствами, определяющими закритическую область неустойчивости, которая в данной работе не рассматривается.

В соответствии с выражением (2.10) очевидно, что

$$q_0=\left(-(1-\beta_x^2))+2\sqrt{(1-\beta_x^2)^2+3(1-\beta_y^2)}\right)\Big/3>0. \tag{2.23}$$

при всех $\beta_x^2<(\beta_x^2)_{cr.}(n,\gamma,\nu)<2$ (табл.1) и $\beta_y^2<(\beta_y^2)_{cr.}(n,\gamma,\nu)<1$ (табл. 2).

2.2. Учитывая условия (1.4), из выражений (2.15) и (2.16) согласно формуле цилиндрической жёсткости $D = E \cdot (2h)^3 \Big/ \left(12\left(1-\nu^2\right)\right)$ следует [13–15]:

$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) \in (V(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3), a_0 M_{2\cos m}\Psi_1) \subseteq (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.})\Psi_1$,

когда $V(q_0) \geq a_0\rho_0$;

$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.})\Psi_1$, когда $V(q_0) < a_0\rho_0$;

$\Psi_1 = 12(1-\nu^2)a_0\rho_0 E^{-1}(2ha^{-1})^{-3}$, $M_0 = \sqrt{2}$, $M_{2\cos m.} \approx 33.85$, для $a \leq b$; (2.24)

и, аналогично,

$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 b^3) \in (V(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0 b^3), a_0 M_{2\cos m}\Psi_2) \subseteq (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.})\Psi_2$,

когда $V(q_0) \geq a_0\rho_0$;

$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 b^3) \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.})\Psi_2$, когда $V(q_0) < a_0\rho_0$;

$\Psi_2 = 12(1-\nu^2)a_0\rho_0 E^{-1}(2hb^{-1})^{-3}$, $M_0 = \sqrt{2}$, $M_{2\cos m.} \approx 33.85$, для $a > b$; (2.25)

Подставляя значения относительной толщины пластинки $2ha^{-1} \in \left[0.006, 0.015\right]$ или $2hb^{-1} \in \left[0.006,\ 0.015\right]$ в выражения (2.15) и (2.16), получаем $d\left(2ha^{-1}, \nu\right) = (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m})\Psi_1$ и $d\left(2hb^{-1}, \nu\right) = (a_0 M_0,\ a_0 M_{2\cos m})\Psi_2$ – интервалы допустимых

Таблица 3. Интервалы допустимых значений приведённой скорости $V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$

ν / $2ha^{-1}$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.8,1311.7)	(52.0,1245.2)	(50.5,1209.0)	(47.7,1141.6)	(41.6,996.3)
0.007	(34.5, 811.1)	(32.7, 769.4)	(32.0, 753.4)	(30.0, 735.1)	(26.2, 715.6)
0.008	(23.1, 544.3)	(22.0, 516.4)	(21.5, 505.6)	(20.1, 473.3)	(17.6,413.1)
0.009	(16.2, 381.8)	(15.4, 362.1)	(15.1, 354.6)	(14.1, 332.0)	(12.3,289.7)
0.010	(11.8, 283.5)	(11.2, 269.1)	(10.9, 261.3)	(10.3, 246.7)	(9.0, 215.3)
0.011	(8.3, 209.4)	(8.4, 198.7)	(8.1, 190.4)	(7.74, 182.1)	(6.75,158.9)
0.012	(6.85, 164.0)	(6.5, 155.7)	(6.3, 151.2)	(5.96, 142.7)	(5.2, 124.6)
0.013	(5.39, 126.9)	(5.11,120.34)	(5.0, 117.84)	(4.69,110.32)	(4.09, 96.3)
0.014	(4.3, 101.5)	(4.09, 96.24)	(4.0, 94.24)	(3.75, 88.22)	(3.27, 77.0)
0.015	(3.5, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23,77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

значений приведённых скоростей $V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и $V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$, соответственно, когда $a \leq b$ и $a > b$, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.4) для прямоугольных стальных пластинок (табл. 3) [14].

