

**КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ИНТЕГРАЛА С ЯДРОМ,  
ПОРОЖДЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ ВЕБЕРА – ШАФХЕЙТЛИНА, В  
ПРИМЕНЕНИИ К РЕШЕНИЮ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ  
ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.**

**Саакян А.В.**

**Ключевые слова:** интеграл Вебера-Шафхейтлина, квадратурная формула, осесимметричная контактная задача, функции Бесселя, механические квадратуры.

**Sahakyan A.V.**

**Quadrature formula for an integral with a kernel generated by the Weber–Schafheitlin integral, applied to solving an axisymmetric contact problem of elasticity theory**

**Keywords:** Weber-Schafheitlin integral, quadrature rule, axisymmetric contact problem, Bessel functions, mechanical quadratures

A quadrature formula is constructed for calculating integrals with a kernel in the form of a discontinuous Weber-Schafheitlin integral. It is shown that for the order  $n$  of the quadrature formula, the formula is satisfied exactly for odd polynomials of order  $2n-1$ . As an example, an axisymmetric contact problem of pressing a smooth stamp into an elastic layer whose lower edge is rigidly fixed was solved and both the convergence and the efficiency of applying the mechanical quadrature method using the constructed quadrature formula are shown.

**Սահակյան Ա.Վ.**

**Վեբեր-Շաֆհեյտլինի ինտեգրալով տրվող կորիզով ինտեգրալի համար քառակուսացման  
բանաձևի կիրառությունը առաձգականության տեսության առանցքահամաչափ կոնտակտային  
խնդրի լուծման համար**

**Հիմնաբաներ՝** Վեբեր-Շաֆհեյտլինի ինտեգրալ, քառակուսացման բանաձև, առանցքահամաչափ կոնտակտային խնդիր, Բեսելի ֆունկցիաներ, մեխանիկական քառակուսացման բանաձևեր

Կառուցված է քառակուսացման բանաձև Վեբեր-Շաֆհեյտլինի խզվող ինտեգրալ տեսք ունեցող կորիզով ինտեգրալի հաշվման համար: Ցույց է տրված, որ  $n$  կարգի քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է  $2n-1$  կարգի կենտ բազմանդամների համար: Ստորին եզրով կոշտ ամրակցված առաձգական շերտի մեջ ողորկ շտամպի մխրճման առանցքահամաչափ կոնտակտային խնդրի լուծման օրինակի վրա ցույց են տրված կառուցված բանաձևի հիման վրա մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի մեթոդի զուգամիտությունը և արդյունավետությունը:

Построена квадратурная формула для вычисления интегралов с ядром в виде разрывного интеграла Вебера-Шафхейтлина. Показано, что при порядке квадратурной формулы  $n$  формула выполняется точно для нечетных многочленов порядка  $2n-1$ . На примере решения осесимметричной контактной задачи о вдавлении гладкого штампа в упругий слой, нижняя грань которого жестко закреплена, показаны как сходимость, так и эффективность применения метода механических квадратур с использованием построенной квадратурной формулы.

**Введение.** Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений начали интенсивно развиваться с середины XX века. Среди первых работ в этом направлении отметим работы [1-9]. В дальнейшем было выполнено огромное

количество работ, посвященных приближенному вычислению сингулярных интегралов и решению интегральных уравнений, содержащих такие интегралы, отметим лишь небольшую часть из работ, опубликованных после 2000-ого года [10-26]. Несомненно, этот перечень является далеко неполным и его можно было бы продолжить.

Несмотря на такое большое количество работ по приближенным методам решения сингулярных интегральных уравнений, интерес к этой проблеме не убывает и продолжает оставаться на повестке дня.

В настоящей работе предлагается квадратурная формула для вычисления интеграла с ядром, порожденным разрывным интегралом Вебера-Шафхейтлина, тем самым и возможность решения осесимметричных задач методом механических квадратур. Известно, что осесимметричные задачи теории упругости решаются, как правило, или в тороидальных координатах, например [27, 28], или при помощи оператора вращения, например [29-32]. В обоих случаях используются сложные преобразования, иногда приводящие и к замкнутым решениям, которые, однако, достаточно сложны для численного анализа. На примере осесимметричной контактной задачи о вдавлении гладкого штампа в упругий слой, нижняя грань которого жестко закреплена, показана эффективность применения метода механических квадратур. Рассмотрен случай, когда основание штампа неполностью контактирует со слоем и, следовательно, размеры зоны контакта подлежат определению. При помощи предлагаемой квадратурной формулы проведен детальный численный анализ задачи.

