ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 79, №1-2, 2026 Механика
УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2026.79.1-2-36

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ШАРНИРНОМ ОПИРАНИИ

Арабян М. О., Оганисян З. Б.

Ключевые слова: поперечные колебания, балка переменного сечения, собственные частоты, шарнирное опирание, метод Фурье, бесконечная система уравнений.

Arabyan M. H., Oganisyan Z. B.

Determination of the Natural Frequencies of Transverse Vibrations of a Beam with Variable Cross-Section under Pinned Support

Keywords: transverse vibrations, variable cross-section beam, natural frequencies, pinned supports, Fourier method, infinite system of equations.

This paper addresses the problem of determining the natural frequencies of transverse vibrations of a beam with a variable cross-section and pinned support at its ends. The problem is reduced to a boundary value problem for a fourth-order ordinary differential equation with variable coefficients. To solve it, a method is proposed based on expanding the vibration mode into a Fourier sine series and the functions describing the geometric characteristics of the cross-section into cosine series. An infinite system of linear homogeneous algebraic equations was obtained relative to the expansion coefficients of the vibration mode. The condition for the existence of a non-trivial solution to this system allows for the determination of the natural frequencies. As an example, a beam with piecewise constant cross- section functions is considered. A numerical determination of the first four natural frequencies was performed by truncating the system to the fourth order. A comparison of the results with a solution found by the segment matching method confirmed the sufficient accuracy of the proposed technique.

Արաբյան Մ. Հ. Հովհաննիսյան Զ.Բ.

Փոփոխական լայնական կտրվածք ունեցող հոդակապորեն ամրացված եզրերով հեծանի սեփական լայնական տատանումների հաճախականությունների որոշումը

Հիմնաբառեր՝ լայնական տատանումներ, փոփոխական հատույթի հեծան, սեփական հաճախականություններ, հոդակապ ամրացում, Ֆուրյեի մեթոդ, հավասարումների անվերջ համակարգ:

Դիտարկվում է հոդակապորեն ամրացված եզրերով, փոփոխական լայնական կտրվածք ունեցող հեծանի լայնական տատանումների սեփական հաճախականությունների որոշման խնդիրը: Այն հանգեցվում է փոփոխական գործակիցներով չորրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար եզրային խնդրի: Դրա լուծման համար առաջարկվում է մեթոդ, որը հիմնված է ամպլիտուդի՝ ըստ սինուսների Ֆուրյեի շարքի, իսկ հատույթի երկրաչափական բնութագրերը նկարագրող ֆունկցիաների՝ ըստ կոսինուսների շարքի վերլուծության վրա: Ստացվել է գծային համասեռ հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգ՝ ամպլիտուդի վերլուծության գործակիցների նկատմամբ: Համակարգի ոչ տրիվիալ լուծման գոյության պայմանը թույլ է տալիս որոշել սեփական հաճախականությունները: Որպես օրինակ դիտարկվել է կտոր առ կտոր հաստատուն լայնական կտրվածք ունեցող հեծան: Իրականացվել է առաջին չորս սեփական հաճախականությունների թվային որոշում՝ համակարգը մինչև չորրորդ կարգի կրճատելու միջոցով:

Ստացված արդյունքների համեմատությունը հայտնի մեթոդով ստացված լուծման հետ հաստատել է առաջարկված մեթոդի բավարար ճշտությունը:

Рассматривается задача определения собственных частот поперечных колебаний балки переменного сечения с шарнирным опиранием на концах. Задача сводится к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения четвёртого порядка с переменными коэффициентами. Для её решения предложен метод, основанный на разложении амплитуды колебаний в ряд Фурье по синусам, а функций, описывающих геометрические характеристики сечения, - в ряды по косинусам. Получена бесконечная система линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения амплитуды колебаний. Условие существования нетривиального решения системы позволяет определить собственные частоты. В качестве примера рассмотрена балка с кусочно-постоянными функциями изменения сечения. Выполнено численное определение первых четырёх собственных частот при усечении системы до четвёртого порядка. Проведено сравнение полученных результатов с решением, найденным методом стыковки участков, которое подтвердило достаточную точность предложенной методики.