3. Достаточные признаки потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.5). Подставляя

общее решение (2.14) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.12) и (2.13), в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный к нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель, описывается биквадратным уравнением относительно собственного значения λ:

$$\chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + \left(\chi_n A_1 + \delta_n A_2\right)\lambda^2 + A_3 = 0\ , \tag{3.1}$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3},\ \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1},\ \delta_n > 0\ ,\ \chi_n > 0\ , \tag{3.2}$$

δ_n и γ_n – приведённые значения сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки;

$$A_0 = \left(1 + \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\right) B_1 B_2 - \tag{3.3}$$

$$-2B_1 B_2 \operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma) -$$

$$-\left(3q+1-\beta_x^2\right)\operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\,;$$

$$A_1 = \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot \tag{3.4}$$

$$\cdot\left\{(q-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}) - (q+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2})\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\right\} B_1 B_2 +$$

$$+2B_2\left\{\left(q\left(q+1-\beta_x^2\right) - \sqrt{(q^2-1+\beta_y^2}\left(q-\sqrt{(q^2-1+\beta_y^2}\right)\right)\operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1) +\right.$$

$$\left.+B_1\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)\left(q^2-1+\beta_y^2\right)}\operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)\right\}\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\cdot$$

$$\cdot\cos(\pi n\gamma B_2) + \left\{\left(3q+1-\beta_x^2\right)\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)}\,\operatorname{sh}\left(\pi n\gamma B_1\right) +\right.$$

$$\left.+2B_1\left(q\left(q+1-\beta_x^2\right) + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\left(q+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\right)\operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)\right\}\cdot$$

$$\cdot\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma);$$

$$A_2 = \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\left(1-\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\right)\cdot B_1 B_2 - \tag{3.5}$$

$$-\left\{2B_2\left((q+1-\beta_x^2) + \sqrt{(q^2-1+\beta_y^2)}\right)\operatorname{sh}\left(\pi n\gamma B_1\right)\cos(\pi n\gamma B_2) +\right.$$

$$\left.+2B_1\left(q+1-\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\right\}\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma);$$

$$A_3 = \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)^2 - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2 - \right. \tag{3.6}$$

$$-2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\Big\}B_1B_2-\sqrt{2\left(q+1-\beta_x^2\right)}\Big\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)^2-$$

$$-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2-2\beta_x^2\left(q+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\Big\}\ \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)$$

$$\cdot\ B_1B_2+2B_2\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\Big\{\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)}\cdot$$

$$\cdot\left(q+1-\beta_x^2+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+B_1((q^2-1+\beta_y^2)+2q(q+1-\beta_x^2)+$$

$$+(q+\nu)^2)\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\Big\}\cos(\pi n\gamma B_2)+\ \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\ \Big\{\Big(2q\left(1-\beta_x^2\right)+$$

$$q^2\left(q+1+3\beta_x^2\right)-\left(q-1+\beta_x^2\right)\left(q^2-1+\beta_y^2\right)-2\nu\left(q+3-3\beta_x^2+2(q^2-1+\beta_y^2)\right)$$

$$+\nu^2\left(3q+1-\beta_x^2\right)\Big)\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+2B_1\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)}\left(q+1-\beta_x^2-\right.$$

$$\left.-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\Big\}\sin(\pi n\gamma B_2);$$

$$B_1=\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}-0.5(q-1+\beta_x^2)};B_2=\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+0.5(q-1+\beta_x^2)}.\quad(3.7)$$

Легко показать, что при допустимых значениях параметра $q=q(V)$ (2.9) и коэффициентов напряжений $\beta_x^2<(\beta_x^2)_{cr.}$ (табл. 1) и $\beta_y^2<(\beta_y^2)_{cr.}$ (табл. 2)

$$B_1=B_1(q,\beta_x^2,\beta_y^2)>0,\ B_2=B_2(q,\beta_x^2,\beta_y^2)>0,\qquad(3.8)$$

откуда следует справедливость неравенств:

$$A_0=A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2)>0\,,A_2=A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2)>0\,,\ \gamma\in\left(0,0.33\right].\qquad(3.9)$$

