ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 79, №3, 2026 Механика
УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2026.79.3-29

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ОТВЕРСТИЕМ

Агаян К.Л., Арутюнян Л.А., Закарян В.Г.

Ключевые слова: плоская задача, составное тело, биполярные координаты, луночки, сингулярные интегралы, уравнение Фредгольма.

Aghayan K.L., Harutunyan L.A.,. Zakaryan V.G

A Plane Problem for Composite Plane Weakened by a Hole

Keywords: plane problem, composite body, bipolar coordinates, moon-shapes, singular integrals, Fredholm equation.

Within the generalized bipolar coordinate system, a plane contact problem for a weakened circular hole in a composite plane is considered. The contour of the circular hole is assumed to be covered by two intersecting hole-shaped inserts made of a different elastic material. Within the framework of plane elasticity theory, a closed solution to the problem is constructed in a bipolar coordinate system using the stress function method. The solution to the governing boundary value problem is first reduced to a system of two singular integral equations, then formulated as a vector Riemann-Hilbert problem for certain functions. The final solution is reduced to a system of Fredholm integral equations of the second kind, which admits a solution using the method of successive approximations.

Աղայան Կ.Լ., Հարությունյան Լ.Ա., Զաքարյան Վ.Գ.

Վերջավոր անցքով թուլացված բաղադրյալ հարթության համար հարթ խնդիր

Հիմնաբառեր. Հարթ խնդիր, բաղադրյալ մարմին, երկլևեռ կոորդինատներ, լուսնաձև տիրույթ, սինգուլյար ինտեգրալներ, Ֆրեդհոլմի հավասարում:

Ընդհանրացված երկլևեռ կոորդինատական համակարգում դիտարկվում է, երկու շրջանագծային աղեղներով սահմանափակված, անցքով թուլացված, բաղադրյալ առաձգական հարթության հարթ կոնտակտային խնդիր: Առաձգականության տեսության հարթ խնդրի շրջանակներում, ընդհանրացված երկլևեռ կոորդինատային համակարգում լարումների ֆունկցիայի օգնությամբ կառուցվում է խնդրի լուծումը:

Եզրային խնդրի լուծումը նախ բերվում է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, որն այնուհետև ձևակերպվում է Ռիման – Հիլբերտի եզրային խնդրի տեսքով, որոշակի վեկտոր ֆունկցիայի նկատմամբ: Վերջինիս լուծումը, բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, որը թույլ է տալիս լուծում մոտավոր հաջորդականությունների մեթոդով: Ուսումնասիրվում է նյութերի միացման անկյունային կետում լարումների վարքը:

В обобщенной биполярной координатной системе рассматривается плоская контактная задача для упругой составной плоскости, содержащей отверстие, контур которого образован дугами двух пересекающихся окружностей. В рамках теории упругости, в обобщенной системе биполярных координат, методом функции напряжения, построено решение задачи.

Решение краевой задачи сначала сводится к системе из двух сингулярных интегральных уравнений, которая затем формулируется в виде краевой задачи Римана – Гильберта для некоторой вектор функции. Решение последней сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, допускающей решение методом последовательных приближений.

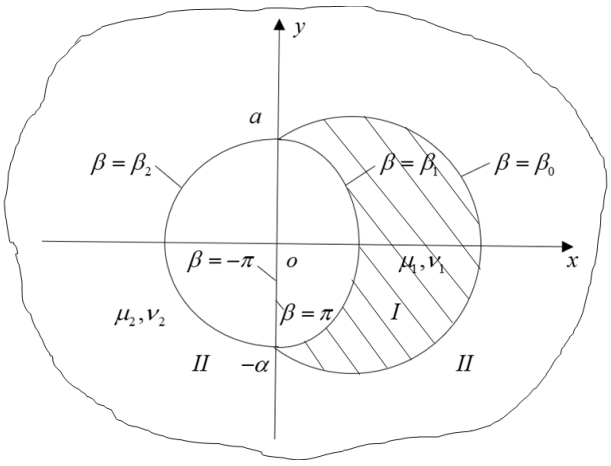
Рассматривается поведение напряжения на краю поверхности контакта.

Введение. Исследованию закономерностей и особенности напряженного состояния в составных упругих телах в виде упругой плоскости, содержащих концентраторы напряжения типа трещин, накладок, включений или остроугольных полостей различных типов, посвящены многочисленные работы. В связи с этим, отметим книги [1-7], в которых выдвинуты различные подходы к решению вопросов, связанных с определением сингулярного поведения упругих напряжений около концевых точек концентраторов напряжений. В работах [9-14], конечно это далеко не конечный список, поставлены и решены различные задачи, относящиеся к вопросам изучения напряженно – деформированного состояния в составных упругих телах, с точным определением степеней сингулярности разрушающих напряжений в остроугольных точках контактных поверхностей. В качестве работ, наиболее связанных с рассматриваемой здесь задачей, следует отметить работы [2,6,8,10], в которых изучаются плоские задачи для внутренности круговых луночек. В [7,8,13,14] изучаются аналогичные внешние задачи теории упругости для неоднородных плоскостей с отверстием.