**1. Квадратурная формула.** Пусть имеем интеграл

$$I_v^\gamma(r) = \int_0^1 W_v^\gamma(r, \rho) (1 - \rho^2)^{\gamma-1} \rho^\nu f(\rho) d\rho \quad (1)$$

где

$$W_v^\gamma(r, \rho) = \int_0^\infty J_v(rt) J_v(\rho t) t^{2\gamma-1} dt \quad \left( \operatorname{Re} \nu \geq 0; \gamma = \mu + \frac{1}{2}; |\operatorname{Re} \mu| < \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

разрывной интеграл Вебера-Шафхейтлина достаточно общего вида,  $J_v(r)$  - функция Бесселя первого рода,  $f(r)$  удовлетворяет условию Гельдера-Липшица на отрезке  $[0, 1]$ .

Основой для построения квадратурной формулы для указанного интеграла является спектральное соотношение, полученное в [33, 34],

$$\int_0^1 W_v^\gamma(r, \rho) (1 - \rho^2)^{\gamma-1} \rho^{\nu+1} T_n^{(\nu, \gamma-1)}(\rho) d\rho = \lambda_{\nu n}^\gamma r^\nu T_n^{(\nu, \gamma-1)}(r) \quad (3)$$

$$\left( \operatorname{Re} \nu \geq 0; \gamma = \mu + \frac{1}{2}; |\operatorname{Re} \mu| < \frac{1}{2} \right)$$

где

$$T_n^{(v, \gamma-1)}(\rho) = P_n^{(v, \gamma-1)}(1-2\rho^2); \quad \lambda_{v_n}^\gamma = \frac{2^{2(\gamma-1)} \Gamma(n+v+\gamma) \Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+v+1) \Gamma(n+1)};$$

$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  - многочлен Якоби.

Имея в виду спектральное соотношение (3), подынтегральную функцию  $f(\rho)$  аппроксимируем интерполяционным многочленом с узлами в корнях многочлена  $T_n^{(v, \gamma-1)}(r)$ . Из представления многочлена  $T_n^{(v, \gamma-1)}(r)$  очевидным образом следует, что он четный и имеет  $2n$  корней  $\pm x_i$  ( $i=1, n$ ). Следовательно, интерполяционный многочлен можно выписать в следующем виде:

$$f(r) = -\frac{1}{2(n+v+\gamma)} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{f(x_i)}{(r-x_i)} - \frac{f(-x_i)}{(r+x_i)} \right] \frac{T_n^{(v, \gamma-1)}(r)}{x_i T_{n-1}^{(v+1, \gamma)}(x_i)} \quad (4)$$

Здесь

$$x_i = \sqrt{\frac{1-\xi_i}{2}}; \quad T_n^{(v, \gamma-1)}(x_i) = P_n^{(v, \gamma-1)}(\xi_i) = 0 \quad (i=1, n),$$

а также использовано выражение для производной от многочлена  $T_n^{(v, \gamma-1)}(r)$ :

$$\frac{d}{dr} T_n^{(v, \gamma-1)}(r) = -2r(n+v+\gamma) T_{n-1}^{(v+1, \gamma)}(r)$$

Функцию  $f(r)$ , определенную на  $(0,1)$ , продолжим на  $(-1,0)$  нечетным образом. Тогда, из формулы (4) будем иметь:

$$f(r) = -\frac{r}{(n+v+\gamma)} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{(r^2-x_i^2)} \frac{T_n^{(v, \gamma-1)}(r)}{x_i T_{n-1}^{(v+1, \gamma)}(x_i)} \quad (5)$$

Воспользуемся формулой Кристоффеля-Дарбу для многочленов Якоби [35]

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{P_m^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(y)}{h_m^{(\alpha, \beta)}} = \frac{k_{n-1}^{(\alpha, \beta)}}{k_n^{(\alpha, \beta)} h_{n-1}^{(\alpha, \beta)}} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(y) - P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(y)}{x-y}$$

где

$$h_m^{(\alpha, \beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(m+\alpha+1) \Gamma(m+\beta+1)}{(2m+\alpha+\beta+1) \Gamma(m+\alpha+\beta+1) \Gamma(m+1)},$$

$$k_m^{(\alpha, \beta)} = \frac{\Gamma(2m+\alpha+\beta+1)}{2^m \Gamma(m+\alpha+\beta+1) \Gamma(m+1)}$$