Вводя обозначение

$$k_n=\chi_n\cdot\delta_n^{-1}=I_c\left(\pi n\gamma\right)^2\cdot\left(m_ca^2\right)^{-1},\qquad(3.10)$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.9), перепишется в виде

$$\lambda^4+(k_nA_1+A_2)\chi_n^{-1}A_0^{-1}\lambda^2+\chi_n^{-1}\delta_n^{-1}A_0^{-1}A_3=0\,,\ \delta_n>0\,,\ \chi_n>0\,,\ k_n>0\,.\qquad(3.11)$$

Будем полагать, что

$$k_n<8\ \text{при всех}\ n\,.\qquad(3.12)$$

Заметим, что при больших значениях k_n имеет место апериодическая неустойчивость – переход из левой полуплоскости собственных значений λ задачи в правую через бесконечно удалённую точку $\left(\lambda=\pm\infty\right)$ [1, 2].

4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Как и в работах [12– 15], введём в рассмотрение в пространстве параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\Im_0\left(k_nA_1+A_2>0,A_3>0,\Delta>0\right)$ и области неустойчивости:

$\Im_1\left(k_nA_1+A_2>0, A_3<0, \Delta>0\right)$, $\Im_2\left(k_nA_1+A_2<0, A_3>0, \Delta>0\right)$;

$\Im_3\left(A_3>0, \Delta<0\right)$;

Δ – дискриминант биквадратного уравнения (3.11):

$$\Delta=\Delta(n,\gamma,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2,k_n)=(k_nA_1+A_2)^2-4k_nA_0A_3. \qquad (4.1)$$

В области устойчивости $\Im_0$ характеристический определитель (3.11) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2}=\pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4}=\pm i\omega_2$: прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого состояния равновесия; в области $\Im_1$ – имеет два действительных корня $\lambda_1<0$, $\lambda_2>0$ и два чисто мнимых корня $\lambda_{3,4}=\pm i\omega$, что характеризует эйлерову дивергенцию панели; в области $\Im_2$ – имеет два отрицательных ($\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$) и два положительных ($\lambda_3>0$, $\lambda_4>0$) корня, характеризующие более ярко выраженную дивергенцию панели – неэйлерову дивергенцию; а в области $\Im_3$, по крайней мере, два корня уравнения (3.11) являются комплексно сопряжёнными числами с положительной вещественной частью – имеет место панельный флаттер: пластинка совершает флаттерные колебания – колебания по нарастающей амплитуде [12– 15].

Границами области устойчивости $\Im_0$ системы в пространстве её параметров $\Im$ при условии $k_nA_1+A_2>0$ являются гиперповерхности $A_3=0$ и $\Delta=0$ – определяющие условия апериодической и колебательной неустойчивости соответственно [10, 11]: характеристическое уравнение (3.11) на гиперповерхности $A_3=0$ имеет один нулевой корень $\lambda_0=0$ кратности 2, а на гиперповерхности $\Delta=0$ – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2}=\pm i\omega$.

На границе $A_3=0$ области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_nA_1+A_2>0$ и $\Delta>0$ система «пластинка-поток» при скоростях потока газа $V\geq V_{cr.div.}$ теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели. Критические скорости $\left\{V_{crdiv}^{(1)}\right\}$ и $\left\{V_{crdiv}^{(2)}\right\}$, определяемые, соответственно, подстановкой первого и третьего корней уравнения $A_3=0$ в формулу (2.15), разграничивают области $\Im_0$ и $\Im_1$. При скоростях потока газа $V\geq V_{cr.div.}$ происходит «мягкий» переход через точку $\lambda_0=0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к эйлеровой дивергенции панели. Это приводит к возникновению дополнительных напряжений, приводящих к изменению плоской формы равновесия: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Критические скорости неэйлеровой дивергенции $\left\{V_{1,2}\right\}$ разграничивают области $\Im_1$ и $\Im_2$. При скоростях потока газа $V\geq V_{1,2}$ происходит «мягкий» переход из об-