Введение. В современном строительстве и машиностроении балки широко применяются в качестве несущих конструкций мостов, эстакад, покрытий, перекрытий, лестниц, площадок под оборудование и других инженерных сооружений. Одним из эффективных способов повышения несущей способности и снижения материалоемкости конструкций является использование балок переменного сечения по длине. Такое конструктивное решение позволяет более рационально распределить материал в соответствии с эпюрой внутренних усилий, что особенно актуально для большепролетных и динамически нагруженных элементов. В процессе эксплуатации элементы конструкций подвергаются различным видам динамических воздействий, включая вибрационные нагрузки, что обусловливает необходимость детального исследования их колебательного поведения. Особое значение при этом имеет определение собственных частот, поскольку совпадение частот вынужденных колебаний с собственными частотами конструкции может привести к явлению резонанса и, как следствие, к ее преждевременному разрушению.

Для балок постоянного сечения задача определения собственных частот поперечных колебаний имеет аналитическое решение, хорошо изучена и представлена в классической литературе [5]. Однако для балок переменного сечения, у которых площадь поперечного сечения и момент инерции изменяются по длине, решение значительно усложняется. Уравнение поперечных колебаний в этом случае представляет собой дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами, общее решение которого в элементарных функциях, как правило, отсутствует.

Существующие подходы к решению таких задач включают численные методы (например, метод конечных элементов), приближенные аналитические методы (метод Бубнова–Галеркина, метод Рэлея–Ритца), а также методы, основанные на разложении в ряды. В последние годы активно развиваются новые аналитические и вычислительные подходы. В работе [1] предложен метод пространства состояний для систем с переменным сечением, позволяющий свести задачу к матрице с постоянными коэффициентами и упростить вычисление частот. В исследовании [2] используется Fourier-p-элемент (комбинация полиномов и тригонометрических функций), что позволяет избежать проблемы плохой обусловленности, характерной для методов высокого порядка. Кроме того, актуальными являются задачи оптимизации стержней с кусочно-постоянным сечением при ограничениях на собственные частоты [3, 4]. Каждый из перечисленных подходов имеет свои преимущества и ограничения, связанные с точностью, вычислительной сложностью и областью применимости.

В настоящей работе предлагается аналитический метод определения собственных частот поперечных колебаний балки переменного сечения при шарнирном опирании, основанный на разложении амплитуды колебаний в ряд Фурье по синусам, а функций изменения геометрических характеристик – в ряды по косинусам. Предлагаемый подход позволяет свести исходную краевую задачу к бесконечной системе линейных однородных алгебраических уравнений, из условия существования нетривиального решения которой определяются собственные частоты. Эффективность метода демонстрируется на примере ступенчатой балки с кусочно-постоянными функциями сечения – типичного объекта для современных оптимизационных задач [3, 4], а полученные результаты сопоставляются с решением, найденным методом стыковки участков. Достоверность результатов подтверждается сравнением с классическими подходами [5, 6], а также соответствием современным тенденциям развития аналитических методов [1, 2].

1. Постановка задачи. Рассмотрим балку длиной ℓ с шарнирным опиранием на концах, имеющую переменное поперечное сечение, постоянный модуль упругости E и плотность ρ. Предположим, что балка расположена в плоскости Oxy так, что ось Ox совпадает с продольной осью симметрии балки в её равновесном состоянии. Поперечные колебания балки задаются функцией $u(x, t)$, определяющей поперечное смещение точки балки с координатой x вдоль оси Oy в момент времени t относительно положения равновесия. Если для поперечного сечения с абсциссой x площадь и момент инерции равны соответственно $S(x)$ и $J(x)$, то уравнение поперечных колебаний балки имеет вид [5]

$$S(x)\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=0. \tag{1}$$

Площадь поперечного сечения $S(x)$ и момент инерции $J(x)$ можно представить в виде

$$S(x) = S_0\, g(x), \qquad 0 < g(x) \le 1,$$

$$\mathrm{J(x) = J_0\, f(x), \quad 0 < f(x) \le 1.}$$

В этом случае уравнение (1) примет вид

$$g(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=0, \tag{2}$$

где $a^2=\dfrac{EJ_0}{S_0\rho\ell^4}$, $x\in(0,1)$ — безразмерная, деленная на ℓ координата.