и сделаем в ней замену переменных  $x = 1-2r^2$  и  $y = x_i = 1-2\xi_i^2$ , получим

$$\frac{T_n^{(v, \gamma-1)}(r)}{r^2-x_i^2} = -\frac{(2n+v+\gamma-1)(2n+v+\gamma)}{(n+v)(n+\gamma-1) T_{n-1}^{(v, \gamma-1)}(x_i)} h_n^{(v, \gamma-1)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{T_m^{(v, \gamma-1)}(r) T_m^{(v, \gamma-1)}(x_i)}{h_m^{(v, \gamma-1)}} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), будем иметь

$$f(r) = A_n^{(v,\gamma)} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{x_i T_{n-1}^{(v+1,\gamma)}(x_i) T_{n-1}^{(v,\gamma-1)}(x_i)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{r T_m^{(v,\gamma-1)}(r) T_m^{(v,\gamma-1)}(x_i)}{h_m^{(v,\gamma-1)}} \quad (7)$$

где

$$A_n^{(v,\gamma)} = 2^{v+\gamma} (2n+v+\gamma-1) \frac{\Gamma(n+v)\Gamma(n+\gamma-1)}{\Gamma(n+v+\gamma+1)\Gamma(n+1)}.$$

Подставляя последнее выражение в интеграл (1) и меняя порядок интегрирования и суммирования, будем иметь:

$$I_v^\gamma(r) = A_n^{(v,\gamma)} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{a_i} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{T_m^{(v,\gamma-1)}(x_i)}{h_m^{(v,\gamma-1)}} \int_0^1 W_v^\gamma(r, \rho) (1-\rho^2)^{\gamma-1} \rho^{v+1} T_m^{(v,\gamma-1)}(\rho) d\rho$$

$$a_i = x_i T_{n-1}^{(v+1,\gamma)}(x_i) T_{n-1}^{(v,\gamma-1)}(x_i)$$

Подставляя же сюда значение интеграла из спектрального соотношения (3), окончательно получим следующую квадратурную формулу:

$$I_v^\gamma(r) = \sum_{i=1}^n w_i^{(v,\gamma)} f(x_i) R^{(v,\gamma)}(r, x_i) \quad (8)$$

$$x_i = \sqrt{\frac{1-\xi_i}{2}}; \quad P_n^{(v,\gamma-1)}(\xi_i) = 0;$$

$$w_i^{(v,\gamma)} = \frac{2n+v+\gamma-1}{2x_i T_{n-1}^{(v+1,\gamma)}(x_i) T_{n-1}^{(v,\gamma-1)}(x_i)} \frac{\Gamma(n+v)\Gamma(n+\gamma-1)}{\Gamma(n+v+\gamma+1)\Gamma(n+1)};$$

$$R_n^{(v,\gamma)}(r, x_i) = r^v \sum_{m=0}^{n-1} \frac{2m+v+\gamma}{2^{1-2\gamma}} \left( \frac{\Gamma(m+v+\gamma)}{\Gamma(m+v+1)} \right)^2 T_m^{(v,\gamma-1)}(x_i) T_m^{(v,\gamma-1)}(r);$$

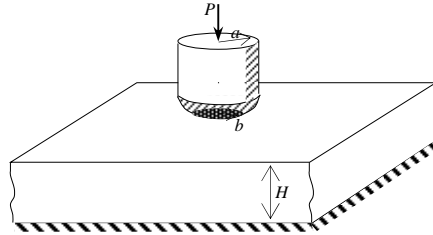
Нетрудно проверить, что имеет место и следующая квадратурная формула:

$$\int_0^1 f(x) (1-x^2)^{\gamma-1} x^{2v} dx = \sum_{i=1}^n w_i^{(v,\gamma)} f(x_i) \quad (9)$$

Отметим, что формулы (8) и (9) выполняются точно, если функция  $f(r)$  является нечетным многочленом порядка  $2n-1$ , т.е. представима в форме  $f(r) = r Q_{n-1}(r^2)$ , где  $Q_{n-1}(x)$  - многочлен порядка  $n-1$ .