ласти $\Im_1$ в область $\Im_2$. Критические скорости $V_{1,2}$ определяются подстановкой второго корня уравнения $A_3 = 0$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$ и $\Delta > 0$ в формулу (2.15). На границе $\Delta = 0$ области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, а так же, на границе $\Delta = 0$ области $\Im_2$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, система при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl}$ теряет устойчивость в виде колебательной неустойчивости, соответственно, либо переходит из состояния равновесия $\Im_0$ в состояние колебательной неустойчивости $\Im_3$, либо переходит из состояния неэйлеровой дивергенции $\Im_2$ в состояние колебательной неустойчивости $\Im_3$: имеет место панельный флаттер. Критические скорости панельного флаттера $\left\{V_{cr.fl.}\right\}$, определяемые подстановкой первого корня уравнения $\Delta = 0$ в формулу (2.15), разграничивают области $\Im_0$ и $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, либо области $\Im_2$ и $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, в зависимости от значений параметров системы $n, \gamma, \nu, \beta_x^2$, β_y^2, k_n. В обоих случаях при $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к флаттерным колебаниям. Однако, следует отметить, что в первом случае начинает совершать флаттерные колебания относительно равновесного состояния плоская по форме пластинка, а во втором случае – изогнутая по форме пластинка – «выпученная». Тем самым, переходы ($\Im_0 \to \Im_3$) и ($\Im_2 \to \Im_3$) определяют «опасные границы» областей $\Im_0$ и $\Im_2$ [11].

Следует отметить, что критические скорости $V_{cr.div.}, V_{1,2}$ и $V_{cr.fl.}$ определяются с достаточной точностью подстановкой в формулу (2.15) искомых значений параметра $q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$.

5. **Численные результаты**. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n)\} \in \Im$ для $\gamma \in (0; 0.33)$ при $n = 1$, $k_n = k_1 \in (0, 8)$, параметризованных надлежащим образом, исходя из свойств функций, определяющих критические скорости дивергенции и панельного флаттера. Все указанные функции являются монотонно возрастающими от числа полуволн n: их наименьшему значению соответствует $n = 1$ [1,2,12–15].

Аналогично, как и в [13–15], для наглядной иллюстрации динамики невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка – поток» в пространстве параметров $\Im$ составлены цепочки переходов $\Im_l \to \Im_k$, $\Im_l, \Im_k \subset \Im$, из сопоставления найдённых значений критических скоростей с данными таблицы 3.

Здесь, так же, как и в [13–15}, формы представления цепочек переходов существенно зависят от относительной толщины $2ha^{-1}$ и материала пластинки. В част-

ности, цепочки переходов исходной системы в случае стальных пластинок относительной толщины $\left(2ha^{-1}\right)\in\left[0.006,0.015\right]$ для $\gamma\in\left(0;0.33\right)$ будут вида [13–15]:

$$(\Im_0)\xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}}\Im_1\xrightarrow{V_0}\Im_0\xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}}\Im_1,\ k_1<k_{fl}\ ; \tag{5.1}$$

$$(\Im_0)\xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}}\Im_1\xrightarrow{V_0}\Im_0\xrightarrow{V_{crfl}}\Im_3\xrightarrow{V_0^*}\Im_0\xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}}\Im_1, k_{fl}\le k_1<k_{div};\tag{5.2}$$

$$(\Im_0)\xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}}\Im_1\xrightarrow{V_{1,2}}\Im_2\xrightarrow{V_{crfl}}\Im_3\xrightarrow{V_0^*}\Im_0\xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}}\Im_1,\ k_1\ge k_{div};\tag{5.3}$$

где через k_{fl} и k_{div} (табл. 4) обозначены значения параметра k_1, начиная с которых, когда $k_1\ge k_{fl}$, имеет место флаттер и эйлерова дивергенция, а когда $k_1\ge k_{div}$ – флаттер, эйлерова и неэйлерова дивергенции; V_0^* – критическая скорость, характеризующая переход $\Im_3\to\Im_0$, определяемая подстановкой второго корня уравнения $\Delta=0$ в выражение (2.15).

Отметим, что коэффициент k_1 существенно зависит от параметра γ, а от остальных – исчезающе мало: $k_1=k_1\left(\gamma\right)$.

Таблица 4. Значения $k_{fl}=k_{fl}\left(\gamma\right)$ и $k_{div}=k_{div}\left(\gamma\right)$

γ	0.01	0,1	0,3
k_{fl}	0.0000767	0.00786	0.085
k_{div}	0.0002500	0.02540	0.250

В соответствии с выражениями (5.1) – (5.3) при скоростях потока $V\ge V_{cr.fl.}$, когда $k_{fl}\le k_1\le k_{fl}$, начинает совершать флаттерные колебания плоская пластинка, а когда $k_1>k_{div}$ – «выпученная» (изогнутая) пластинка.