В настоящей работе получено решение контактной задачи теории упругости для неоднородной плоскости, ослабленной отверстием, контур которого образован дугами пересекающихся окружностей.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.

В настоящей работе рассматривается плоская задача теории упругости для составной плоскости, ослабленной несимметричным отверстием, контур которого образован дугами двух пересекающихся окружностей, и усиленной луночными подушками из другого материала (фиг. 1).



Фиг. 1

Принимаем, что в видоизменной биполярной системе координат, первый материал занимает область $\left(\beta_0<\beta<\beta_1,\ -\infty<\alpha<\infty\right)$ с упругими характеристиками μ_1 и ν_1, а второй материал – область $\left(\beta_2<\beta<\beta_0,\ -\infty<\alpha<\infty\right)$, с упругими характеристиками μ_2 и ν_2, где

$\mu_k\,(k=1,2)$ – модули сдвига, а $\nu_k\,(k=1,2)$ – коэффициенты Пуассона материалов. Между материалами вдоль контактных линии $\beta=\beta_0$ осуществляется полный контакт. Внешние нагрузки, в виде нормальных и касательных напряжений, заданы на границах $\beta=\beta_k\,(k=1,2)$.

При этих предположениях, требуется определить напряженно-деформированное состояние рассматриваемого составного тела, а также исследовать характер распределения контактных напряжений около концевых (угловых) точек областей.

Внешние задачи для этой области удобно решать в несколько видоизменной системе биполярных координат. Связь прямоугольных координат с видоизменными биполярными координатами дается формулами [2]

$$gx=\sin\beta,\quad gy=\mathrm{sh}\alpha,\quad ag=\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta \tag{1}$$

где g – характеризирует масштаб преобразования.

Задача решается при помощи функций напряжений $\Phi_m(\alpha,\beta)\ \ (m=1,2)$, каждая из которых удовлетворяют бигармоническому уравнению [1,2]:

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right]\left(g\Phi_m(\alpha,\beta)\right)=0 \tag{2}$$

Напряжения и перемещения в видоизменённых биполярных координатах выражаются через функции напряжений $\Phi_m(\alpha,\beta)$ формулами [2]:

$$a\sigma_\alpha^{(m)}(\alpha,\beta)=\left[(\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\mathrm{sh}\,\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\mathrm{ch}\,\alpha\right]\left(g\Phi_m(\alpha,\beta)\right)$$

$$a\sigma_\beta^{(m)}(\alpha,\beta)=\left[(\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\mathrm{sh}\,\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\cos\beta\right]\left(g\Phi_m(\alpha,\beta)\right)$$

$$a\tau_{\alpha\beta}^{(m)}(\alpha,\beta)=-(\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left(g\Phi_m(\alpha,\beta)\right) \tag{3}$$

$$u_m(\alpha,\beta)=\frac{g}{2\mu_m}\left[(1-2\nu_m)\frac{\partial\Phi_m(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Psi_m(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right]$$

$$\nu_m(\alpha,\beta)=\frac{g}{2\mu_m}\left[(1-2\nu_m)\frac{\partial\Phi_m(\alpha,\beta)}{\partial\beta}+\frac{\partial\Psi_m(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right]\quad m=1,2$$

Связь между $\Psi_m(\alpha,\beta)$ и $\Phi_m(\alpha,\beta)$ дается формулой

$$\frac{\partial^2\left(g\Psi_m(\alpha,\beta)\right)}{\partial\alpha\partial\beta}=(1-\nu_m)\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-1\right)\left[g\Phi_m(\alpha,\beta)\right] \tag{4}$$

Отметим, что граничные условия на линиях $\beta=\beta_m\ (m=1,2)$, в виде нормальных $\sigma_\beta(\alpha,\beta_m)=\sigma_m(\alpha)$ и касательных $\tau_{\alpha\beta}(\alpha,\beta_m)=\tau_m(\alpha)$ напряжений равносильны условиям для функции напряжений [2]

$$g\Phi_m(\alpha,\beta)\big|_{\beta=\beta_m}=\varphi_m(\alpha);\quad \left.\frac{\partial\left[g\Phi_m(\alpha,\beta)\right]}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_m}=\psi_m(\alpha)\quad (m=1,2) \tag{5}$$

Предполагается, что $\varphi_m(\alpha)$ и $\psi_m(\alpha)$ $(m=1,2)$ удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

На линии контакта имеем следующее условия

$$g\Phi_1(\alpha,\beta)\big|_{\beta=\beta_0}=g\Phi_2(\alpha,\beta)\big|_{\beta=\beta_0};\ \left.\frac{\partial\, g\Phi_1(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_0}=\left.\frac{\partial\, g\Phi_2(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_0} \tag{6}$$

$$u_1(\alpha,\beta)\big|_{\beta=\beta_0}=u_2(\alpha,\beta)\big|_{\beta=\beta_0};\ \ v_1(\alpha,\beta)\big|_{\beta=\beta_0}=v_2(\alpha,\beta)\big|_{\beta=\beta_0} \tag{7}$$