Граничные условия в случае шарнирного закрепления на концах принимают следующий вид:

$$\begin{cases} u(0,t)=0, & \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0, \\ u(1,t)=0, & \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=1}=0. \end{cases} \tag{3}$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$u(x,\ t)\ =\ w(x)\ \cos\ \omega t. \tag{4}$$

Здесь $w(x)$ - амплитуда, ω - частота собственных поперечных колебаний.

Подстановка (4) в уравнение (2) для нахождения $w(x)$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(f(x)\frac{d^2 w}{dx^2}\right)+\lambda^2 g(x)w=0,$$

или

$$f\ (x)w^{IV}\ +\ 2f\ '(x)w'''\ +\ f\ ''(x)w''+\ \lambda^2 g(x)w\ =\ 0, \tag{5}$$

где $\lambda=\dfrac{\omega}{a}$ - безразмерная частота собственных колебаний.

Граничные условия для $w(x)$ из (3) и (4) записываются в виде

$$w(0)\ =\ 0,\qquad w''(0)\ =\ 0,\qquad w(1)\ =\ 0,\qquad w''(1)\ =\ 0. \tag{6}$$

Требуется определить собственные частоты поперечных колебаний балки.

2. Вывод характеристического уравнения для определения собственных частот.

Для решения задачи (5)-(6) представим функции в виде рядов

$$w(x)=\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin m\pi x, \tag{7}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}f_0+\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos k\pi x, \tag{8}$$

$$g(x)=\frac{1}{2}g_0+\sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos k\pi x, \tag{9}$$

при этом условия (6) удовлетворяются тождественно. Здесь w_m - искомые коэффициенты разложения,

$$f_k = 2\int_0^1 f(x)\cos k\pi x dx, \qquad g_k = 2\int_0^1 g(x)\cos k\pi x dx, \qquad k = 0,1,2,\cdots.$$

Подставив (7), (8) и (9) в уравнение (5), получим

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2} f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos k\pi x\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^4\pi^4 w_m \sin m\pi x\right) + \\
&\quad + 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-k\pi f_k \sin k\pi x)\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}(-m^3\pi^3 w_m \cos m\pi x)\right) + \\
&\quad + \left(\sum_{k=1}^{\infty}(-k^2\pi^2 f_k \cos k\pi x)\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}(-m^2\pi^2 w_m \sin m\pi x)\right) + \\
&\quad + \lambda^2\left(\frac{1}{2} g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos k\pi x\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin m\pi x\right) = 0.
\end{aligned} \qquad (10)$$

Используя формулу произведения тригонометрических рядов

$$\left(\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \cos k\pi x\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m \sin m\pi x\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_k \sin k\pi x\right),$$

где

$$\gamma_m = (\alpha_0 - \alpha_{2m})\beta_m + \sum_{k=1}^{m-1}(\alpha_{m-k} - \alpha_{m+k})\beta_k + \sum_{k=m+1}^{\infty}(\alpha_{k-m} - \alpha_{k+m})\beta_k,$$

члены левой части уравнения (10) преобразуются следующим образом.

Первое слагаемое:

$$\left(\frac{1}{2} f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos k\pi x\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^4\pi^4 w_m \sin m\pi x\right) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin m\pi x, \qquad (11)$$

где

$$\begin{aligned}
A_m &= m^4\pi^4(f_0 - f_{2m})w_m + \pi^4\sum_{k=1}^{m-1} k^4(f_{m-k} - f_{m+k})w_k + \\
&\quad + \pi^4\sum_{k=m+1}^{\infty} k^4(f_{k-m} - f_{k+m})w_k.
\end{aligned} \qquad (12)$$