Представления (5.1) – (5.3) наглядно отражают две особенности в динамике невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка–поток».

1) Невозмущённое состояние равновесия системы устойчиво вблизи $a_0\sqrt{2}$ для пластинок относительной толщины $(2ha^{-1})>0.012$, когда $\gamma<0.3$, и $(2ha^{-1})>0.013$, когда $\gamma\le0.3$; в остальных случаях – неустойчиво: вблизи $a_0\sqrt{2}$ имеет место эйлерова дивергенция.

2) При значениях $k_{fl}\le k_1\le k_{div}$ имеем переход $\Im_0\xrightarrow{V_0}\Im_3$, а при $k_1>k_{div}$ – $\Im_2\xrightarrow{V_{1,2}}\Im_3$. При этом,

$$V_0\left(\gamma,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2\right)=V_{1,2}\left(\gamma,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2\right).\tag{5.4}$$

Однако, несмотря на сходство качественных характеристик динамики невозмущённого состояния равновесия системы для всех $\gamma \in (0, 0.33)$, её количественные характеристики различны – существенно зависят от значения γ.

5.1. В таблицах 5 и 6, 7 – 9 и 10 – 12 приведены некоторые численные результаты решения исходной задачи устойчивости, соответственно, для $\gamma = 0.01; 0.1; 0.3$.

Таблица 5. Значения $V^{(1)}_{crdiv} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$, γ =0.01 ν =0.125; 0.3; 0.5.

β_x^2	0	0,5	1.0	1.5	1.8
$V^{(1)}_{crdiv} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$	6.324 6.323 6.322	6.323 6.322 6.321	6.320 6.319 6.318	6.319 6.318 6.316	6.318 6.317 6.315

Критическая скорость $V^{(1)}_{crdiv} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ – монотонно медленно убывающая функция от β_x^2 и ν: с ростом $\beta_x^2 \in [0, 1.8]$ убывает, примерно, на 0.1%, а с ростом коэффициента Пуассона ν – на 0.03–0.05 %; исчезающе мало зависит от β_y^2 (табл. 5). Критические скорости V_0, $V_{1,2}$, $V^{(2)}_{crdiv}$, V_{crfl} и V_0^* для $\gamma = 0.01$ исчезающе мало зависят от параметров β_x^2, β_y^2 и ν. Соответствующие приведённые значения равны:

$$V_0 D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right) = V_{1,2} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right) = 160.858;\ V^{(2)}_{crdiv} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right) = 744.668. \qquad (5.5)$$

Таблица 6. Значения $V_{crfl} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ и $V_0^* D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$, γ =0.01, ν =0.3.

k_1	0.00008	0.0001	0.001	0.01	0.1	5.0
$V_{crfl} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$	197.514	177.209	183.223	247.651	277.962	291.976
$V_0^* D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$	342.112	362.856	350.273	346.111	309.412	295.515

Критические скорости V_{crfl} и V_0^* существенно зависят от параметра k_1 (табл. 6). Приведённая критическая скорость флаттера $V_{crfl} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ монотонно убывает в 1.16 раз на промежутке $k_1 \in \left[k_{fl}, k_{div}\right]$; а при $k_1 > k_{div}$ – возрастает, примерно, в 1.7 раз, достигая минимума при $k_1 = k_{div} = 0.00025$ (табл. 4) – в точке пересечения границ переходов $\mathfrak{I}_0 \to \mathfrak{I}_3$ и $\mathfrak{I}_2 \to \mathfrak{I}_3$:

$$\left(V_{crfl} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)\right)_{\min} = 170.203,\ (k_1)_{\min} = k_{div} \text{ при всех } \beta_x^2,\ \beta_y^2 \text{ и } \nu; \qquad (5.6)$$

Как следует из данных таблицы 6, критическая скорость $V_0^* D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ при $k_1 = k_{div} = 0.00025$ достигает максимума:

$\left(V_0^* D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)\right)_{\max}$ = 371.315. (5.7)

Таблица 7. Значения $V_{crdiv}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, γ = 0.1, ν = 0.125; 0.3; 0.5.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.5	1.0	1.5	1.8
0	6.778 6.774 6.559	6.593 6.490 6.372	6.408 6.306 6.189	6.225 6.122 6.006	6.080 5.978 5.861
0.8	6.773 6.770 6.555	6.588 6.486 6.367	6.403 6.301 6.184	6.221 6.118 6.001	6.076 5.974 5.856

Таблица 8. Значения $V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right), V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $V_{crdivcrdiv}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$; при γ = 0.1, ν = 0.125; 0.3; 0.5.