**2. Осесимметричная контактная задача о вдавливании гладкого кругового жесткого штампа в упругий слой, нижняя грань которого жестко закреплена.** В цилиндрической системе координат  $Or\theta z$  рассмотрим упругий слой  $0 \leq z \leq H$ , в граничную поверхность  $z=0$  которой, под действием силы  $P$ , вдавливается круговой цилиндрический штамп с гладким основанием в форме тела вращения,

описываемого функцией  $af\left(\frac{r}{a}\right)(0 \leq r \leq a)$ . Предполагается, что торец штампа-цилиндра неполностью контактирует со слоем, т.е. зона контакта является кругом с радиусом  $b < a$ .



Фиг. 1 Схематическое представление задачи

Перейдем к безразмерным координатам:

$$\{r, z\} = a\{\rho, \zeta\}$$

и величинам

$$\{u_r, u_z, b, H\} = a\{u, w, b_*, h\}; \quad \{\sigma_z, \tau_{rz}\} = \mu\{\sigma, \tau\}.$$

Здесь, независимо от пункта 1, используются обозначения  $\mu$  для модуля сдвига и  $\nu$  для коэффициента Пуассона материала упругого слоя.

Решив осесимметричную задачу для слоя при граничных условиях

$$\begin{aligned} \sigma(\rho, 0) &= \begin{cases} -p(\rho) & 0 \leq \rho \leq b_*, \\ 0 & b_* < \rho < \infty, \end{cases} \\ \tau(\rho, 0) &= 0 \quad 0 \leq \rho < \infty, \\ u(\rho, h) &= 0; \quad w(\rho, h) = 0; \quad 0 \leq \rho < \infty. \end{aligned} \quad (10)$$

где  $p(\rho)$  - искомое нормальное контактное напряжение, для нормальной компоненты перемещения граничных точек слоя будем иметь:

$$w(\rho, 0) = (1 - \nu) \int_0^{b_*} (L_0(t, \rho) - M(t, \rho)) p(t) t dt \quad (11)$$

Здесь

$$L_0(t, \rho) = \int_0^\infty J_0(ts) J_0(s\rho) ds, \quad \kappa = 3 - 4\nu,$$

$$M(t, \rho) = \int_0^\infty \left( \frac{2(2hs - \kappa \operatorname{sh} 2hs)}{4h^2 s^2 + 1 + \kappa^2 + 2\kappa \operatorname{ch} 2hs} + 1 \right) J_0(\rho s) J_0(st) ds$$

В зоне контакта штампа-цилиндра с упругим слоем имеем условие:

$$w(\rho, 0) = \delta_* - f(\rho) \quad (0 < \rho < b_* < 1) \quad (12)$$

где  $\delta_* = \delta/a$  - относительная осадка штампа,  $f(\rho)$  - функция, описывающая основание штампа.

Должно выполняться также условие равновесия штампа-цилиндра:

$$2\pi \int_0^{b_*} p(\rho) \rho d\rho = \frac{P}{\mu a^2} \quad (13)$$

Подставив выражение  $w(\rho, 0)$  из (11) в условие контакта (12), получим определяющее интегральное уравнение с логарифмической особенностью в виде разрывного интеграла Вебера-Шафхейтлина  $L_0(t, \rho)$ :

$$(1 - \nu) \int_0^{b_*} (L_0(t, \rho) - M(t, \rho)) p(t) t dt = \delta_* - f(\rho) \quad (14)$$

Для того, чтобы построить решение уравнения (14) при условии (13) методом механических квадратур на основе предложенных выше квадратурных формул (8) и (9), сведем интервалы интегрирования к интервалу  $(0, 1)$ . Будем иметь:

$$(1 - \nu) b_* \int_0^1 (L(\eta, \xi) - N(\eta, \xi)) \varphi(\eta) d\eta = \delta_* - f(b_* \xi) \quad (0 < \xi < 1) \quad (15)$$

$$b_*^2 \int_0^1 \varphi(\eta) d\eta = Q$$

где  $\varphi(\eta) = p(b_* \eta) \eta$  - новая искомая функция,  $Q = \frac{P}{2\pi \mu a^2}$  - безразмерная внешняя сила,

$$L(\eta, \xi) = \int_0^\infty J_0(\eta \tau) J_0(\xi \tau) d\tau,$$

$$N(\eta, \xi) = \int_0^\infty \left( \frac{2b_* \left( 2h\tau - b_* \kappa \operatorname{sh} 2 \frac{h\tau}{b_*} \right)}{4h^2 \tau^2 + b_*^2 \left( 1 + \kappa^2 + 2\kappa \operatorname{ch} 2 \frac{h\tau}{b_*} \right)} + 1 \right) J_0(\eta \tau) J_0(\xi \tau) d\tau.$$