Второе слагаемое преобразуется следующим образом:

$$2\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}(-k\pi f_{\mathrm{k}} \sin k\pi x)\right)\left(\sum_{\mathrm{m}=1}^{\infty}(-\mathrm{m}^3\pi^3\mathrm{w}_{\mathrm{m}} \cos m\pi x)\right) = \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{m}=1}^{\infty} B_{\mathrm{m}} \sin m\pi x, \qquad (13)$$

где

$$B_m = -16m^3\pi^4 f_m w_{2m} + 2\pi^4 \sum_{k=1}^{m-1} k\left((m-k)^3 w_{m-k} - (m+k)^3 w_{m+k}\right) f_k +$$
$$+ 2\pi^4 \sum_{k=m+1}^{\infty} k\left((k-m)^3 w_{k-m} - (k+m)^3 w_{k+m}\right) f_k. \tag{14}$$

Третье слагаемое преобразуется аналогично:

$$\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}(-k^2\pi^2 f_{\mathrm{k}} \cos k\pi x)\right)\left(\sum_{\mathrm{m}=1}^{\infty}(-\mathrm{m}^2\pi^2 \mathrm{w}_{\mathrm{m}} \sin m\pi x)\right) = \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{m}=1}^{\infty} C_{\mathrm{m}} \sin m\pi x, \tag{15}$$

где

$$C_m = -4m^4\pi^4 f_{2m} w_m + \pi^4 \sum_{k=1}^{m-1} k^2 \left((m-k)^2 f_{m-k} - (m+k)^2 f_{m+k}\right) w_k +$$
$$+ \pi^4 \sum_{k=m+1}^{\infty} k^2 \left((k-m)^2 f_{k-m} - (k+m)^2 f_{k+m}\right) w_k. \tag{16}$$

Четвертое слагаемое:

$$\left(\frac{1}{2}g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos k\pi x\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin m\pi x\right) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin m\pi x, \tag{17}$$

где

$$D_m = (g_0 - g_{2m})w_m + \sum_{k=1}^{m-1}(g_{m-k} - g_{m+k})w_k + \sum_{k=m+1}^{\infty}(g_{k-m} - g_{k+m})w_k. \tag{18}$$

Суммируя все слагаемые, уравнение (10) принимает вид:

$$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(A_m + B_m + C_m + \lambda^2 D_m)\sin m\pi x = 0.$$

В силу линейной независимости функций $\sin m\pi x$ на (0, 1), получаем бесконечную систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно w_m:

$$A_m + B_m + C_m + \lambda^2 D_m = 0, \qquad m = 1, 2, 3, \cdots. \tag{19}$$

Условием существования нетривиального решения полученной бесконечной системы является равенство нулю её бесконечного определителя [6]. Из этого условия определяются значения приведённой частоты собственных поперечных колебаний.

Подставляя в уравнение (10) выражения для A_m, B_m, C_m, D_m, запишем систему в развернутом виде:

$$
\begin{aligned}
& m^4\pi^4(f_0-f_{2m})w_m+\pi^4\sum_{k=1}^{m-1}k^4(f_{m-k}-f_{m+k})w_k+\pi^4\sum_{k=m+1}^{\infty}k^4(f_{k-m}-f_{k+m})w_k-\\
& -16m^3\pi^4 f_m w_{2m}+2\pi^4\sum_{k=1}^{m-1}k\left((m-k)^3 w_{m-k}-(m+k)^3 w_{m+k}\right)f_k+\\
& +2\pi^4\sum_{k=m+1}^{\infty}k\left((k-m)^3 w_{k-m}-(k+m)^3 w_{k+m}\right)f_k-\\
& -4m^4\pi^4 f_{2m}w_m+\pi^4\sum_{k=1}^{m-1}k^2\left((m-k)^2 f_{m-k}-(m+k)^2 f_{m+k}\right)w_k+\\
& +\pi^4\sum_{k=m+1}^{\infty}k^2\left((k-m)^2 f_{k-m}-(k+m)^2 f_{k+m}\right)w_k+\\
& +\lambda^2\left((g_0-g_{2m})w_m+\sum_{k=1}^{m-1}(g_{m-k}-g_{m+k})w_k+\sum_{k=m+1}^{\infty}(g_{k-m}-g_{k+m})w_k\right)=0.\\
& m=1,2,3,\cdots.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Для практического решения задачи производится усечение системы до некоторого конечного порядка *N*, что приводит к обобщенной проблеме собственных значений:

$$
\mathrm{Kw}=\lambda^2\mathrm{Mw}, \tag{21}
$$

где **K** и **M** - матрицы, элементы которых выражаются через коэффициенты Фурье f_k, g_k, и номера n, k. Приравнивая нулю определитель матрицы $\mathrm{A}(\lambda)$ = K-λ^2M, находят приближенные значения собственных частот λ, а затем искомые частоты $\omega = \lambda a$.

3. Применение метода к ступенчатой балке.

Рассмотрим балку, состоящую из трёх частей, жёстко соединённых друг с другом. Поперечные сечения первой и третьей частей представляют собой квадраты со стороной a. Они занимают отрезки $[0,1/4]$ и $[3/4,1]$ на оси Ox. Поперечное сечение второй части представляет собой прямоугольник со сторонами a, h и занимает отрезок $[1/4, 3/4]$. Пусть, например, $a = 6$*см*, $h = 8$*см.* Тогда

$$S(x)=\begin{cases} a^2=36\,см^2, & 0\le x\le\frac{1}{4},\\ ah=48\,см^2, & \frac{1}{4}<x<\frac{3}{4},\\ a^2=36\,см^2, & \frac{3}{4}\le x\le 1, \end{cases}\quad J(x)=\begin{cases} a^4/12\;=108\,см^4, & 0\le x\le\frac{1}{4},\\ ah^3/12=256\,см^4, & \frac{1}{4}<x<\frac{3}{4},\\ a^4/12\;=108\,см^4, & \frac{3}{4}\le x\le 1. \end{cases}$$

(22)

В таком случае $S_0=48\,см^2,\ J_0=256\,см^4,$ и функции $f\ (x)$ и $g(x)$ имеют вид

$$g\ (x)=\begin{cases} \bar g_1=\frac{3}{4},\ 0\le x\le\frac{1}{4},\\ \bar g_2=1,\ \ \frac{1}{4}<x<\frac{3}{4},\\ \bar g_1=\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\le x\le 1, \end{cases}\quad f\ (x)=\begin{cases} \bar f_1=\frac{27}{64}, & 0\le x\le\frac{1}{4},\\ \bar f_2=1, & \frac{1}{4}<x<\frac{3}{4},\\ \bar f_1=\frac{27}{64}, & \frac{3}{4}\le x\le 1. \end{cases}$$

Соответствующие коэффициенты Фурье равны

$$g_0\ =\frac{7}{4},\qquad g_k\ =\ -\frac{1}{k\pi}\ \sin\ \frac{k\pi}{4}\ \cos\ \frac{k\pi}{2},$$

$$f_0\ =1\frac{27}{64},\qquad f_k\ =\ \frac{37}{16k\pi}\ \sin\ \frac{k\pi}{4}\ \cos\ \frac{k\pi}{2}, \tag{23}$$

$$k=1,2,3,\cdots.$$

Для численного определения собственных частот воспользуемся усечением системы (20) при $N\ =\ 4$. В результате вычислений получены следующие приближённые значения первых четырёх собственных частот:

$$\lambda_1\ =9,78,\quad \lambda_2\ =38{,}01,\quad \lambda_3\ =85{,}74,\quad \lambda_4\ =152,44. \tag{24}$$

Следует отметить, что увеличение числа членов N повышает точность получаемых результатов.