Функции $\Phi_m(\alpha,\beta)\ \ (m=1,2)$ ищем в виде интеграла Фурье

$$g\Phi_m(\alpha,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_m(t,\beta)e^{-it\alpha}dt\quad (m=1,2) \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}f_m(t,\beta)=&A_m(t)\operatorname{ch}t(\beta_m-\beta)\cos(\beta-\beta_0)+B_m(t)\operatorname{ch}t(\beta-\beta_0)\cos(\beta_m-\beta)+\\&+C_m(t)\operatorname{sh}t(\beta_m-\beta)\sin(\beta-\beta_0)+D_m(t)\operatorname{sh}t(\beta-\beta_0)\sin(\beta_m-\beta)\end{aligned} \tag{9}$$

Из граничных условий (5) и (6), для неизвестных функций интегрирования $A_m(t),\ B_m(t),\ C_m(t)$ и $D_m(t)\ (m=1,2)$ получаем следующие выражения

$$A_m(t)\delta_m(t)=K_2(t)\operatorname{ch}t\gamma_m-\overline{\varphi}_m(t)\cos\gamma_m$$

$$B_m(t)\delta_m(t)=\overline{\varphi}_m(t)\operatorname{ch}t\gamma_m-K_2(t)\cos\gamma_m$$

$$\begin{aligned}\Delta_m(t)C_m(t)=&K_1(t)\operatorname{sh}t\gamma_m+K_2(t)\left[t\operatorname{ch}t\gamma_m+\frac{t^2+1}{2\delta_m(t)}\operatorname{sh}t\gamma_m\sin 2\gamma_m\right]+\\&+\overline{\psi}_m(t)t\sin\gamma_m-\overline{\varphi}_m(t)\left[t\cos\gamma_m+\frac{t^2+1}{2\delta_m(t)}\operatorname{sh}2t\gamma_m\sin 2\gamma_m\right]\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\Delta_m(t)D_m(t)=&-K_1(t)t\sin\gamma_m-K_2(t)\left[t\cos\gamma_m+\frac{t^2+1}{2\delta_m(t)}\operatorname{sh}2t\gamma_m\sin\gamma_m\right]-\\&-\overline{\psi}_m(t)\operatorname{sh}t\beta_m+\overline{\varphi}_m(t)\left[t\operatorname{ch}t\gamma_m+\frac{t^2+1}{2\delta_m(t)}\operatorname{sh}t\gamma_m\sin 2\gamma_m\right]\end{aligned}$$

где $K_m(t)\,(m=1,2)$ пока неизвестные функции, подлежащие определению, а $\bar{\varphi}_m(t)$ и $\bar{\psi}_m(t)$ преобразования Фурье функций $\varphi_m(\alpha)$ и $\psi_m(\alpha)\,(m=1,2)$.

$$\bar{\varphi}_m(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(\alpha)e^{it\alpha}d\alpha;\quad \bar{\psi}_m(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(\alpha)e^{it\alpha}d\alpha \tag{11}$$

$$\delta_m(t)=\operatorname{sh}^2 t\gamma_m+\sin^2\gamma_m;\quad \Delta_m(t)=\operatorname{sh}^2 t\gamma_m-t^2\sin^2\gamma_m;\quad \gamma_m=\beta_m-\beta_0$$

Удовлетворяя условиям (7), получаем следующую систему сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных функций $K_m(t)\,(m=1,2)$

$$\begin{aligned}A(t)X_1(t)+B(t)X_2(t)&=\frac{C(t)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta'(\tau)X_1(\tau)}{\theta(\tau)-\theta(t)}d\tau+N_1(t)\\ B(-t)X_1(t)+A(-t)X_2(t)&=\frac{C(t)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta'(\tau)X_2(\tau)}{\theta(\tau)-\theta(t)}d\tau+N_2(t)\end{aligned} \tag{12}$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}X_1(t)&=\Big[\big(1-a_{21}(t)\big)K_2(t)-C(t)K_1(t)+b_2(t)\Big]e^{-i\pi}\\ X_2(t)&=\Big[\big(1+a_{21}(t)\big)K_2(t)+C(t)K_1(t)-b_2(t)\Big]e^{-i\pi}\end{aligned} \tag{13}$$

$$A(t)=C_1(t)\Big[a_{11}(t)+ta_{21}(t)\Big]-\Big[a_{21}(t)+1\Big]\Big[a_{12}(t)+a_{22}(t)\Big]$$

$$B(t)=C_1(t)\Big[a_{11}(t)+ta_{21}(t)\Big]-\Big[a_{21}(t)-1\Big]\Big[a_{12}(t)+a_{22}(t)\Big] \tag{14}$$

