ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա Механика

УДК 531.8 DOI: 10.54503/0002-3051-2026.79.3-5

ОБЛАСТИ УПРАВЛЯЕМОСТИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ ПО НЕГЛАДКОМУ ФУНКЦИОНАЛУ

Аветисян В.В.

Ключевые слова: синтез оптимального управления, негладкий функционал, область управляемости.

Ավետիսյան Վ.Վ.

Ղեկավարելիության տիրույթները ոչ ողորկ ֆունկցիոնալով և ֆիքսված ժամանակով երկրորդ կարգի համակարգի օպտիմալ ղեկավարման խնդրում

Հիմնաբառեր: օպտիմալ ղեկավարման սինթեզ, ոչ ողորկ ֆունկցիոնալ, ղեկավարելիության տիրույթ

Դիտարկվում է ֆիքսված ժամանակով երկրորդ կարգի գծային համակարգի օպտիմալ ղեկավարման սինթեզի խնդիրը՝ ըստ որակի ոչ ողորկ ինտեգրալային չափանիշի, որը պարունակում է ղեկավարման և արագության տարբերության մոդուլը: Պոնտրյագինի մաքսիմումի սկզբունքի հիման վրա որոշվել է հետադարձ կապի տեսքով օպտիմալ ղեկավարումը, որը համակարգը սկզբնական վիճակից բերում է դադարի վիճակի: Սկզբնական վիճակների հարթության վրա կառուցվել է ղեկավարելիության տիրույթը: Ցույց է տրվել, որ դրա ներքին կետերի համար իրականացվում են երկու փոխանցումով օպտիմալ ղեկավարման կառուցվածքներ, իսկ եզրային կետերի համար՝ մեկ փոխանցումով կամ առանց դրանց: Համապատասխան սկզբնական վիճակների համար գտնվել են օպտիմալ փուլային հետագծերը: Թվային մոդելավորմամբ հաստատվել է ղեկավարելիության տիրույթի ձևի և դիրքի ստացված կախվածությունը վերջնական ժամանակից, ինչպես նաև փուլային փոխանցման կորերից մեկի կախվածությունը վերջնական ժամանակից և սկզբնական արագությունից:

Avetisyan V.V.

Controllability Domains in the Problem of Fixed-Time Optimal Control of a Second-Order System under a Non-Smooth Functional

Keywords: optimal control synthesis, non-smooth functional, controllability domain

The paper considers the problem of optimal control synthesis for a second-order linear system with a fixed time using a non-smooth integral performance criterion containing the absolute difference between control and velocity. Based on Pontryagin's maximum principle, the optimal feedback control that drives the system from the initial state to the state of rest is determined. The controllability domain is constructed on the plane of initial states. It is shown that optimal control structures with two switchings are implemented for its interior points, while structures with one or no switchings occur for the boundary ones. The optimal phase trajectories are found for the corresponding initial states. Numerical simulation confirms the established dependence of the shape and location of the controllability domain on the final time, as well as one of the phase switching curves on the final time and the initial velocity.

Рассматривается задача синтеза оптимального управления линейной системой второго порядка с фиксированным временем по негладкому интегральному критерию качества, содержащему модуль разности управления и скорости. На основе принципа максимума Понтрягина определено оптимальное управление в форме обратной связи, переводящее систему из начального состояния в состояние покоя. На плоскости начальных состояний построена область управляемости. Показано, что для её внутренних точек реализуются структуры оптимального управления с двумя переключениями, а для граничных – с одним или без них. Для соответствующих начальных состояний найдены оптимальные фазовые траектории. Численным моделированием подтверждена установленная зависимость формы и расположения области управля-

емости от конечного времени, а также одной из фазовых кривых переключения – от конечного времени и начальной скорости.

Введение. Задачи оптимального управления динамическими системами второго порядка составляют фундамент современной теории управления [1]. Классические постановки таких задач, как правило, ориентированы на критерии максимального быстродействия или минимизации гладких квадратичных функционалов качества [2], чему также посвящено множество современных исследований [3,4]. Однако в реальных инженерных приложениях технологические требования часто диктуют необходимость использования негладких критериев, содержащих модуль управляющего воздействия или фазовых переменных [5]. Модели линейных систем второго порядка широко применяются в прикладных задачах механики при описании одномерного движения объектов в средах с сопротивлением [6], а также в динамике исполнительных механизмов робототехнических систем [7, 8]. Хотя для подобных систем в средах с сопротивлением задачи быстродействия подробно изучены в [9, 10], фиксация времени процесса совместно с минимизацией негладкого функционала существенно усложняет структуру решения задачи.

Рассматриваемый в данной работе минимизируемый функционал обладает свойством универсальности. В зависимости от конкретного технического приложения он может определять различные механические и электромеханические характеристики, например импульс вращающего момента, создаваемого электродвигателем [11, 12]. Присутствие модуля в подынтегральном выражении делает исследуемый функционал недифференцируемым. Это исключает возможность применения классических гладких методов оптимизации и требует привлечения математического аппарата принципа максимума [2]. В связи с этим актуальной становится задача перехода от программного управления, заданного как функция времени, к синтезу оптимального управления в форме обратной связи. В настоящее время в данной тематике доминируют численные методы поиска оптимальных траекторий для конкретных начальных условий [13]. Однако, несмотря на глубокую проработку общих свойств аппроксимации и оценивания областей управляемости для линейных систем [14,15], задача аналитического описания их точной геометрии и «предельных конструкций» (границ разделения режимов с различным числом переключений) при негладких критериях остается решенной лишь для отдельных частных случаев. Это обуславливает высокую актуальность разработки конструктивных аналитических алгоритмов синтеза управления для таких функционалов.

Целью данной работы является разработка аналитических алгоритмов синтеза управления в форме обратной связи и геометрическое описание и анализ областей управляемости для линейных систем второго порядка с фиксированным временем по негладкому интегральному критерию качества. В рамках этого подхода построена область управляемости, внутри которой реализуется структура управления с двумя переключениями, а также исследована геометрия ее границ, где управление вырождается в структуры с одним переключением или без него.

