

**ИЗУЧЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОЦЕССА ПРЕССОВАНИЯ  
ОБРАЗЦА ИЗ НЕСПЕЧЕННОГО ПОРОШКА В ЖЕСТКОЙ ЦИЛИНДРИ-  
ЧЕСКОЙ МАТРИЦЕ, ИСПОЛЬЗУЯ МОДИФИЦИРОВАННУЮ МОДЕЛЬ  
ТЕКУЧЕСТИ ДРУКЕРА-ПРАГЕРА**

Арзуманян М.Г.

**Ключевые слова:** неспеченный порошковый материал, модифицированная модель текучести Друкера-Прагера, жесткая цилиндрическая матрица, напряженное состояние, угол внутреннего трения, коэффициент сцепления, эволюционный параметр

Arzumanyan M.G.

**Studying the stress state of the compaction process of specimens from non-sintered powder in a hard  
cylindrical die using the modified Drucker-Prager cap model**

**Keywords:** non-sintered powder material, modified Drucker-Prager cap model, hard cylindrical die, stress state, internal friction angle, powder cohesion coefficient, evolution parameter.

For the compaction process stress state study of specimens from non-sintered powder materials in a hard cylindrical die, a simple theoretical formula for plastic deformation of powder materials for a cap surface of the modified Drucker-Prager cap model is used allowing to set a relation between the axial and lateral pressures. For some values of the internal friction angle, the cohesion factor between the grains of the powder material, the hydrostatic compression yield stress and the evolution parameter numerical calculations are performed, the diagrams of axial and lateral pressures dependent on specimen's axial coordinate are plotted, and the obtained results are analyzed.

Արզումանյան Մ.Գ.

**Կոշտ զլանական մամլամայրում չեռակալված փոշենմուշի մամլման գործընթացի լարվածային  
վիճակի հետազոտման Դրուկեր-Պրագերի ձևափոխված գլխարկաձև մոդելի օգտագործմամբ**

**Հիմնաբառեր:** չեռակալված փոշենյութ, Դրուկեր-Պրագերի ձևափոխված գլխարկաձև մոդել, կոշտ զլանական մամլամայր, լարվածային վիճակ, ներքին շփման անկյուն, կառչման գործակից, էվոլյուցիոն պարամետր

Կոշտ զլանական մամլամայրում չեռակալված փոշենմուշի մամլման գործընթացի լարվածային վիճակի հետազոտման համար օգտագործվել է Դրուկեր-Պրագերի ձևափոխված գլխարկաձև մոդելի գլխակի մակերևույթի պարզ տեսական բանաձևը, ինչը հնարավորություն է տվել կապ հաստատել առանցքային և կողմնային ճնշումների միջև: Փոշու հատիկների միջև ներքին շփման անկյան, կառչման գործակցի, ամրացման լարման և էվոլյուցիոն պարամետրի որոշակի արժեքների դեպքում առանցքային և կողմնային ճնշումների համար կատարվել են թվային հաշվարկներ, կառուցվել են դրանց գրաֆիկները՝ կախված փոշենմուշի առանցքային կոորդինատից, և ստացված արդյունքները վերլուծվել են:

Для исследования напряженного состояния процесса прессования цилиндрического брикета из неспеченного порошка в жесткой цилиндрической матрице была использована простая теоретическая формула пластической деформации порошковых материалов для шляпкообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера-Прагера, что дало возможность установить связь между осевым и боковым давлениями. При определенных значениях угла внутреннего трения, коэффициента сцепления между гранулами частиц порошка, напряжения упрочнения и эволюционного параметра для

осевого и бокового давлений выполнены расчеты, построены графики зависимости осевых и боковых давлений от осевой координаты образца и проанализированы полученные результаты.

**Введение.** В машиностроении широкое применение получили детали из порошковых материалов. Технологический процесс их изготовления в основном состоит из двух частей. Сначала проводят холодное прессование порошков в специальных прессформах. За счет пластической деформации материал уплотняется и получают неспеченные заготовки различных форм и размеров. Затем после спекания порошков их подвергают повторной обработке давлением, придавая им окончательный вид и плотность. В результате получают высококачественные детали с низким расходом энергии и материалов.

Таким образом, в порошковой металлургии одним из основных технологических процессов является холодное формование неспеченных заготовок. Детали, изготовленные из порошковых материалов, имеют разные пористость и плотность, что существенно влияет на их механические свойства. Отметим, что процесс холодного формования порошковых материалов используется также в производстве керамики, лекарственных препаратов, ядерного топлива и в других отраслях промышленности.

В [1] исследовано напряженное состояние полого шара из неспеченного порошкового материала, нагруженного внешним давлением. Задача решена с использованием условий пластичности Мора-Кулона для металлических порошков.