$$\begin{aligned}N_1(t)&=2e^{-i\pi}\left[C_1(t)b_1(t)-\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1+a_{12}(t)\right)b_2(t)\right]\\ N_2(t)&=2e^{-i\pi}\left[C_1(t)b_1(t)+\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1-a_{12}(t)\right)b_2(t)\right]\end{aligned} \tag{15}$$

$$C_1(t)=\frac{h_2}{\Delta_1(t)}t\sin^2\gamma_1-\frac{t}{\Delta_2(t)}t\sin^2\gamma_2$$

$$a_{11}(t)=-t\left[\frac{h_1}{2}+h_2-1\right]-t\left(t^2+1\right)\left[\frac{h_2}{\Delta_1(t)}\sin^2\gamma_1-\frac{1}{\Delta_2(t)}t\sin^2\gamma_2\right]$$

$$a_{12}(t)=-\frac{h_2}{2\Delta_1(t)}\left(\operatorname{sh}2t\gamma_1-t\sin 2\gamma_1\right)+\frac{1}{2\Delta_2(t)}\left(\operatorname{sh}2t\gamma_2-t\sin 2\gamma_2\right)$$

$$a_{21}(t)=-\frac{h_2}{2\Delta_1(t)}\left(\operatorname{sh}2t\gamma_1+t\sin 2\gamma_1\right)-\frac{1}{2\Delta_2(t)}\left(\operatorname{sh}2t\gamma_2+t\sin 2\gamma_2\right)$$

$$a_{22}(t)=\frac{h_1}{2}+h_2-1+t^2\left[\frac{h_2}{\Delta_1(t)}\sin^2\gamma_1-\frac{1}{\Delta_2(t)}t\sin^2\gamma_2\right]$$

$$b_1(t)=\frac{h_2}{\Delta_1(t)}\left[\bar{\psi}_1(t)\left(t\,\mathrm{ch}\,t\gamma_1\sin\gamma_1-\mathrm{sh}\,t\gamma_1\cos\gamma_1\right)-\bar{\varphi}_1(t)\left(t^2+1\right)\mathrm{sh}\,t\gamma_1\sin\gamma_1\right]-$$

$$-\frac{1}{\Delta_2(t)}\left[\bar{\psi}_2(t)\left(t\,\mathrm{ch}\,t\gamma_2\sin\gamma_2-\mathrm{sh}\,t\gamma_2\cos\gamma_2\right)-\bar{\varphi}_2(t)\left(t^2+1\right)\mathrm{sh}\,t\gamma_2\sin\gamma_2\right]$$

$$b_2(t)=-\frac{h_2}{\Delta_1(t)}\left[\bar{\psi}_1(t)\,\mathrm{sh}\,t\gamma_1\sin\gamma_1-\bar{\varphi}_1(t)\left(t\,\mathrm{ch}\,t\gamma_1\sin\gamma_1+\mathrm{sh}\,t\gamma_1\cos\gamma_1\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta_2(t)}\left[\bar{\psi}_2(t)\,\mathrm{sh}\,t\gamma_2\sin\gamma_2-\bar{\varphi}_2(t)\left(t\,\mathrm{ch}\,t\gamma_2\sin\gamma_2+\mathrm{sh}\,t\gamma_2\cos\gamma_2\right)\right] \qquad (16)$$

$$\theta(t)=e^{2t\pi};\quad C(t)=-2iC_1(t);\quad h_1=\frac{1-\mu}{1+\mu};\quad h_2=\frac{\mu(1-\nu_1)}{1-\nu_2};\quad \mu=\frac{\mu_2}{\mu_1}$$

2. Решение определяющей системы уравнений.

Интегральные уравнения (12) сведем к краевой задаче Римана – Гильберта [3,4,9,10].

Введем новую кусочно – гармоническую функцию

$$R_m(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta'(\tau)X_m(\tau)}{\theta(\tau)-\theta(t)}d\tau\quad(m=1,2) \qquad (17)$$

исчезающую на бесконечности.

Если t любая точка контура, то по формуле Сохоцкого – Племеля получаем

$$R_m^+(t)-R_m^-(t)=X_m(t);\quad R_m^+(t)+R_m^-(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta'(\tau)X_m(t)}{\theta(\tau)-\theta(t)}d\tau \qquad (18)$$

Подставляя эти выражения в данную систему сингулярных уравнений (12), получаем следующие краевые задачи Римана – Гильберта

$$\begin{aligned}R_1^+(t)&=C_{11}(t)R_1^-(t)+C_{12}(t)R_2^-(t)+T_1(t)\\R_2^+(t)&=C_{21}(t)R_1^-(t)+C_{22}(t)R_2^-(t)+T_2(t)\end{aligned} \qquad (19)$$