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую систему второго порядка

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u - y \tag{1.1}$$

с ограничением на управление

$$|u(t)| \le 1. \tag{1.2}$$

Здесь фазовые координаты x, y имеют смысл безразмерных перемещения и ско-

рости соответственно.

Начальное состояние системы при $t = 0$ задается в виде

$$x(0) = x_0, \;\; y(0) = y_0 . \tag{1.3}$$

Требуется построить управление $u(t)$, удовлетворяющее ограничению (1.2), переводящее систему (1.1) из произвольного начального состояния (1.3) в начало координат за фиксированное время T

$$x(T) = 0, \;\; y(T) = 0 \tag{1.4}$$

и минимизирующее функционал

$$J = \int_0^T \left| u(t) - y(t) \right| dt . \tag{1.5}$$

Наряду с построением программного управления требуется определить область управляемости – множество всех начальных точек (x_0, y_0), из которых систему можно перевести в начало координат ровно за время T с минимизацией функционала (1.5).

Отметим, что система уравнений (1.1) в безразмерной форме в общем случае описывает как динамику одномерного движения объекта в среде с сопротивлением, так и процессы в электроприводе с учетом противо -ЭДС. При этом функционал (1.5), в зависимости от конкретного технического приложения, может характеризовать различные механические или электромеханические величины, например импульс вращающего момента, создаваемого электродвигателем [11].

2. Определение возможных структур оптимального управления. Для решения задачи (1.1) – (1.5) применим принцип максимума Понтрягина [2]. Составим функцию Гамильтона

$$H = -\left| u - y \right| + p_x y + p_y (u - y) , \tag{2.1}$$

где p_x, p_y - сопряженные переменные. Запишем систему сопряженных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\partial H / \partial x = 0, \\ \dot{p}_y &= -\partial H / \partial y = -\operatorname{sign}(u - y) - p_x + p_y . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Из первого уравнения (2.2) следует, что $p_x = const$. Обозначим $\sigma = \operatorname{sign}(u - y)$, где $\sigma \in \{1, 0, -1\}$.Тогда второе уравнение принимает вид

$$\dot{p}_y = -\sigma - p_x + p_y . \tag{2.3}$$

Общее решение этого линейного уравнения имеет вид

$$p_y(t) = \sigma + p_x + Ce^t , \tag{2.4}$$

где C - константа интегрирования.

Согласно принципу максимума, оптимальное управление $u^*(t)$ в каждый момент времени должно максимизировать часть функции Гамильтона, зависящую от u:

$$h(u) = -\left| u - y \right| + p_y u \qquad \text{при} \quad u \in [-1, 1] .$$

Исследование функции $h(u)$ показывает, что структура оптимального управле-

ния определяется сопряженной переменной $p_y(t)$

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & p_y(t) > 1, \\ y(t), & |p_y(t)| \le 1, \\ -1, & p_y(t) < -1. \end{cases} \tag{2.5}$$

В зависимости от значения $\sigma = \text{sign}(u - y)$ решение для $p_y(t)$ принимает следующий вид

1. при $\sigma = 1$ $(u > y)$:

$$\dot{p}_y = -1 - p_x + p_y, \quad p_y(t) = p_x + 1 + C_1 e^t \tag{2.6}$$

2. при $\sigma = 0$ $(u = y)$:

$$\dot{p}_y = -p_x + p_y, \quad p_y(t) = p_x + C_2 e^t, \tag{2.7}$$

3. при $\sigma = -1$ $(u > y)$:

$$\dot{p}_y = 1 - p_x + p_y, \quad p_y(t) = p_x - 1 + C_3 e^t. \tag{2.8}$$

Функция $p_y(t)$ на интервале $[0, T]$ является непрерывной и кусочно-экспоненциальной. Согласно соотношению (2.5), именно при достижении траекторией $p_y(t)$ пороговых уровней 1 и -1 происходит смена режима оптимального управления $u^*(t)$. Это приводит к скачкообразному изменению параметра $\sigma = \text{sign}(u - y)$ и, как следствие, к переключению структуры самого сопряженного уравнения (2.2). Поскольку каждый из возможных экспоненциальных участков (2.6)–(2.8) строго монотонен, функция $p_y(t)$ может пересечь границы полосы $|p_y(t)| \le 1$ не более одного раза на каждом участке. Более того, скачкообразное изменение параметра σ в момент пересечения границы сохраняет монотонность функции $p_y(t)$, что исключает ее возврат к ранее пройденному уровню. В результате траектория $p_y(t)$ пересекает уровни 1 и -1 на интервале $[0, T]$ не более двух раз. Таким образом, оптимальное управление $u^*(t)$ содержит не более двух переключений.

Установленное ограничение на число переключений позволяет классифицировать все допустимые структуры оптимального управления. Они могут состоять из различных последовательных сочетаний одного, двух или трех базовых режимов $u = 1$, $u = y$ и $u = -1$. Важным условием отбора таких структур является невозможность использования режима $u = y(t)$ в качестве завершающего участка. В этом режиме $\dot{y} = u - y = 0$, что означает движение с постоянной скоростью. Выполнение терминального условия $y(T) = 0$ в данном случае возможно лишь при $y(t) \equiv 0$ на всем конечном участке. Это противоречит общему случаю задачи перевода системы в начало координат из произвольного начального состояния.

С учетом этого, все допустимые структуры оптимального управления исчерпываются следующими классами.

1. Структуры без переключений:

$$\{1\},\ \{-1\}. \tag{2.9}$$

2. Структуры с одним переключением:

$$\{1,-1\},\ \{-1,1\},\ \{y,1\},\ \{y,-1\}. \tag{2.10}$$

Здесь режимы $\{y,1\}$ и $\{y,-1\}$ реализуются только при $|y|\le 1$. Следовательно, в качестве начального участка они допустимы только при $|y_0|\le 1$.

3. Структуры с двумя переключениями:

$$\{1,y,-1\},\ \{-1,y,1\}. \tag{2.11}$$

Структуры (2.11) описывают процессы, при которых система сначала разгоняется либо тормозится на предельном управлении, затем переходит в режим движения с постоянной скоростью ($u=y$) завершает движение переходом на противоположное граничное управление для выхода в начало координат.