Решение системы уравнений (15) будем искать в виде:

$$\varphi(\eta) = \frac{\varphi_*(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \quad (16)$$

тогда система (15) примет вид:

$$\int_0^1 (L(\eta, \xi) - N(\eta, \xi)) \frac{\varphi_*(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \frac{\delta_* - f(b_* \xi)}{(1-\nu)b_*} \quad (0 < \xi < 1) \quad (17)$$

$$\int_0^1 \frac{\varphi_*(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \frac{Q}{b_*^2}$$

Условием для определения длины зоны контакта  $b_*$  является

$$\varphi_*(1) = 0 \quad (18)$$

Выпишем формулы (8) и (9) применительно к системе (17), т.е. когда  $\nu = 0, \gamma = 0.5$ ,

$$\int_0^1 L(\eta, \xi) \frac{f(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) R_0(\xi, x_i) \quad (19)$$

$$\int_0^1 \frac{g(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \sum_{i=1}^n w_i g(x_i)$$

где

$$T_n^{(\nu, \gamma-1)}(\rho) = P_n^{(\nu, \gamma-1)}(1-2\rho^2); \quad x_i = \sqrt{\frac{1-\xi_i}{2}}; \quad P_n^{(0, -\frac{1}{2})}(\xi_i) = 0;$$

$$w_i = \frac{4n-1}{x_i T_{n-1}^{(1, \frac{1}{2})}(x_i) T_{n-1}^{(0, -\frac{1}{2})}(x_i)} \frac{1}{n(4n^2-1)};$$

$$R_0(r, x_i) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} (4m+1) \left( \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)} \right)^2 T_m^{(0, -\frac{1}{2})}(x_i) T_m^{(0, -\frac{1}{2})}(r).$$

Согласно (5) имеем

$$\varphi_*(r) = -\frac{2r}{(2n+1)} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_*(x_i)}{(r^2 - x_i^2)} \frac{T_n^{(0, -0.5)}(r)}{x_i T_{n-1}^{(1, 0.5)}(x_i)} \quad (20)$$

Применив формулы (19) к системе (17), получим:

$$\sum_{i=1}^n w_i [R_0(\xi, x_i) - N(x_i, \xi)] \varphi_*(x_i) = \frac{\delta_* - f(b_* \xi)}{(1-\nu)b_*} \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \varphi_*(x_i) = \frac{Q}{b_*^2}$$

Выбрав в качестве точек коллокации для первого уравнения узлы квадратурных формул (19), получим систему линейных алгебраических уравнений из  $n+1$  урав-

нений относительно  $n+1$  неизвестных:  $n$  значений  $\varphi_*(x_i)$  ( $i=1, n$ ) и безразмерной осадки штампа  $\delta_*$ .

$$\sum_{i=1}^n w_i [R_0(x_k, x_i) - N(x_i, x_k)] \varphi_*(x_i) - \frac{\delta_*}{(1-\nu)b_*} = -\frac{f(b_*x_k)}{(1-\nu)b_*} \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \varphi_*(x_i) = \frac{Q}{b_*^2}$$

Очевидно, что при каждом значении  $b_*$  система (22) будет иметь решение, однако оно будет удовлетворять условию (18) только при определенном значении  $b_*$ .

Условие (18) с учетом выражения (20) записывается в виде:

$$\varphi_*(1) = -\frac{2}{(2n+1)} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_*(x_i)}{(1-x_i^2)} \frac{T_n^{(0,-0.5)}(1)}{x_i T_{n-1}^{(1,0.5)}(x_i)} = 0 \quad (23)$$

Подбором  $b_*$ , по методу деления отрезка пополам, добиваемся удовлетворения условия (23) и находим искомое значение  $b_*$ .