где

$$C_{11}(t)=1+\frac{2C(t)}{\Delta_3(t)}\left[A(-t)-C(t)\right];\;\; C_{22}(t)=1+\frac{2C(t)}{\Delta_3(t)}\left[A(t)-C(-t)\right]$$

$$C_{12}(t)=-\frac{2C(t)}{\Delta_3(t)}B(t);\quad C_{21}(t)=-\frac{2C(t)}{\Delta_3(t)}B(-t)$$

$$T_1(t)=\frac{1}{\Delta_3(t)}\left[A(-t)-C(t)N_1(t)-B(t)N_2(t)\right] \tag{20}$$

$$T_2(t)=\frac{1}{\Delta_3(t)}\left[A(t)-C(t)N_2(t)-B(-t)N_1(t)\right]$$

$$\Delta_3(t)=\left[A(t)-C(t)\right]\left[A(-t)-C(t)\right]-B(t)B(-t)$$

Обозначая матрицу коэффициентов через $G(t)$, а векторы с составляющими $R_m(t)$ и $T_m(t)$ $(m=1,2)$ – через $R(t)$ и $T(t)$, краевые задачи (19) можно записать в матричной форме

$$R^+(t)=G(t)R^-(t)+T(t) \tag{21}$$

Решение уравнения (21), в общем случае, строится путем регуляризации, то есть приведением к интегральному уравнению Фредгольма.

Над обеими частями уравнения, по определенным правилам, производится операция, устраняющая сингулярные интегралы, понимаемые в смысле главного значения по Коши,

$$R^+(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta'(\tau)R^+(\tau)}{\theta(\tau)-\theta(t)}d\tau;\qquad R^-(t)=-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta'(\tau)R^-(\tau)}{\theta(\tau)-\theta(t)}d\tau \tag{22}$$

Подставляя $R^+(t)$ из уравнения (21) в первое уравнение (22), получаем:

$$G(t)R^-(t)+T(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau)-\theta(t)}\left[G(\tau)R^-(\tau)+T(\tau)\right]d\tau \tag{23}$$

Умножая эти уравнения на $\left[G(t)\right]^{-1}$ и сложив со вторым уравнением (22), получаем

$$\begin{aligned}R^-(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau)-\theta(t)}\left\{G(\tau)\left[G(t)\right]^{-1}-E\right\}R^-(\tau)d\tau=\\ =\frac{\left[G(t)\right]^{-1}}{2}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta'(\tau)T(\tau)}{\theta(\tau)-\theta(t)}d\tau-T(t)\right\}\end{aligned} \tag{24}$$

где E - единичная матрица.

Интергал в левой части (24) собственный, так как подинтегральное выражение уже не имеет особенности в точке $\tau = t$. Таким обазом, мы пришли к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Разрешимость этого уравнения обеспечена, так как на контуре элементы матрицы $G(t)$ и свободные члены, входящие в уравнение (21), удовлетворяют условию Гельдера, а определитель матрицы отличен от нуля

$$\det G(t) = \frac{t+i}{t-i} \neq 0 \text{ на контуре} \tag{25}$$

Индекс рассматриваемой краевой задачи равен -1, и однородная задача имеет лишь нулевое решение. При этом уравнение Фредгольма (24) всегда эквивалентно исходному уравнению [4,8-10].

После несложных преобразований и упрощений векторное уравнение (24) представим в виде уравнений относительно функции $K_m(t)$ $(m=1,2)$:

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \frac{\Delta_1(t)\Delta_2(t)}{\Delta(t)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[M_{11}(t,\tau)K_1(\tau)+M_{12}(t,\tau)K_2(\tau)\right]d\tau + F_1(t)\right\} \\ K_2(t) &= \frac{\Delta_1(t)\Delta_2(t)}{(t^2+1)\Delta(t)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[M_{21}(t,\tau)K_1(\tau)+M_{22}(t,\tau)K_2(\tau)\right]d\tau + F_2(t)\right\} \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$M_{11}(t,\tau) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\tau-t)\pi}\left[C_1(\tau)a_{22}(t) - C_1(t)a_{22}(\tau)\right]$$

$$M_{12}(t,\tau) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\tau-t)\pi}\left[\left(a_{22}(t)-\tau\right)C_1(t)a_{21}(\tau) - \left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)a_{21}(t)\right]$$

$$M_{21}(t,\tau) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\tau-t)\pi}\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)\left[a_{12}(\tau)-a_{12}(t)\right]$$

$$M_{22}(t,\tau) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\tau-t)\pi}\left[\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)\left(a_{11}(\tau)-a_{11}(t)\right) - (\tau-t)a_{12}(t)a_{21}(\tau)\right]$$

$$F_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}(\tau-t)\pi}\left[-\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)b_1(\tau)-(\tau-t)a_{12}(t)b_2(\tau)\right]d\tau+$$
$$+a_{11}(t)b_1(t)+\left(t^2+1\right)a_{12}(t)b_2(t)$$
$$F_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}(\tau-t)\pi}\left[(\tau-t)C_1(t)-\frac{h_1}{2}-h_2+1\right]b_2(\tau)d\tau- \qquad (27)$$
$$-a_{11}(t)b_2(t)+a_{21}(t)b_1(t)$$
$$\Delta(t)=\frac{h_1}{4}\Delta_1(t)\Delta_2(t)-\Delta_1(t)\left(h_1\operatorname{sh}^2 t\gamma_2-h_2+1\right)+$$
$$+h_2\Delta_2(t)\left(h_1\operatorname{sh}^2 t\gamma_1-h_2+1\right)-h_2\left[\operatorname{sh}^2 t(\gamma_1-\gamma_2)-t^2\sin^2(\gamma_1-\gamma_2)\right]$$