Выявленные структуры (2.9)–(2.11) являются основой для построения в плоскости (x_0,y_0) областей управляемости, из которых возможен перевод системы (1.1) в начало координат ровно за время T.

3. Фазовые траектории системы при различных управлениях. Найдем решения системы (1.1) с начальными условиями (1.3) для управлений $u=\pm 1$ и $u=y$.

1. Режимы $u=1$ и $u=-1$. Соответствующие решения имеют вид:

при $u=1$

$$x(t)=t+(1-y_0)(e^{-t}-1)+x_0,\qquad y(t)=1-(1-y_0)e^{-t}, \tag{3.1}$$

при $u=-1$

$$x(t)=-t-(1+y_0)(e^{-t}-1)+x_0,\qquad y(t)=-1+(1+y_0)e^{-t}. \tag{3.2}$$

Исключив время t, получим уравнения фазовых траекторий на плоскости (x,y):

для $u=1$

$$x=-y+\ln\left[(1-y_0)/(1-y)\right]+x_0+y_0, \tag{3.3}$$

для $u=-1$

$$x=-y+\ln\left[(1+y)/(1+y_0)\right]+x_0+y_0. \tag{3.4}$$

Анализ уравнений (3.3) и (3.4) показывает, что в режиме $u=1$ ордината y асимптотически приближается к 1. При $y_0<1$ система разгоняется снизу, а при $y_0>1$ – замедляется сверху. Аналогично, в режиме $u=-1$ скорость y стремится к -1. При $y_0<-1$ она увеличивается снизу, а при $y_0>-1$ – уменьшается сверху.

Семейства фазовых траекторий (3.3) и (3.4) центрально симметричны. Они переходят друг в друга при взаимной замене знаков (x,y,x_0,y_0,u) на

$(-x,-y,-x_0,-y_0,-u)$. Выделим траектории, проходящие через начало координат $(0,0)$. Для этого в уравнениях (3.3) и (3.4) положим конечные значения $x=0$, $y=0$ и перейдем к текущим переменным, отождествив (x_0,y_0) с (x,y). Участки траекторий, обеспечивающие попадание в нулевое состояние, обозначим L^- и L^+:

$$L^- = \{(x,y):\ x=-y+\ln(1+y),\ y\ge 0\}, \tag{3.5}$$

$$L^+ = \{(x,y):\ x=-y-\ln(1-y),\ y\le 0\}. \tag{3.6}$$

Объединение этих кривых образует линию $L=L^-\cup L^+$, описываемую уравнением

$$L=\{(x,y):\ x=-y+\operatorname{sign}(y)\ln(1+|y|)\}. \tag{3.7}$$

Линия L разделяет фазовую плоскость на области, определяющие структуру оптимального управления. Если $(x_0,y_0)\in L^-$ или $(x_0,y_0)\in L^+$, перевод в начало координат осуществляется без переключений (управлениями $\{-1\}$ или $\{1\}$ соответственно). Если же $(x_0,y_0)\notin L$, для достижения цели требуется как минимум одно переключение управления.

2. Режим $u=y$. При таком управлении система (1.1) принимает вид $\dot{x}=y$, $\dot{y}=0$. Интегрирование с начальными условиями (1.3) дает

$$x(t)=y_0t+x_0,\qquad y(t)\equiv y_0. \tag{3.8}$$

С учетом ограничения $|u|\le 1$ фазовые траектории представляют собой семейство горизонтальных прямых $y=y_0$, в полосе $|y|\le 1$. При $0<y_0\le 1$ движение происходит в положительном направлении оси Ox (x возрастает); при $-1\le y_0<0$ - в отрицательном направлении оси Ox (x убывает); при $y_0=0$, система остается в состоянии покоя.

Обозначим через D^- область фазовой плоскости, расположенную не правее кривой L^- (3.5) и левее кривой L^+ (3.6). Математически данное множество, включающее в себя точки границы L^-, описывается системой неравенств

$$D^- = \{(x,y):\ x\le -y+\ln(1+y),\ y\ge 0;\ x<-y-\ln(1-y),\ y<0\}. \tag{3.9}$$

Выбор оптимальной структуры управления в D^- зависит от значения y_0.

При $y_0>1$ реализуются структуры $\{-1\}$ или $\{1,-1\}$. Если $(x_0,y_0)\in L^-$, перевод системы в начало координат осуществляется при $u=-1$ по траектории (3.6). Если $(x_0,y_0)\notin L^-$, движение системы начинается при $u=1$ по траектории (3.3) до пересечения с кривой L^- (3.6) , после чего управление переключается на $u=-1$.

При $y_0=1$ реализуется структура $\{y,-1\}$. В режиме $u=y=y_0=1$ система

движется горизонтально до пересечения с линией L^-, где управление переключается на $u=-1$.

При $0<y_0<1$ возможны структуры $\{1,-1\}$, $\{y,-1\}$ или $\{1,y,-1\}$. В последнем случае после разгона ($u=1$) происходит переключение на режим $u=y$. В нем система также движется горизонтально до встречи с кривой L^-, после чего переходит на управление $u=-1$.

При $y_0=0$ применяются структуры $\{1,-1\}$ или $\{1,y,-1\}$ по аналогичному алгоритму.

Свойство центральной симметрии позволяет распространить полученные выводы на область D^+, расположенную правее кривой L^- (3.5) и не левее кривой L^+ (3.6), включая саму ветвь L^+:

$$D^+=\{(x,y): x>-y+\ln(1+y),\ y\ge 0;\quad x\ge -y-\ln(1-y),\ y<0\}. \qquad (3.10)$$

Структурам $\{1,-1\}$, $\{y,-1\}$ и $\{1,y,-1\}$, используемым в области D^-, в D^+ соответствуют структуры $\{-1,1\}$, $\{y,1\}$ и $\{-1,y,1\}$.При этом перевод системы в начало координат для всех начальных состояний из D^+ гарантированно завершается в режиме $u=1$.