β_x^2	0	0,5	1.0	1.5	1.8
$V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	162.421 162.841 163.326	161.879 162.298 162.783	161.337 161.756 162.256	160.827 161.245 161.729	160.332 160.773 161.256
$V_{crdiv}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	743.816 741.138 738.463	743.236 740.532 737.564	742.710 740.033 736.905	741.862 739.159 736.112	741.183 738.401 735.436

Для $\gamma = 0.1$ критическая скорость $V_{crdiv}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ с ростом β_x^2, β_y^2 и ν убывает, примерно, на 11–13%, 0.06 – 0.08% и на 3.3 – 6.6% соответственно (табл. 7). $V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_{crdiv}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ исчезающе мало зависят от β_y^2; при этом, монотонно убывающие функции от β_x^2. С ростом β_x^2 скорость неэйлеровой дивергенции $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ убывает на 12 % и возрастает на 5.6%, с ростом ν; $V_{crdiv}^{(2)}$ с ростом β_x^2 убывает на 0.37%, а с ростом ν – на 0.75 % (табл. 8).

Таблица 9. Значения $V_{crfl} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$; γ = 0.1, ν = 0.125;0.3;0.5.

β_x^2 \ k_1	0.01	0,1	0,5	1.0	5,0
0	199.811 200.849	184.536 184.789	233.298 233.480	249.392 249.503	273.406 273.502

	203.063	185.126	233.665	249.652	273.598
1.8	195.223 196.133 196.993	182.883 183.135 183.471	231.347 231.510 231692	247.285 247.396 247.563	271.137 271.194 271.262

Как следует из данных таблицы 9, для γ = 0.1 критическая скорость флаттера $V_{crfl}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ – монотонно убывающая функция от β_x^2: с ростом β_x^2 убывает на 0.8–2.3%; возрастающая функция от коэффициента Пуассона ν: с ростом ν возрастает на 0.05–1.63%; достигает минимума при $k_1 = k_{div}$ = 0.0254 (табл. 4):

$$\left(V_{crfl}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)\right)_{\min} = 172.378,\ \beta_x^2 = 0,\ \nu = 0.3;\ \gamma = 0.1, \tag{5.8}$$

$$\left(V_{crfl}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)\right)_{\min} = 168.247,\ \beta_x^2 = 1.8,\ \nu = 0.3;\ \gamma = 0.1,$$

и исчезающе мало зависит от β_y^2.

В соответствии с численными результатами можно показать, что $V_0^*D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ для γ = 0.1, также, как и для γ = 0.01, в отличие от $V_{crfl}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$, при $k_1 = k_{div}$ – достигает максимума. Соответственно, когда $k_1 = k_{div}$ = 0.0254 (табл.4):

$$\left(V_0^*D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)\right)_{\max} = 367.790,\ \beta_x^2 = 0,\ \nu = 0.3;\ \gamma = 0.1, \tag{5.9}$$

$$\left(V_0^*D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)\right)_{\max} = 455.733,\ \beta_x^2 = 1.8,\ \nu = 0.3;\ \gamma = 0.1$$

а когда k_1 = 5, имеем:

$$\left(V_0^*D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)\right)_{\min} = 275.412,\ \beta_x^2 = 0,\ \nu = 0.3;\ \gamma = 0.1; \tag{5.10}$$

$$\left(V_0^*D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)\right)_{\min} = 272.506,\ \beta_x^2 = 1.8,\ \nu = 0.3;\ \gamma = 0.1.$$

Таблица 10. Значения $V_{crdiv}^{(1)}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$; γ = 0.3, ν = 0.125;0.3;0.5.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.5	1.0	1.5
0	10.892 9.915	9.112 8.135	7.454 6.489	5.935 5.015

	8.773	7.011	5.395	3.986
0.8	10.489 9.479 8.390	8.705 7.753 6.605	7.035 6.081 4.963	5.502 4.572 3.466

Для $\gamma = 0.3$ критическая скорость $V_{crdiv}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ убывает с ростом β_x^2, β_y^2 и ν, примерно, в 2 – 2.42 раза, на 5– 15 % и в 1.25 –1.5 раз соответственно (табл. 10).
;

Таблица 11. Значения $V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $V_{crdiv}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.3$, $\nu = 0.125; 0.3; 0.5$.