После определения величин  $\varphi_*(x_i)$  ( $i=1, n$ ), контактное давление под штампом определится по формуле:

$$p(r) = -\frac{2b_*^3}{(2n+1)\sqrt{b_*^2-r^2}} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_*(x_i)}{(r^2-b_*^2x_i^2)} \frac{T_n^{(0,-0.5)}\left(\frac{r}{b_*}\right)}{x_i T_{n-1}^{(1,0.5)}(x_i)} \quad (r \leq b_*) \quad (24)$$

Очевидно, что при  $b_* \leq 1$  и выполнении условия (23), т.е. при определенном значении внешней силы  $Q_{\max}$ , контактное давление на границе зоны контакта обращается в ноль. Если же  $b_*=1$  и  $Q > Q_{\max}$ , то контактное давление определяется формулой

$$p(r) = -\frac{2}{(2n+1)\sqrt{1-r^2}} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_*(x_i)}{(r^2-x_i^2)} \frac{T_n^{(0,-0.5)}(r)}{x_i T_{n-1}^{(1,0.5)}(x_i)} \quad (25)$$

где  $\varphi_*(x_i)$  ( $i=1, n$ ) решение системы (22) при  $b_*=1$ .

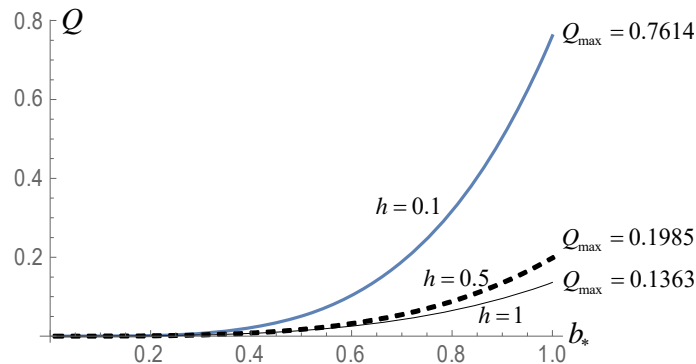
**2.1 Численный анализ.** Расчеты проводились для штампа с параболическим основанием, задаваемым формулой  $f(\rho) = 0.1\rho^2$ . Численный анализ сходимости решения показал, что даже при достаточно малой толщине слоя  $h=0.1$ , когда в большей степени проявляется влияние регулярного ядра, значения  $b_*$ , найденные



при  $n = 8$  и  $n = 16$  с обеспечением выполнения условия (23) до порядка  $10^{-9}$ , отличаются друг от друга на величину порядка  $10^{-5}$ . Расчеты, проведенные для заданного значения внешней силы  $Q$  по описанной выше процедуре, оказались сильно времязатратными.

Для построения зависимости между приложенной силой  $Q$  и радиусом зоны контакта  $b_*$ , целесообразно применить следующий подход: задать значение  $b_*$ , решить систему из первых  $n$  уравнений системы (22) вместе с уравнением (23) и затем из последнего уравнения системы (22) найти соответствующее значение силы  $Q$ .

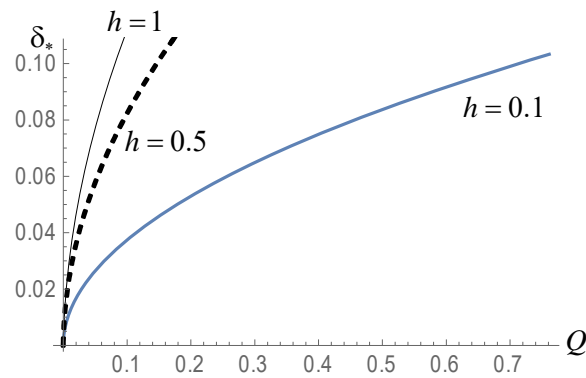
На фиг. 2 приведены графики зависимости между приложенной силой  $Q$  и радиусом зоны контакта  $b_*$ , рассчитанные для разных значений толщины слоя. У правого конца каждой кривой приведено то значение силы  $Q_{\max}$ , когда основание штампа полностью контактирует с основанием, но концентрации напряжений у границы пока нет.



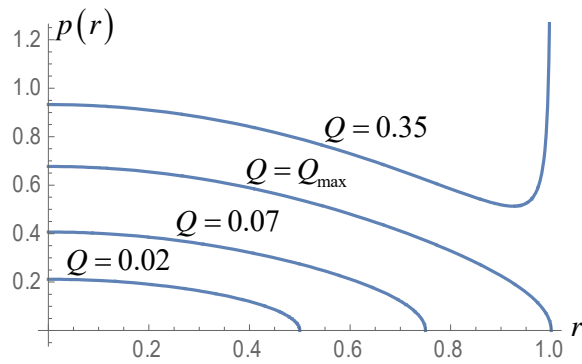
Фиг. 2. Кривые зависимости  $Q - b_*$  при разных значениях толщины  $h$ .