4. Анализ управления с двумя переключениями и построение кривых переключения. Пусть $(x_0,y_0)\in D^-$ и $0\le y_0<1$. Рассмотрим трехэтапную структуру оптимального управления $\{1,y,-1\}$:

$$u^*(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,t_1),\\ y(t), & t\in[t_1,t_2),\\ -1, & t\in[t_2,T].\end{cases} \qquad (4.1)$$

Точки на фазовой траектории, соответствующие моментам времени t_1 и t_2, обозначим как (x_1,y_1) и (x_2,y_2), где $0\le y_0<y_1<1$. Интегрируем систему (1.1) при управлении (4.1) и краевых условиях (1.3), (1.4) на фиксированном интервале $[0,T]$.

На этапе разгона ($t\in[0,t_1)$) при $u=1$ система переходит из начального состояния (x_0,y_0) по траектории (3.3). Момент первого переключения t_1 находится из соотношения $y_1=y(t_1)$, следующего из (3.1)

$$t_1=\ln\left[(1-y_0)/(1-y_1)\right], \qquad (4.2)$$

а абсцисса точки (x_1,y_1) определяется подстановкой t_1 и y_1 в уравнение (3.3)

$$x_1=-y_1+\ln\left[(1-y_0)/(1-y_1)\right]+x_0+y_0. \qquad (4.3)$$

На этапе $t\in[t_1,t_2)$ при $u=y$ выполняется условие $\dot y=0$, поэтому ордината

фиксируется на постоянном уровне $y = y_1$, В силу асимптотического характера разгона (3.1) она строго удовлетворяет условию $y_1 < 1$. Система движется из точки (x_1, y_1) по траектории (3.8). С учетом смещения начального момента времени уравнения принимают вид

$$x(t) = y_1(t - t_1) + x_1,\ y(t) \equiv y_1. \tag{4.4}$$

В момент второго переключения t_2 фазовые координаты принимают значения

$$x_2 = y_1(t_2 - t_1) + x_1,\quad y_2 = y_1. \tag{4.5}$$

На этапе торможения ($t \in [t_2, T]$) движение происходит при $u = -1$. Используя решение (3.2) с начальными условиями (4.5) в момент t_2, получаем

$$x(t) = -(t - t_2) - (1 + y_1)(e^{-(t-t_2)} - 1) + x_2,\quad y(t) = -1 + (1 + y_1)e^{-(t-t_2)}. \tag{4.6}$$

Из второго уравнения (4.6) при терминальном условии $y(T) = 0$, находим длительность торможения

$$T - t_2 = \ln(1 + y_1). \tag{4.7}$$

Подставляя (4.7) в первое уравнение (4.6) при $t = T$ и используя условие $x(T) = 0$, находим связь координат в точке второго переключения (x_2, y_1)

$$x_2 = -y_1 + \ln(1 + y_1). \tag{4.8}$$

Исключив x_2 из системы (4.5) и (4.8) с учетом выражений для t_1 (4.2) и t_2 (4.8), получим зависимость между фазовыми координатами в первой точке переключения

$$x_1 = -y_1 + \ln(1 + y_1) - y_1\left\{T - \ln\left[\frac{(1 - y_0)(1 + y_1)}{1 - y_1}\right]\right\}. \tag{4.9}$$

Приняв координаты точки (x_1, y_1) за текущие переменные (x, y), зададим ветвь кривой первого переключения K^- как геометрическое место точек, образующих множество

$$K^- = \left\{(x, y):\ x = -y + \ln(1 + y) - y\left\{T - \ln\left[\frac{(1 - y_0)(1 + y)}{1 - y}\right]\right\}\right\}. \tag{4.10}$$

Здесь, как отмечено выше, $0 \le y_0 < y < 1$.

На фазовой плоскости (x, y) для фиксированных значений y_0 и T кривая K^- в пределе берет начало в точке $(0, 0)$ и заканчивается в точке стыковки (x^*, y^*) с кривой L^- (3.5). Ее координаты определяются выражениями

$$x^* = -y^* + \ln(1 + y^*),\qquad y^* = \frac{e^T - (1 - y_0)}{e^T + (1 - y_0)}. \tag{4.11}$$

Обусловленный структурой управления $\{1, y, -1\}$, диапазон изменения

ординаты кривой K^- задается неравенством

$$0 < y \le y^* < 1. \tag{4.12}$$

В силу центральной симметрии задачи для начальных состояний $(x_0, y_0) \in D^+$ при $-1 < y_0 \le 0$ и трехэтапной структуры оптимального управлени $\{-1, y, 1\}$ вывод уравнения кривой первого переключения K^+ в области D^+ аналогичен процедуре для K^-:

$$K^+ = \left\{ (x,y):\ x = -y - \ln(1-y) - y\left\{ T - \ln\left[\frac{(1-y_0)(1-y)}{1+y} \right] \right\} \right\}. \tag{4.13}$$

Кривая K^+ также берет начало в точке $(0,0)$ и заканчивается в точке стыковки (x^*, y^*) с кривой L^+ (3.6)

$$x^* = y^* - \ln(1-y^*),\ \ y^* = -\frac{e^T - (1-y_0)}{e^T + (1-y_0)}. \tag{4.14}$$

При этом действуют ограничения

$$0 < y \le y^* < 1. \tag{4.15}$$

Объединение ветвей (4.10) и (4.13) формирует единую кривую переключения $K = K^- \cup K^+$:

$$K = \left\{ (x,y): x = -y + sgn(y)\ln(1+|y|) - y\left\{ T - \ln\left[\frac{(1-y_0)(1+|y|)}{1-|y|} \right] \right\} \right\}. \tag{4.16}$$

Для фиксированных параметров y_0 и T множество (4.16) определяет линию переключения на фазовой плоскости. Область ее существования ограничена условием строгой положительности длительности второго этапа управления ($t_2 - t_1 > 0$). Разрешая это неравенство, находим диапазон допустимых значений фазовой ординаты y: $|y| < |y^*| < 1$. Данное ограничение служит необходимым условием разрешимости задачи перевода системы в начало координат за заданное время T, а также обеспечивает положительность аргументов логарифмов.