β_x^2	0	0,5	1.0	1.5
$V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$; $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	176.011 179.158 185.203	170.993 174.346 179.884	165.421 169.386 174.275	160.648 164.720 169.270
$V_{crdiv}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	742.960 718.976 692.898	736.583 712.432 686.670	728.519 703.984 680.432	721.171 697.664 674.184

Таблица 12. Значения $V_{crfl} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_0^* D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$; $\gamma = 0.3$, $\nu = 0.3$.

β_x^2 \ k_1	0.09	0,1	0,3	0.5	1,0	5.0
0	252..537	227.700	181.726	185.203	200.602	249.176
1.5	190.600	183.457	161.234	167.066	183.457	229.041

β_x^2 \ k_1	0.09	0,1	0,3	0.5	1,0	5.0
0	311.902	346.846	429.209	412.614	391.121	350.190
1.5	348.118	381.408	464.975	454.638	413.526	375.292

Из данных таблиц 11 – 12 следует, что критическая скорость эйлеровой дивергенции $V_{crdiv}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ – монотонно убывающая функция от β_x^2, β_y^2 и ν: с ростом β_x^2 и ν убывает, примерно, на 2.8 –3.9 %, и на 7- 7.2 % соответственно; а от β_y^2 зависит исчезающе мало. Неэйлерова дивергенция $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ – монотонно убывающая функция от β_x^2, возрастающая от ν, и, зависящая исчезающе мало от β_y^2: с ростом β_x^2 убывает в 1.12 раза, а с ростом ν возрастает на 4.4 – 5.2 %.

Критическая скорость флаттера $V_{crfl}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ с ростом β_x^2 и ν убывает в 1.1–1.32 раза и возрастает на 0.07–1% соответственно. А $V_0^*D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ с ростом β_x^2 возрастает, примерно, на 7 – 11.5 %. $V_{crfl}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ и $V_0^*D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ зависят от β_y^2 исчезающе мало. При этом,

$$\left(V_{crfl}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)\right)_{\min} = 181.080, \gamma = 0.3,\ \beta_x^2 = 0,\ \nu = 0.3,\ k_1 = k_{div} = 0.25; \quad (5.11)$$

$$\left(V_{crfl}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)\right)_{\min} = 160.923,\ \gamma = 0.3,\ \beta_x^2 = 1.5,\ \nu = 0.3,\ k_1 = k_{div} = 0.25;$$

$$\left(V_0^*D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)\right)_{\max} = 440.178,\ \gamma = 0.3,\ \beta_x^2 = 0,\ \nu = 0.3,\ k_1 = k_{div} = 0.25;$$

$$\left(V_0^*D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)\right)_{\max} = 475.172,\ \gamma = 0.3,\ \beta_x^2 = 1.9,\ \nu = 0.3,.\ k_1 = k_{div} = 0.25.$$

5.2. Учитывая влияние относительной толщины пластинки на устойчивость системы «пластинка–поток», из сопоставления данных таблиц 5 – 12 и значений (5.5) – (5.11) с данными таблицы 3, очевидны следующие изменения форм представлений цепочек переходов (5.1) – (5.3):

$$\mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{I}_1,\ (2ha^{-1}) > 0.012, \gamma < 0.3 \text{ и } (2ha^{-1}) > 0.013, \gamma \geq 0.3 \text{ ; при всех } k_1 < 8;$$

$$\mathfrak{I}_1 \xrightarrow{V_0} \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{crfl}} \mathfrak{I}_3 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \mathfrak{I}_1,\ k_{fl} \leq k_1 < k_{div}, (2ha^{-1}) \leq 0.011;$$

$$\mathfrak{I}_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \mathfrak{I}_2 \xrightarrow{V_{crfl}} \mathfrak{I}_3 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \mathfrak{I}_1,\ k_1 \geq k_{div};\ (2ha^{-1}) \leq 0.011.$$