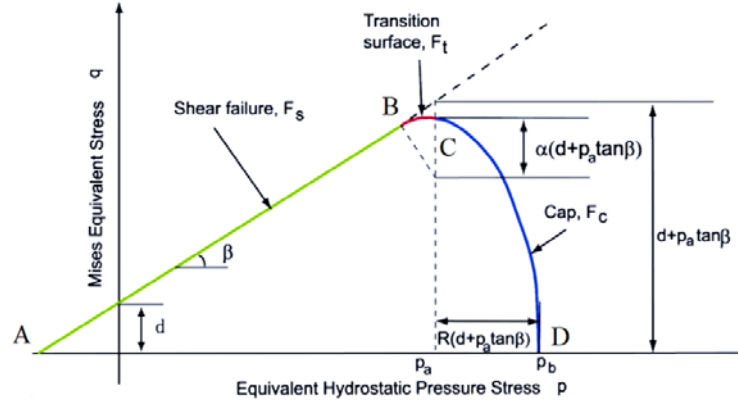
В [2] изучено напряженное состояние толстостенного полого шара из неспеченного металлического порошка в условиях всестороннего равномерного сжатия, используя условие пластичности Друкера-Прагера, и получены формулы для определения компонентов напряженного состояния. Произведены численные расчеты для радиального и меридионального напряжений при некоторых малых значениях угла внутреннего трения между частицами порошка, построены их графики в зависимости от текущего радиуса полого шара. Дан анализ полученных данных.

В [3] проанализирована модифицированная модель текучести Друкера-Прагера. На основе формул теории пластичности получены теоретические формулы пластической деформации неспеченного металлического порошкового материала для шляпкообразной поверхности. Полученные формулы дают возможность не только проводить исследование компонентов напряженно-деформированного состояния деталей из порошковых материалов, но и определять их текущие пористости (плотности).

В [4] проанализированы теоретические и экспериментальные исследования модифицированной модели текучести Друкера-Прагера. На основе формул теории пластичности получены теоретические формулы пластической деформации неспеченного металлического порошкового материала для шляпкообразной поверхности. Полученные формулы дают возможность не только проводить исследование компонентов напряженно-деформированного состояния деталей из порошковых материалов, но и определять их текущие пористости (плотности).

В [5] проанализированы исследования пластической деформации неспеченных порошковых материалов, имеющие большое теоретическое и практическое значение, и выявлены их особенности. Представлено условие пластичности, наиболее удобное для теоретического изучения напряженного состояния неспеченных порошковых материалов в процессах уплотнения, а также формула определения текущей пористости материала.

В [6,7] выполнен подробный анализ модифицированной модели текучести Друкера-Прагера для порошковых материалов. Модель состоит из двух основных частей: прямолинейной - поверхность текучести при сдвиге, и шляпообразной, пересекающей ось среднего напряжения, на основании чего осуществляется процесс пластического осаживания порошковых частиц. Эти части связаны друг с другом переходным участком (фиг. 1).



Фиг. 1. Типичная модифицированная модель текучести Друкера-Прагера [6,7]

Согласно фиг. 1, модифицированная модель текучести Друкера-Прагера состоит из трех участков [6,7]:

1. Поверхность (AB) текучести при сдвиге порошковых частиц, обеспечивающая течение, обусловленное сдвигом, записывается в виде [6]

$$f_{AB} = F_s = q - p \tan \beta - d = 0, \quad (1)$$

где  $p$  - среднее напряжение, а  $q$  - эквивалентное напряжение по Мизесу.

Здесь  $p$  и  $q$ , выраженные через главные напряжения, имеют следующий вид:

$$p = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3, \quad (2)$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (3)$$

2. Шляпообразная поверхность (CD), обеспечивающая механизм осаживания порошковых частиц, для представления пластического уплотнения записывается в виде [6]

$$f_{CD} = F_c = \sqrt{(p - p_a)^2 + \left[ \frac{Rq}{1 + \alpha - \alpha / \cos \rho} \right]^2} - R(d + p_a \tan \beta) = 0, \quad (4)$$

где  $R$  - параметр, характеризующий свойство материала, который управляет формой "шляпы";  $\alpha$  - небольшое число (обычно в диапазоне от 0,01 до 0,05), используемое для определения плавной переходной поверхности;  $p_a$  - эволюционный параметр, обусловленный прочностью или хрупкостью материала и представляющий собой объемную пластическую деформацию.

Шляпкообразная поверхность в модифицированной модели текучести Друкера-Прагера упрочняет материал или делает его хрупким как результат объемной функции пластической деформации. Когда происходит пластическое объемное уплотнение (материал сдвигается по шляпкообразной поверхности), порошковый материал упрочняется, а когда происходит объемная пластическая дилатансия (материал сдвигается по поверхности текучести), он становится хрупким [6].