Таким образом, кривая первого переключения K является динамической границей, форма и протяженность которой определяются параметрами y_0 и T. Увеличение времени T удлиняет кривую и смещает точку стыковки (x^*, y^*) к предельным уровням $|y| = 1$, что расширяет область управляемости системы. Начальное значение ординаты y_0 характеризует степень отклонения кривой K от базовой линии L, задавая смещение линии переключения для конкретных начальных условий.

Переходя к текущим координатам $x = x_2$, $y = y_1$ в (4.8), получаем уравнение

кривой второго переключения L^-, совпадающей с кривой (3.5) из разделе 3.

5. Синтез областей управляемости при различных структурах управления за фиксированное время. Определим множества начальных состояний $(x_0, y_0) \in D^-$, из которых реализуем перевод системы (1.1) в начало координат за фиксированное время T посредством оптимальных структур $\{-1\}$, $\{1,-1\}$, $\{y,-1\}$ и $\{1,y,-1\}$.

Рассмотрим структуру $\{1,y,-1\}$ (4.1), реализуемую при условии $0 \le y_0 < 1$. Для нахождения аналитической связи между начальным (1.3) и конечным (1.4) состояниями исключим промежуточные переменные x_1, x_2 из уравнений (4.2), (4.3), (4.5), (4.7) и (4.8). Искомая зависимость координат (x_0, y_0) от моментов переключения t_1, t_2, ординаты первого переключения y_1 и временем управления T имеет вид

$$x_0 = -y_0 + T - t_2 - t_1 - y_1(t_2 - t_1). \tag{5.1}$$

Исключив из (5.1) временные параметры t_1 и t_2, получим уравнение

$$x_0 = -y_0 + \ln\left[\frac{(1+y_1)(1-y_1)}{1-y_0}\right] - y_1\left\{T - \ln\left[\frac{(1-y_0)(1+y_1)}{1-y_1}\right]\right\}. \tag{5.2}$$

Здесь ордината $y(t_1) = y_1$ выступает в роли параметра. Геометрически она определяет точку, в которой фазовая траектория, выходящая из точки (x_0, y_0), пересекает ветвь первого переключения K^-. Множество начальных состояний, удовлетворяющих уравнению (5.2), определяет область управляемости G^- для рассматриваемой структуры

$$G^- = \left\{(x_0, y_0) \in D^- : x_0 = -y_0 + \ln\left[\frac{(1-y_1^2)}{1-y_0}\right] - y_1\left\{T - \ln\left[\frac{(1-y_0)(1+y_1)}{1-y_1}\right]\right\}\right\}. \tag{5.3}$$

Для аналитического построения области G^- необходимо установить диапазон изменения параметра y_1. Из требования невырожденности этапа движения с постоянной ординатой следует, что он представляет собой открытый интервал

$$y_0 < y_1 < y^*, \tag{5.4}$$

где верхняя граница y^* определяется выражением (4.11).

Непрерывное изменение параметра y_1 внутри интервала (5.4) при фиксированных y_0 и T аналитически задает область управляемости G^- (5.3). Предельный переход параметра y_1 к границам интервала позволяет построить фазовый контур области на плоскости начальных состояний (x_0, y_0).

Поскольку предельные значения параметра y_1 соответствуют различным случаям вырождения временных интервалов управления (4.1) (когда $t_1 \to 0$, $t_2 \to 0$ либо

$t_2 - t_1 \to 0$), , целесообразно рассмотреть вырождение исходного закона управления при указанных переходах.

Перейдем к анализу этих предельных случаев и описанию соответствующих им граничных множеств для области (5.3).

1. Предельный переход при $t_2 - t_1 \to 0$. Данному случаю соответствует стремление к нулю длительности этапа движения с постоянной ординатой. При этом исходный закон (4.1) вырождается в двухэтапную релейную структуру

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1), \\ -1, & t \in [t_1, T]. \end{cases} \tag{5.5}$$

Общее уравнение связи (5.1) принимает вид

$$x_0 = -y_0 + T - 2t_1, \tag{5.6}$$

что, с учетом выражений для временных интервалов (4.2) и (4.7), преобразуется к форме

$$x_0 = -y_0 + \ln\left[(1+y_1)(1-y_1)/(1-y_0)\right]. \tag{5.7}$$

Подстановка t_1(4.2) и t_2(4.7) в предельное условие $t_2 - t_1 \to 0$ приводит к соотношению, разрешая которое относительно параметра y_1, находим его предельное значение, тождественное правой границе интервала (5.4): $y_1 \to y^*$.

Внесение граничного значения (4.11) в уравнение (5.7) после алгебраических преобразований дает явное уравнение

$$x_0 = -y_0 + T + \ln 4 - 2\ln(e^T + 1 - y_0) \tag{5.8}$$

Множество начальных состояний $(x_0, y_0) \in D^-$, удовлетворяющих уравнению (5.8), формирует участок границы $G^-_{\{1,-1\}}$ области управляемости (5.3)

$$G^-_{\{1,-1\}} = \left\{(x_0, y_0) \in D^- : \ x_0 = -y_0 + T + \ln 4 - 2\ln(e^T + 1 - y_0)\right\}. \tag{5.9}$$

2. Предельный переход при $t_1 \to 0$. Этот случай, согласно соотношению (4.2), эквивалентен условию $y_1 \to y_0$ в (5.4). Исходный закон (4.1) вырождается в структуру

$$u^*(t) = \begin{cases} y(t), & t \in [0, t_2), \\ -1, & t \in [t_2, T]. \end{cases} \tag{5.10}$$