Отсюда следует, что для $\gamma < 0.3$, когда $(2ha^{-1}) > 0.012$, и для $\gamma \geq 0.3$, когда $(2ha^{-1}) > 0.013$, невозмущённое состояние равновесия системы устойчиво вблизи $a_0\sqrt{2}$. При этом, отсутствуют неэйлерова дивергенция и панельный флаттер, что и обеспечивает прочность пластинки по критерию устойчивости колебаний при всех значениях остальных «существенных» параметров системы.

Флаттерные колебания имеют место для тонких пластинок, когда $(2ha^{-1}) \leq 0.011$ и $k_1 \geq k_{fl}$. При малых $k_1 \in \left[k_{fl}; k_{div}\right]$ потеря устойчивости наступает при меньшей скорости потока, но это не эйлерова потеря, а переход из состояния покоя к движению – к автоколебаниям. При этом, наименьшая скорость потока газа, при которой имеют место флаттерные колебания, достигается при значении $k_1 = k_{div}$ – в точке пересечения границы области устойчивости с границей областей неэйлеровой дивергенции и флаттера одновременно.

При $k_1 < k_{fl}$ невозмущённое состояние равновесия системы, когда $(2ha^{-1}) \leq 0.011$, с увеличением скорости потока газа, теряет устойчивость только в виде эйлеровой дивергенции панели, будучи неустойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ [2].

С увеличением значения k_1, степень устойчивости системы повышается.

6. Основные результаты и заключение. В работе получено аналитическое решение задачи динамической устойчивости невозмущённого состояния равновесия упругой достаточно удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота, в предположении, что пластинка первоначально нагружена по двум направлениям: сжимающими силами, направленными по потоку газа и в направлении, перпендикулярном к нему.

Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка–поток» на область устойчивости и области неустойчивости – области эйлеровой и неэйлеровой дивергенции панели и панельного флаттера.

Получена формула зависимости скорости потока газа от «существенных» параметров системы «пластинка–поток», позволяющая найти критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера.

Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Найдены «безопасные» и «опасные» границы области устойчивости.

Установлено, что при меньших значениях интенсивности приложенных инерционных моментов поворота потеря устойчивости наступает при меньшей скорости потока, но это не эйлерова потеря устойчивости, а переход системы от покоя к движению – к автоколебаниям. Найдена наименьшая скорость потока газа, при которой имеют место флаттерные колебания. Показано, что она достигается в точке пересечения границ трёх областей: устойчивости, неэйлеровой дивергенции и панельного флаттера.

Определена минимальная относительная толщина стальной пластинки, которая обеспечивает её прочность по критерию устойчивости колебаний.

Показано, что, в целом, имеет место понижение степени устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы, обусловленное влиянием первоначальных сжимающих сил, направленных по потоку газа. Влияние первоначальных сжимающих сил, направленных перпендикулярно потоку газа, незначимо.

Из сравнения численных результатов данной работы с результатами работы [15] следует, что защемленный край пластинки в исходной постановке способствует повышению степени устойчивости системы, примерно, в 1.2 – 2 раза, в сравнении с системой, в которой один край – свободен, а остальные кромки являются шарнирно закреплёнными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел.– М: Наука. 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968.
6. Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе.// Изв. АН СССР. ПММ. 1957. Т.21. № 2. С. 231–243.
7. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.

8. Ashley G.H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician//J. Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N 12. P. 1109–1118.
9. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
10. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.–Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
11. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
12. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
13. M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. Supersonic flutter of a compressed elongated plate in the presence of concetrated inertial masses and moments. // Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2020. V. 73(4). P. 58–74.
14. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлинённой прямоугольной пластинки со свободным краем, сжатой по потоку газа // Изв. НАН Армении, Механика. 2023. Т.76 (2), с. 44–58. DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.2- 44.
15. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлинённой панели со свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2024. Т.77 (1), с. 40–55. DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.1- 40.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – к.ф.м.н., старший научный сотрудник Института механики, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 9 июня 2026г.