На фиг. 3 приведены графики зависимости между приложенной силой  $Q$  и осадкой штампа  $\delta_*$ , рассчитанные для тех же значений толщины слоя. Графики обрываются на соответствующих значениях  $Q_{\max}$ . Для выяснения закономерности поведения кривой для  $Q > Q_{\max}$  были проведены расчеты осадки штампа в случае, когда на границе зоны контакта контактное давление обращается в бесконечность. Выяснилось, что кривые плавно продолжают, не претерпевая никаких изменений при переходе через значение  $Q_{\max}$ .

На Фиг.4 представлены кривые распределения контактного давления при разных значениях внешней силы  $Q = 0.02; 0.07; Q_{\max} = 0.1985; 0.35$ , когда  $h = 0.5$ .

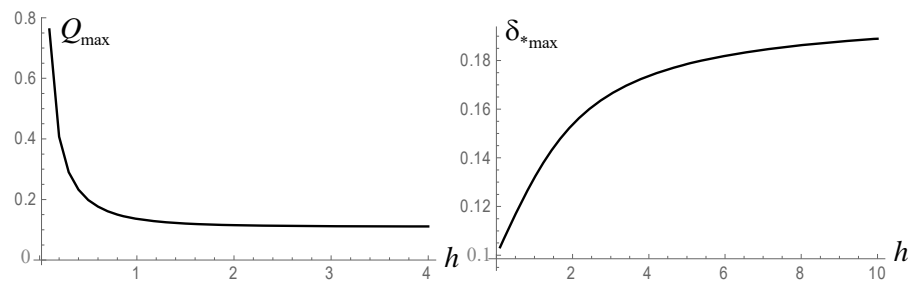


Фиг. 3. Кривые зависимости  $\delta_* - Q$  при разных значениях толщины  $h$ .



Фиг. 4 Распределение контактного давления

На фиг.5 представлены зависимости предельной силы  $Q_{\max}$  и соответствующей ей осадке штампа  $\delta_{*\max}$  от толщины слоя  $h$ .



Фиг. 5 Кривые зависимости  $Q_{\max} - h$  и  $\delta_{*\max} - h$ .

**Заключение.** Возможно впервые построена квадратурная формула для вычисления интеграла с ядром, являющимся разрывным интегралом Вебера-Шафхейтлина достаточно общего вида. Метод механических квадратур на основе построенной квадратурной формулы опробован на решении осесимметричной контактной задачи о вдавливании гладкого штампа с неплоским основанием в упругой слой, закрепленный по нижней грани. Эффективность метода проявляется в возможности подробнейшего численного анализа, представленного в виде графиков на Фиг. 2-5.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Young A. The application of product integration to the numerical solution of integral equations, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 224 (1954), 561–573.
2. Wagner C. On the numerical solution of Volterra integral equations, J. Math. Phys. 32 (1954), 289–301.
3. Белоцерковский С.М. Подковообразный вихрь при неустановившемся движении // ПММ.-1955. -т. XIX, вып.2., с. 159-164
4. Иванов В.В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений в случае разомкнутых контуров интегрирования ДАН СССР, 1956, т.108, №5, с.933-936.
5. Сафронов Н.Д. К приближенному решению сингулярных уравнений //ДАН СССР, 1956, т.111, №1, с.37-39.
6. Каландия А.И., Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применении в теории упругости, Матем. сб., 42(84):2 (1957), 249–272.
7. Пыхтеев Г.Н. О вычислении некоторых сингулярных интегралов с ядром типа Коши, ПММ, 1959, т. 23, № 6, сс.1074-1082.
8. Elliott D., The numerical solution of integral equations using Chebyshev polynomials, J. Australian Math. Soc. 1, 1959/60, pp. 334-356.
9. Stewart C. On the numerical evalution of singular integrals of Cauchy type. J. Soc. Ind. and Appl. Math.-1960,-V.8, №2., 156-163.
10. Junghanns P. and Rathsfeld A. On polynomial collocation for Cauchy singular integral equations with fixed singularities. Integral Equations and Operator Theory, Vol. 43(2002), No. 2, 155-176.
11. M Sheshko Singular integral equations with Cauchy and Hilbert kernels and theirs approximated solutions. The Learned Society of the Catholic University of Lublin, Lublin, 2003, 288p.
12. Iovane G., Lifanov I.K. and Sumbatyan M.A., On direct numerical treatment of hypersingular integral equations arising in mechanics and acoustics. Acta Mechanica 162(2003), 99–110.
13. Ma L.F. and Korsunsky A.M. A note on the Gauss-Jacobi quadrature formulae for singular integral equations of the second kind. International Journal of Fracture, Vol. 126 (2004), No 4, 399-405.
14. Okecha G.E. Solution of Cauchy-Type Singular Integral Equations of the First Kind with Zeros of Jacobi Polynomials as Interpolation Nodes. Hindawi Publ. Corp., International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 2007, Article ID 10957, 12 pages.