Система начинает движение непосредственно в режиме $u = y_0$, минуя этап первоначального разгона. Общее уравнение связи (5.1) при этом принимает вид

$$x_0 = -y_0 + T - t_2 - y_1 t_2, \tag{5.11}$$

что с учетом выражения для момента времени t_2 (4.7) преобразуется к форме

$$x_0 = -y_0 + \ln(1+y_1) - y_1\left[T - \ln(1+y_1)\right]. \tag{5.12}$$

Подстановка предельного значения $y_1 = y_0$ в уравнение (5.12) позволяет

получить явное уравнение фазовой границы

$$x_0 = -y_0 + \ln(1+y_0) - y_0\left[T - \ln(1+y_0)\right]. \tag{5.13}$$

Множество начальных состояний, удовлетворяющих уравнению (5.13) определяет участок границы $G^-_{\{y,-1\}}$ области управляемости (5.3)

$$G^-_{\{y,-1\}} = \left\{(x_0, y_0) \in D^- :\ x_0 = -y_0 + \ln(1+y_0) - y_0\left[T - \ln(1+y_0)\right]\right\}. \tag{5.14}$$

3. Предельный переход при $t_1 \to 0$, $t_2 \to 0$. В этом случае исходная структура (4.1) вырождается в одноэтапную

$$u^*(t) = \{-1, \quad t \in [0,T]. \tag{5.15}$$

При этом уравнение (5.1) преобразуется к виду

$$x_0 = -y_0 + T. \tag{5.16}$$

Условию $t_1 \to 0$, согласно (4.2), соответствует стремление $y_1 \to y_0$, а из условия $t_2 \to 0$ и соотношения (4.7) следует, что $y_1 \to e^T - 1$. Таким образом, движение начинается непосредственно в режиме торможения при $y_1 = y_0 = e^T - 1$, откуда получаем ограничение на допустимое время управления T: $0 < T < \ln 2$.

Подстановка этого значения в (5.15) определяет абсциссу начального состояния

$$x_0 = T - e^T + 1. \tag{5.17}$$

Точка с координатами

$$(x_0, y_0) = (T - e^T + 1;\ e^T - 1) \tag{5.18}$$

является изолированной верхней угловой точкой области управляемости G^-, соответствующей предельному случаю использования структуры $\{-1\}$. Для каждого фиксированного значения $T \in (0, \ln 2)$ закон управления (5.14) обеспечивает перевод системы из единственного начального состояния (5.18) в начало координат за заданное время T. Обозначим для краткости координаты этой верхней угловой точки как (x_0^+, y_0^+), где $x_0^+ = T - e^T + 1$, $y_0^+ = e^T - 1$, а координаты центрально-симметричной ей нижней угловой точки — как $(x_0^-, y_0^-) = (-x_0^+, -y_0^+)$.

Полученные граничные кривые позволяют дать аналитическое описание открытых областей управляемости на плоскости начальных состояний. Для исходной структуры управления (4.1) область G^- имеет вид

$$G^- = \left\{(x_0, y_0) \in D^- :\ x_0^{\{1,-1\}}(y_0) < x_0 < x_0^-(y_0),\ \ y_0^- < y_0 < 1\right\}, \tag{5.19}$$

где кусочная правая граница определяется функцией

$$x_0^-(y_0) = \begin{cases} x_0^{\{y,-1\}}(y_0), & 0 \le y_0 < 1, \\ x_0^{\{1\}}(y_0), & y_0^- \le y_0 < 0. \end{cases} \tag{5.20}$$

Свойство центральной симметрии рассматриваемой системы относительно начала координат позволяет распространить полученные результаты на область D^+.

Поскольку структурам $\{-1\}$, $\{1,-1\},\{y,-1\}$ и $\{1,y,-1\}$ в D^- соответствуют структуры $\{1\},\{-1,1\},\{y,1\}$ и $\{-1,y,1\}$ в D^+, границы (5.9), (5.14) и угловая точка (5.18) отображаются в D^+.

В итоге область управляемости G^+ принимает вид

$$G^+ = \left\{(x_0, y_0) \in D^+ : \quad x_0^+(y_0) < x_0 < x_0^{\{-1,1\}}(y_0), \quad -1 < y_0 < y_0^+\right\}, \tag{5.21}$$

где кусочная левая граница определяется как

$$x_0^+(y_0) = \begin{cases} x_0^{\{-1\}}(y_0), & 0 \le y_0 < y_0^+, \\ x_0^{\{y,1\}}(y_0), & -1 < y_0 < 0. \end{cases} \tag{5.22}$$

Аналитический вид функций $x_0^{\{1,-1\}}(y_0)$, $x_0^{(y,-1\}}(y_0)$ и $x_0^{\{-1\}}(y_0)$ задается выражениями из (5.9), (5.14) и (5.18) соответственно, а сами компоненты границ областей G^- и G^+ связаны между собой соотношениями

$x_0^{\{-1,1\}}(y_0) = -x_0^{\{1,-1\}}(-y_0)$, $x_0^{\{y,1\}}(y_0) = -x_0^{(y,-1\}}(-y_0)$,

$x_0^{\{1\}}(y_0) = -x_0^{\{-1\}}(-y_0)$.

Объединение

$$G = G^- \cup G^+, \tag{5.23}$$

где составляющие области G^- и G^+ задаются формулами (5.19) и (5.21), задает итоговую область управляемости системы. Она содержит все начальные состояния фазовой плоскости, из которых возможен перевод в начало координат за фиксированное время T с помощью рассматриваемых структур оптимального управления (2.9)-(11).

Построенная область управляемости G (5.23) и найденные кривые переключения позволяют перейти от программных траекторий к задаче синтеза. Геометрия этих множеств однозначно определяет закон оптимального управления с обратной связью в виде кусочно-непрерывной функции $u^*(x,y)$ от текущих фазовых координат. Вид данной функции зависит от положения начального состояния (x_0, y_0) в области управляемости G, включая ее границы.