Для данного примера возможно также решение прямым методом. Пусть $V\ (x,\ t)$ смещение точки балки при $x\in[0,\ 1/4]$ или $x\in[3/4,\ 1]$, а $W\ (x,\ t)$ - при $x\in[1/4,\ 3/4]$. Будем искать эти функции в виде

$$V\ (x,\ t)=v(x)\cos\omega t,\qquad W\ (x,\ t)=w(x)\cos\omega t,$$

для определения $v(x)$ и $w(x)$ получаются уравнения

$$\overline{f}_1 v^{IV} + \lambda^2 \overline{g}_1 v = 0, \qquad \overline{f}_2 w^{IV} + \lambda^2 \overline{g}_2 w = 0, \tag{25}$$

при следующих условиях:

- граничные условия:

$$v(0) = 0, \qquad v''(0) = 0, \tag{26}$$

- контактные условия:

$$v(1/4) = w(1/4), \qquad v'(1/4) = w'(1/4), \tag{27}$$

$$\overline{g}_1 v''(1/4) = \overline{g}_2 w''(1/4), \qquad \overline{g}_1 v'''(1/4) = \overline{g}_2 w'''(1/4), \tag{28}$$

- условия симметрии (для нахождения нечётных по номеру частот):

$$w'(1/2) = 0, \quad w'''(1/2) = 0, \tag{29}$$

- условия антисимметрии (для нахождения чётных по номеру частот):

$$w(1/2) = 0, \quad w''(1/2) = 0. \tag{30}$$

Общие решения уравнений (25) представляются в виде

$$v(x) = c_1 \mathrm{ch}\, \mu x + c_2 \mathrm{sh}\, \mu x + c_3 \cos \mu x + c_4 \sin \mu x,$$

$$w(x) = c_5 \mathrm{ch}\, \upsilon x + c_6 \mathrm{sh}\, \upsilon x + c_7 \cos \upsilon x + c_8 \sin \upsilon x,$$

где c_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$ - произвольные постоянные,

$$\mu = \sqrt[4]{\frac{\overline{g}_1 \lambda^2}{\overline{f}_1}} = \sqrt{\frac{4\lambda}{3}}, \qquad \upsilon = \sqrt[4]{\frac{\overline{g}_2 \lambda^2}{\overline{f}_2}} = \sqrt{\lambda}.$$

Из условий (26), (27), (28), (29) или (26), (27), (28), (30) получается однородная система алгебраических уравнений относительно неизвестных c_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$. Приравнивая нулю определитель этой системы, находим частоты собственных колебаний.

Здесь для первых четырех значений λ получаем

$$\lambda_1 = 9,87, \quad \lambda_2 = 39,55, \quad \lambda_3 = 88,86, \quad \lambda_4 = 158,04. \tag{31}$$

Сравнение результатов двух методов, т.е. сравнение (24) и (31) показывает достаточную точность применяемой в работе методики определения частот собственных колебаний балки с переменным сечением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Li Y., Guo H., Xiong F., et al. A State-Space Method for Vibration of Double-Beam Systems with Variable Cross Sections // Journal of Engineering Mechanics. – 2024. – Vol. 150, No. 11. – P. 04024083.
2. Khan M. T., Singh A. P. Free Vibration Frequencies of a Variable Cross-Section Timoshenko-Ehrenfest Beam using Fourier-p Element // Arabian Journal for Science and Engineering. – 2024. – Vol. 49. – P. 2831–2851.
3. Lyakhovich L., Akimov P., Tukhfatullin B. Assessment Criteria of Optimal Solutions for Creation of Rods with Piecewise Constant Cross-Sections with Stability Constraints or Constraints for Value of the First Natural Frequency. Part 1: Theoretical Foundations // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2019. – Vol. 15, No. 4. – P. 88-100.
4. Ляхович Л. С., Акимов П. А., Тухфатуллин Б. А. Об одной задаче оптимизации конструкций с учетом требований устойчивости, прочности, при ограничениях первой частоты собственных колебаний // Вестник Российской академии архитектуры и строительных наук. – 2020. – № 4. – С. 76-82.
5. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
6. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М.–Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.

Сведения об авторах.

Арабян Мариам Овсеповна - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры численного анализа и моделирования ЕГУ, тел.: +374 93898324,
e-mail: arabyan.mariam@ysu.am

Оганесян Зограб Багратович - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры численного анализа и моделирования ЕГУ, тел.: +374 91324408,
e-mail: zorhh@ysu.am

Поступила в редакцию 12 апреля 2026г.