15. Cuminato J.A., Fitt A.D. and McKee S. A review of linear and nonlinear Cauchy singular integral and integro-differential equations arising in mechanics. *Journal of Integral Equations and Applications*. Vol. 19, No 2, Summer 2007, pp. 163-207.
16. Capobianco M. R., Criscuolo G. and Junghanns P. On the numerical solution of a hypersingular integral equation with fixed singularities. *Operator Theory: Advances and Applications, Recent Advances in Operator Theory and Applications Volume 187*, Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland, 2008, pp. 95-116.
17. Andreev, A.V. Method for determining power-type complex singularities in solutions of singular integral equations with generalized kernels and complex conjugate unknowns. *Mech. Solids*, 2009, v.44, pp. 691–704.
18. Nagamine A. and Cuminato J.A., A collocation method for solving singular integro-differential equations. *BIT Numer Math* (2010) 50: 657–688
19. Keller, P. A practical algorithm for computing Cauchy principal value integrals of oscillatory functions. *Appl. Math. Comput.* 2012, 218, 4988–5001.
20. Sahakyan, A.V., Shavlakadze, N.N. Two methods for direct numerical integration of the Prandtl equation and comparative analysis between them. *Comput. Math. and Math. Phys.* 54, 1244–1250 (2014).
21. Hota, M.K.; Soha, A.K.; Ojha, P.; Mohanty, T. On the approximate evolution of oscillatory-singular integrals. *Cogent Math.* 2017, 4, 1314066
22. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
23. Wang, Y.; Xiang, S. A Levin method for logarithmically singular oscillatory integrals. *arXiv* 2019, arXiv: 1901.05192v1
24. Саакян А.В. Решение задачи для краевой трещины с гиперсингулярным определяющим уравнением методом механических квадратур. *Известия НАН РА. Механика*. 2020, т.73, №2. с. 44-57, DOI: 10.33018/73.2.4.
25. Gao, J., Condon, M., Iserles, A., Gilvey, B., Trevelyan, J. Quadrature methods for highly oscillatory singular integrals. *Journal of Computational Mathematics*, Vol.39, No.2, 2021, 227–260. doi:10.4208/jcm.1911-m2019-0044
26. Boykov, I., Roudnev, V., Boykova, A. approximate methods for calculating singular and hypersingular integrals with rapidly oscillating kernels. *Axioms* 2022, 11, 150.
27. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., Наука, 1967, 404 с.
28. Zhupanska, O. I. (2009). Axisymmetric contact with friction of a rigid sphere with an elastic halfspace. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 465(2018), 2565–2588
29. Александров А.Я. Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи зависимостей между осесимметричными и плоскими основаниями. *ПММ*, 1961, т. 25, вып.5, сс. 912-920.
30. Айзикович С.М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // *ПММ*. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 148–158.
31. Попов Г.Я. Избранные труды. Том 1, Одесса, Издательско-полиграфический дом ВМВ, 2007, 438 с.

32. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ер., «Гитутюн» НАН РА, 2014, 322с.

33. Попов Г.Я. О применении многочленов Якоби к решению интегральных уравнений. Изв. ВУЗ-ов, Математика, 1966, № 4, сс. 77-85.

34. Мхитарян С.М. О спектральных соотношениях для интегральных операторов, порожденных ядром в виде интеграла Вебера-Сони́на, и их приложениях к контактнм задачам. ПММ, 1984, №1, сс. 105-113.

35. Szego G. Orthogonal polynomials. American Mathematical Society. 1939, 432 p.

**Сведения об авторе:**

**Саакян Аветик Вараздатович** - д.ф.м.н., зав.отделом Института механики НАН РА,  
Тел. (37494) 579348, E-mail: [avetik.sahakyan@sci.am](mailto:avetik.sahakyan@sci.am), [avsahakyan@gmail.com](mailto:avsahakyan@gmail.com)

Поступила в редакцию 12 августа 2025