Если $(x_0, y_0) \in G$, то

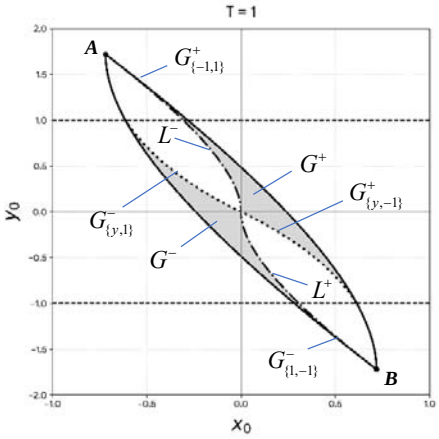
$$u^*(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in D^- \quad u \quad x < x_{K^-}(y), \\ -1, & (x,y) \in D^+ \quad u \quad x > x_{K^+}(y), \\ y, & (x,y) \in K \cap G. \end{cases} \tag{5.24}$$

где $x_{K^-}(y)$ и $x_{K^+}(y)$ — функции, задающие аналитическую зависимость для абсциссы кривых K^- (4.10) и K^+ (4.13) соответственно.

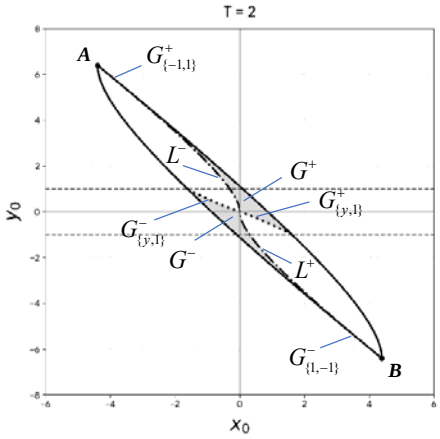
На границах и в угловых точках множества G закон синтеза (5.24) вырождается следующим образом. На внешних границах $x_0^{\{1,-1\}}$ и $x_0^{\{1,-1\}}$ промежуточный этап

движения отсутствует, а управление становится двухэтапным ($u^* = \pm 1$ при $(x, y) \in D^{\pm}$); на границах $x_0^{\{y,-1\}}$ и $x_0^{\{y,1\}}$ процесс начинается непосредственно с движения с постоянной скоростью ($u^* = y$) до выхода на кривую L; в изолированных угловых точках (x_0^+, y_0^+) и (x_0^-, y_0^-) траектория сводится к одноэтапному торможению ($u^* = \mp 1$) вдоль всей фазовой траектории.

6. Результаты численного моделирования. В качестве иллюстрации приведем пример численной реализации описанного алгоритма построения области управляемости в задаче (1.1)–(1.5). На фиг. 1,2 на плоскости начальных состояний (x_0, y_0) изображены области управляемости, построенные для фиксированных значений $T = 1$ и $T = 2$ и соответствующие структурам оптимального управления (2.9)–(2.11). Как следует из рисунков, геометрическая форма и расположение этих областей, полученные с помощью формул (5.19) и (5.21), существенно зависят от значений T.



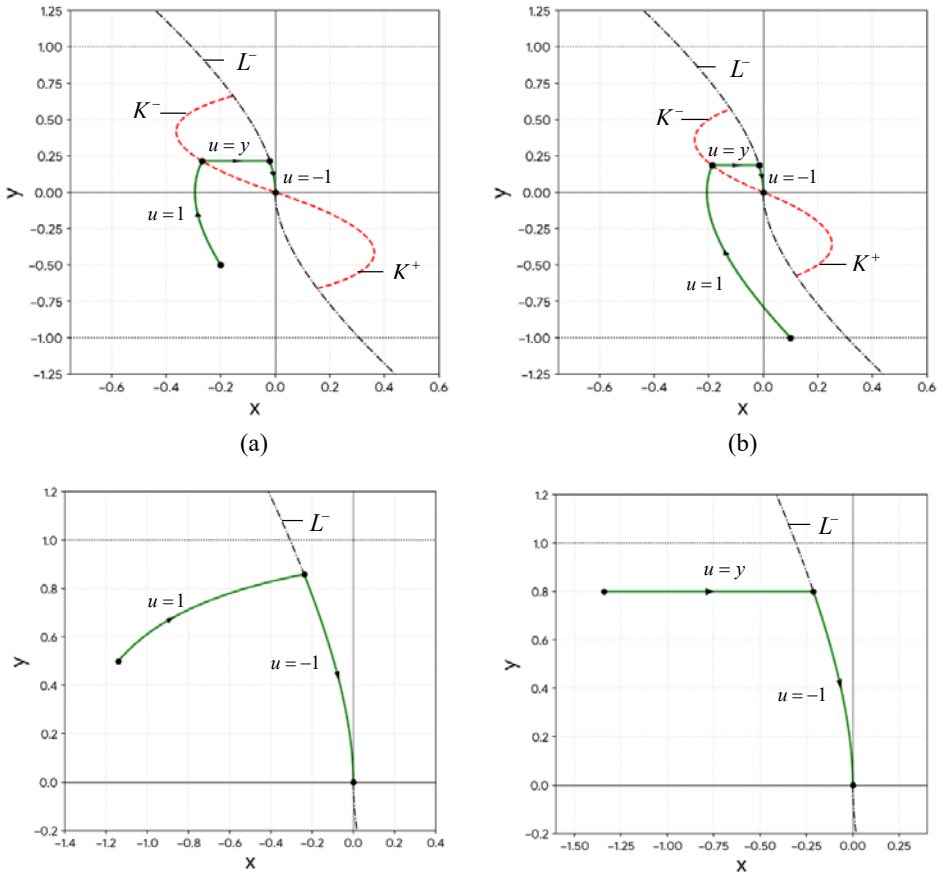
Фиг. 1.



Фиг. 2.

Для численной реализации алгоритма выбрано время управления $T = 2$, а начальные состояния задавались в четырех вариантах

$$(a)\ \ (x_0, y_0) = (-0.2, -0.5), \qquad (b)\ \ (x_0, y_0) = (0.1, -1),$$
$$(c)\ \ (x_0, y_0) = (-1.1408,\ 0.5), \quad (d)\ \ (x_0, y_0) = (-1.342,\ 0.8). \tag{6.1}$$



Фиг. 3.