или

$$Y_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[M_{11}^*(t,\tau)Y_1(\tau)+M_{12}^*(t,\tau)Y_2(\tau)\right]d\tau+F_1(t)$$
$$Y_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[M_{21}^*(t,\tau)Y_1(\tau)+M_{22}^*(t,\tau)Y_2(\tau)\right]d\tau+F_2(t) \qquad (28)$$

где

$$Y_1(t)=\frac{\Delta(t)K_1(t)}{\Delta_1(t)\Delta_2(t)};\qquad Y_2(t)=\frac{\left(t^2+1\right)\Delta(t)K_2(t)}{\Delta_1(t)\Delta_2(t)}$$
$$M_{11}^*(t,\tau)=\frac{\Delta_1(\tau)\Delta_2(\tau)}{\Delta(\tau)}M_{11}(t,\tau);\qquad M_{12}^*(t,\tau)=\frac{\Delta_1(\tau)\Delta_2(\tau)}{\left(t^2+1\right)\Delta(\tau)}M_{12}(t,\tau) \qquad (29)$$
$$M_{21}^*(t,\tau)=\frac{\Delta_1(\tau)\Delta_2(\tau)}{\Delta(\tau)}M_{21}(t,\tau);\qquad M_{22}^*(t,\tau)=\frac{\Delta_1(\tau)\Delta_2(\tau)}{\left(t^2+1\right)\Delta(\tau)}M_{22}(t,\tau)$$

Учитывая найденные значения для конкретных напряжений $\tau_{\alpha\beta}^{(m)}(\alpha,\beta)$ и $\sigma_\beta^{(m)}(\alpha,\beta)\quad(m=1,2)$ из (3), получим:

$$\tau_{\alpha\beta}^{(m)}(\alpha,\beta_0)=\frac{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_0}{a}\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\Delta_1(t)\Delta_2(t)}{\Delta(t)}Y_1(t)e^{-it\alpha}dt$$
$$\sigma_\beta^{(m)}(\alpha,\beta_0)=-\frac{i}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta_1(t)\Delta_2(t)}{\Delta(t)}\left[\sin\beta_0\,Y_1(t)-\right. \qquad (30)$$
$$\left.-\left(\cos\beta_0+\frac{t^2\operatorname{ch}\alpha-it\operatorname{sh}\alpha}{t^2+1}\right)Y_2(t)\right]e^{-it\alpha}dt$$

Любое напряжение из (30), согласно (8,10,23,25) и (1), выражается несобственным интегралом вида

$$\tau_{xy}\left(x,y\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\tau}\left(x,y,t\right)}{\Delta\left(t\right)}\left(1+\frac{y}{a}\right)^{-1-it}\left(1-\frac{y}{a}\right)^{-1+it}dt \qquad (31)$$

которое можно вычислить приближенно с помощью различных численных методов, где $\overline{\tau}\left(x,y,t\right)$ регулярная функция.

Для исследования поведения напряжений в окрестности концов участка контакта $y=\pm a\ \ \left(\alpha=\pm\infty\right)$ вычислим интеграл из (31) методом контурного интергрирования. Для этого переходим в комплексную плоскость $z=x+iy$ и дополняем контур интегрирования по вещественной оси из (31) полуокружностью радиуса R с центром в начале координат, в правой полуплоскости при $y>0\ \ (a>0)$ или в левой полуплоскости при $y<0\ \ (a<0)$. Далее, имея ввиду, что подынтегральное выражение имеет полюсы первого порядка в корнях $\Delta(t)=0$, по известной лемме Жордана, как в [6-10], удается представить интеграл (31) в виде следующего бесконечного ряда:

$$\tau_{xy}\left(x,y\right)=2\pi i\left\{\frac{\overline{\tau}\left(x,y,t_1\right)}{\Delta'\left(t_1\right)}\left(1+\frac{y}{a}\right)^{-1-it_1}\left(1-\frac{y}{a}\right)^{-1+it_1}+\sum_{k=2,3,\ldots}\left[\,f\left(x,y,t_k\right),t_k\right]\right\} \qquad (32)$$

Здесь $f\left(x,y,t_k\right)$ – подынтегральная функция (31), а $t_k=\xi_k-i\eta_k$ корни трансцендентного уравнения $\Delta\left(t\right)=0$, которые расположены в порядке возрастания положительных значений η_k.

Очевидно, что характер напряженного состояния около края $y=a\ \ \left(\alpha=\infty\right)$ определяется величиной мнимой части первого корня $t_1=\xi_1-i\eta_1$. Если $\eta_1>1$ имеем нулевое напряженное состояние, если $\eta_1<1$ имеет место явление концентрации напряжений. В случае же $\eta_1=1$ напряжения на краях поверхности контакта конечны и, в общем случае, отличны от нуля.

Трансцендентное уравнение $\Delta\left(t\right)=0$ зависит от четырех параметров γ_1 и γ_2 и комбинации характеристик упругих материалов h_1 и h_2. Из $\Delta\left(t\right)=0$ можно найти границу раздела областей конечных и бесконечных напряжений на крае поверхности контакта. Уравнение предельной поверхности, являющейся границей области нулевого напряженного состояния на крае поверхности контакта:

$$h_2\left[(\gamma_1-\gamma_2)\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\sin(\gamma_1-\gamma_2)\right]\sin(\gamma_1-\gamma_2)+$$
$$+h_2\left(h_1\sin^2\gamma_1+h_2-1\right)(\gamma_2\cos\gamma_2-\sin\gamma_2)\sin\gamma_2- \qquad (33)$$
$$-\left(h_1\sin^2\gamma_2+h_2-1\right)(\gamma_1\cos\gamma_1-\sin\gamma_1)\sin\gamma_1=0$$

или

$$h_2\left[(\beta_1-\beta_2)\cos(\beta_1-\beta_2)-\sin(\beta_1-\beta_2)\right]\sin(\beta_1-\beta_2)+$$
$$+h_2\left(h_1\sin^2(\beta_1-\beta_0)+h_2-1\right)\left[(\beta_2-\beta_0)\cos(\beta_2-\beta_0)-\sin(\beta_2-\beta_0)\right]\sin(\beta_2-\beta_0)-$$
$$-\left(h_1\sin^2(\beta_2-\beta_0)+h_2-1\right)\left[(\beta_1-\beta_0)\cos(\beta_1-\beta_0)-\sin(\beta_1-\beta_0)\right]\sin(\beta_1-\beta_0)=0$$

3. Частные случаи.

1. При однородном случае $(h_1=0,\ \ h_2=1)$ из уравнения (33) получим

$$\sin(\beta_1-\beta_2)\left[(\beta_1-\beta_2)\cos(\beta_1-\beta_2)-\sin(\beta_1-\beta_2)\right]=0$$

для которого имеем следующие решения:

$$\beta_1-\beta_2=\pi k\quad(k=0,1,2)$$

а) $k=0$ - не имеет смысла.

б) $k=1$ - соответствует однородной плоскости, ослабленной отверстием, контур которого образован дугами окружностей с условием $\beta_1-\beta_2=\pi$.

в) $k=2$ соответствует случаю однородной плоскости с конечной трещиной на интервале $(-a,a)$ оси Oy.

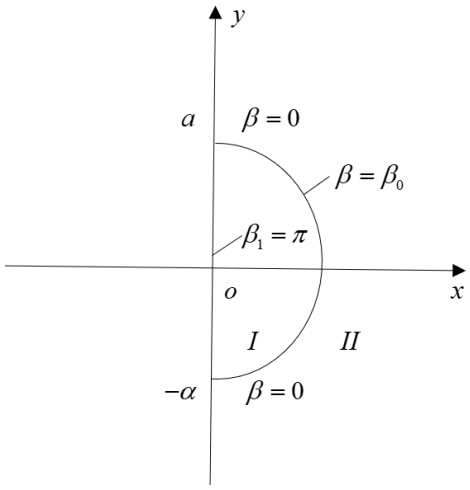
2. В случае составной полуплоскости из уравнения (33), при частных значениях $\beta_1=\pi,\ \beta_2=0$, для определения β_0 приходим к следующему трансцендентному уравнению:

$$\sin\beta_0\left(h_1\sin^2\beta_0+h_2-1\right)\left[(h_2\beta_0-\beta_0+\pi)\cos\beta_0+(1-h_2)\sin\beta_0\right]=0 \qquad (34)$$

Решая уравнение (34), получим:

$$\beta_0=\pi k\quad(k=0,1);\quad \beta_0=\frac{1}{2}\arccos\left[\frac{2(h_2-1)}{h_1}+1\right];\quad \operatorname{tg}\beta_0=\beta_0+\frac{\pi}{h_2-1}$$

Отметим, что этот случай соответствует контактной задаче для составной полуплоскости с сегментообразной подушкой из другого материала, вложенной в край полуплоскости (фиг. 2).