Двухэтапной структуре $\{1,-1\}$ соответствует множество начальных состояний $G^{-}_{\{1,-1\}}$ (5.9), а структуре $\{-1,1\}$ – центрально-симметричное ему множество $G^{+}_{\{-1,1\}}$. Трехэтапным структурам $\{\pm 1, y, \mp 1\}$ соответствует область управляемости G (5.23). Она ограничена сплошными линиями – участками границ $G^{-}_{\{1,-1\}}$ (5.9) и $G^{+}_{\{-1,1\}}$, пунктирными линиями $G^{-}_{\{y,-1\}}$ (5.14) и центрально-симметричной ей линией $G^{-}_{\{y,1\}}$, а также штрихпунктирными линиями L^{-} (3.5) и L^{+} (3.6). Одноэтапной структуре управления $\{-1\}$ соответствует изолированная верхняя угловая точка (5.18) (точка $A=(x_0^{+}, y_0^{+})$ на фиг. 1, 2), а структуре $\{1\}$ – центрально-симметричная ей нижняя угловая точка $B=(x_0^{-}, y_0^{-})$.

В случаях (a) и (b) точка (x_0, y_0) находится внутри области управляемости G^-, в случае (c) – на границе $G^-_{\{1,-1\}}$, а в случае (d) – на границе $G^-_{\{y,-1\}}$. На фиг. 3 представлены фазовые траектории системы (1.1), соединяющие начальные состояния (6.1) с началом координат $(0,0)$ за время $T=2$. В силу своего расположения, для точек (a) и (b) реализуется трехэтапная структура $u=\{1, y, -1\}$, а соответствующие траектории приведены на фиг. 3(a) и 3(b). Для точек (c) и (d), лежащих на границах, оптимальными являются вырожденные структуры $u=\{1,-1\}$ и $u=\{y,-1\}$ соответственно. При этом в случае (d) на первом этапе закон управления принимает постоянное значение $u=y_0$.

В случае (a) моменты переключения t_1 и t_2 программного управления (4.1) определялись из соотношений (4.2) и (4.7) после подстановки параметра y_1, найденного из уравнений (4.3) и (4.8). Для начальной точки (6.1)(a) получены следующие значения параметров

$$t_1=0.646,\ t_2=1.806,\ T=2,\ y_1=0.214. \tag{6.2}$$

Этим параметрам соответствуют точки первого и второго переключений на фазовой плоскости

$$(x_1, y_1)=(-0.268; 0.214),\quad (x_2, y_1)=(-0.02;\ 0.214). \tag{6.3}$$

На фиг. 3(a) и 3(b) сплошными линиями представлены фазовые траектории, обеспечивающие приведение системы в начало координат. Направление движения по траекториям указано стрелками. Пунктирными линиями изображены кривые первого переключения K, геометрия и протяженность которых существенно различаются в зависимости от значения начальной фазовой координаты y_0, а штрихпунктирными – кривые второго переключения L.

Заключение. В работе решена задача аналитического синтеза оптимального управления линейной системой второго порядка по негладкому интегральному критерию, определяющему ее различные механические и электромеханические характеристики. На основе принципа максимума Понтрягина определено оптимальное управление в форме обратной связи, обеспечивающее перевод системы из начального состояния в состояние покоя за фиксированное время. Дано полное описание и анализ геометрии области управляемости на плоскости начальных состояний с выделением зон реализации одно-, двух- и трехэтапных структур оптимального управления. Для соответствующих начальных состояний построены оптимальные фазовые траектории.

Теоретически обоснована и численным моделированием подтверждена зависимость формы и размеров области управляемости от конечного времени. Аналогичным образом установлено изменение конфигурации одной из фазовых кривых переключения в зависимости как от конечного времени, так и от начальной скорости.

Полученные результаты могут быть использованы при синтезе управления различными динамическими системами с целью улучшения их качественных показателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 2003. 614 с.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. 393с.
3. Schättler H., Ledzewicz U. Geometric Optimal Control: Theory, Methods and Examples. New York: Springer, 2012. 640 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-3834-2
4. Liberzon D. Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction. Princeton: Princeton University Press, 2012. 248 p.
5. Singh T. Fuel/Time Optimal Control of the Benchmark Problem // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1995. V. 18, no. 6, pp. 1225–1231. DOI: 10.2514/3.21534
6. Формальский А. М. К задаче синтеза оптимального управления в системах второго порядка // Доклады Академии наук. 2010. Т. 430. № 6. С. 747-750.
7. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. – М.: Наука, 1989. 368 с.
8. Аветисян В.В., Болотник Н.Н. Субоптимальное управление электромеханическим манипулятором с высокой точностью позиционирования // Изв. РАН. МТТ. 1990. № 5. С. 32–41.
9. Avetisyan V.V. Time-Optimal Control of Gripper Motion in a Two-Link Manipulator with Allowance for the Terminal Configuration // Automation and Remote Control. V. 82, Iss. 2. P. 189-199. DOI: 10.1134/S0005117921020016
10. Avetisyan V.V. Grigoryan Sh. A. Time-Suboptimal Control Of A Two-Link Manipulator Motion //Mechanics. Proceedings of NAS of Armenia. 2022. V. 75. Iss. 1. P. 136-147. DOI: 10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-136
11. Hartmann R., Singh T. Fuel/Time Optimal Control of Flexible Structures: A Frequency Domain Approach // Journal of Vibration and Control. 1999. V. 5, no. 5, pp. 795–817. DOI: 10.1177/107754639900500508
12. Аветисян В.В. Оптимальное управление электромеханической системой по комбинированному критерию // Изв. НАН Армении. Механика. 2018. Т.71, № 4. С. 5–16. DOI: 10.33018/71.4.1
13. Александров В. М. Вычисление оптимального по расходу ресурса управления в реальном времени // Ж. вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 7. С. 1125–1136. DOI: 10.1134/S0044466919070020
14. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. – М.: Наука, 1988. 320 с.
15. Gusev M. I. On the Attainability Problem under State Constraints with Piecewise Smooth Boundary // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2016, V. 293. Iss. 1. P. S66–S74. DOI: 10.1134/S0081543816050072

Сведения об авторе:

Аветисян Ваган Вардгесович – В.н.с., Имех. НАН РА, д. ф.-м. н., профессор

e-mail: vanavet@yahoo.com

Поступила в редакцию 25.05.2026