Фиг. 2

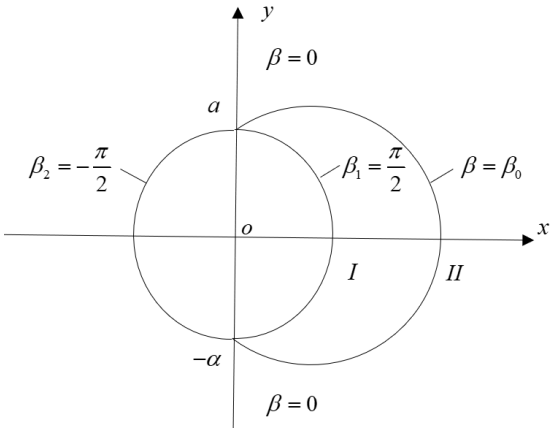
3. Для составной полуплоскости с круговым отверстием, т.е. при частных значениях $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\beta_2 = -\frac{\pi}{2}$, для определения β_0 из (33) получим следующее уравнение

$$\cos\beta_0\left(h_1\cos^2\beta_0 + h_2 - 1\right)\left[\left(h_2 - 1\right)\cos\beta_0 + \left(\left(h_2 - 1\right)\beta_0 + \left(h_2 + 1\right)\frac{\pi}{2}\sin\beta_0\right)\right] = 0$$

с решениями:

$$\beta_0 = \pm\frac{\pi}{2}; \quad \beta_0 = \frac{1}{2}\arccos\left[\frac{2\left(1-h_2\right)}{h_1} + 1\right]; \quad \operatorname{ctg}\beta_0 = \beta_0 + \frac{\pi\left(h_2+1\right)}{2\left(h_2-1\right)}$$

Следует отметить, что рассмотренный случай соответствует контактной задаче для составной плоскости, ослабленной круговым отверстием и усиленной, с одной стороны отверстия, луночной подушкой из другого материала (фиг. 3).



Фиг. 3

4. Заключение.

С помощью видоизменной системы биполярных координат и аппарата интеграла Фурье, дано решение плоской задачи для составной плоскости, ослабленной отверстием и усиленной луночными подушками из другого материала. На границе отверстия заданы нормальные и касательные напряжения, а на линии сопряжения около края соприкасания подушек с плоскостью имеют место условия полного контакта материалов. При удовлетворении граничным и контактным условиям получена определяющая система сингулярных интегральных уравнений. Решение этих уравнений, в конечном счете, сводится к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Получено характеристическое уравнение, по корням которого определяется напряженное состояние около края соприкасания подушки с плоскостью. В зависимости от геометрических и физических параметров найдены области конечных и бесконечных напряжений и граница раздела между этими областями.

Отметим, что результаты рассмотренной здесь задачи могут быть использованы при оценке расчетов прочности туннельных сооружений, встречающихся в различных областях строительства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. ГТТИ, М. 1950.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. -во, Наука, Л. 1967, 402 ст.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
4. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений М. Наука, 1970.
5. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М., Наука, 1982, 344 ст.
6. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Изд. АН Арм ССР, Ереван, 1987, ст. 338.
7. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи взаимодействия сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван, Гитутюн, 2014, 322 ст.
8. Чибрикова Л.И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций. Уч. зап. Казань. ун-та, т.116. кн.4, 1956.
9. Боджи Д.В. Плоская статическая задача о нагруженной трещине, заканчивающейся на границе раздела двух материалов, имеющих произвольные углы раствора. ПМ. т.38. сер. Е. №2, 1971.
10. Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 29, №1, 1976. ст.51-66.
11. Арутюнян Л.А., Едоян В.А. Плоская задача теории упругости для внешности круговой луночки. Мат. V межд. Конф. Цахкадзор, Арм. 2017. Ст. 31-32.

12. Алексанян Р.К., Арутюнян Л.А., Седракян А.М. Плоская задача для внешности кругового сегмента. Slovak inter. Scientific journal H 80 (2024) p. 34-38.
13. Арутюнян Л.А., Закарян В.Г. Плоская задача для составной плоскости с конечным отверстием. Мат. IX межд. конф. 2025, Цахкадзор, Арм., см. 31-35.
14. Агаян К.Л., Арутюнян Л.А., Закарян В.Г. Контактная задача для составной плоскости, ослабленной круговым отверстием и усиленной двумя упругими луночными накладками. Изв. НАН Армении. Механика, 2025, т. 78, №3-4, сс. 3-16. DOI: 10.54503/0002-3051-2025.78.3-4-3

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович–д.ф.м.н., проф., в.н.с., Институт Механики
Тел.: (37491) 485566, **E–mail:** karo.aghayan@gmail.com

Арутюнян Левон Арсенович–к.ф.м.н., с.н.с., Институт Механики
Тел.: (37499) 675747, **E–mail:** arutyunyanlevon@gmail.com

Закарян Ваге Гришаевич–к.ф.м.н., ученый секретарь, Институт Механики
Тел.: (37477) 789264, **E–mail:** vahe-zaqaryan@mail.ru

Поступила в редакцию 2 августа 2026г.