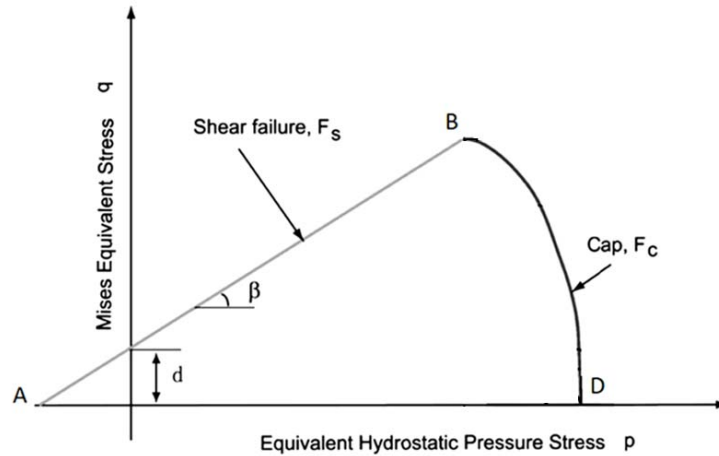
Связь между эволюционным параметром  $p_a$  и напряжением упрочнения  $p_b$  имеет следующий вид [6-8]:

$$p_b = p_a + R(d + p_a \operatorname{tg} \beta). \quad (5)$$

3. Участок плавного перехода (BC) между указанными двумя участками задается в виде [6,7]

$$f_{BC} = F_t = \sqrt{(p - p_a)^2 + \left[ q - \left( 1 - \frac{\alpha}{\cos \rho} \right) (d + p_a \operatorname{tg} \beta) \right]^2} - \alpha(d + p_a \operatorname{tg} \beta) = 0. \quad (6)$$

В [8-10] в модифицированной модели текучести Друкера-Прагера рассматриваются две следующие поверхности: поверхность текучести при сдвиге порошковых частиц и поверхность осаживания (шляпкообразный участок) (фиг. 2). При этом в представленной модели есть четыре независимых параметра  $R$ ,  $d$ ,  $\beta$  и  $p_b$ , значения которых должны определяться экспериментальными исследованиями порошковых материалов.



Фиг. 2. Модифицированная модель текучести Друкера-Прагера без переходного участка [8-10]

Как видно из фиг. 2, поверхность текучести при сдвиге сохраняет свой вид, а шляпкообразная поверхность представлена без коэффициента  $\alpha$ , определяющего плавную переходную поверхность [8-10]:

$$f_{CD} = F_c = \sqrt{(p - p_a)^2 + (Rq)^2} - R(d + p_a \operatorname{tg} \beta) = 0. \quad (7)$$

В [4] простым теоретическим методом обоснована модифицированная модель текучести Друкера-Прагера и на основе формул теории пластичности получена

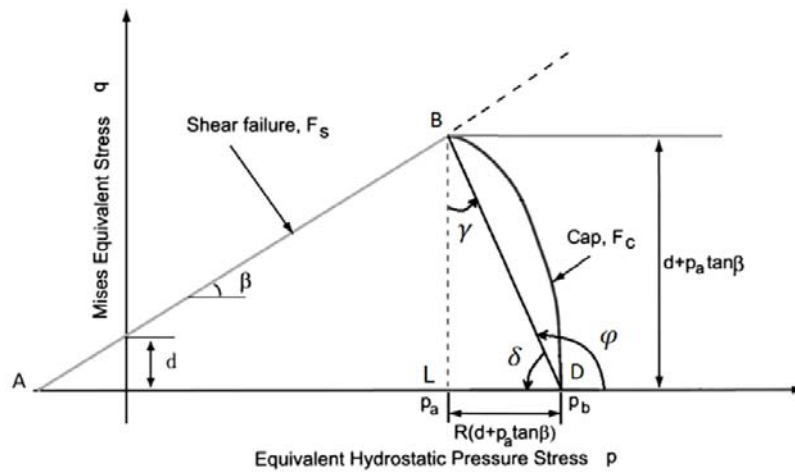
простая теоретическая формула пластической деформации порошковых материалов для шляпкообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера-Прагера (фиг. 3):

$$f_{BD} = F_L = qR - p - p_b = 0. \quad (8)$$

Условие пластичности (8), выраженное через главные напряжения, имеет вид [4]

$$f_{BD} = F_L = 0,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} R - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} - p_b = 0. \quad (9)$$



Фиг. 3. Упрощенный вид типичной модифицированной модели текучести Друкера-Прагера [4]

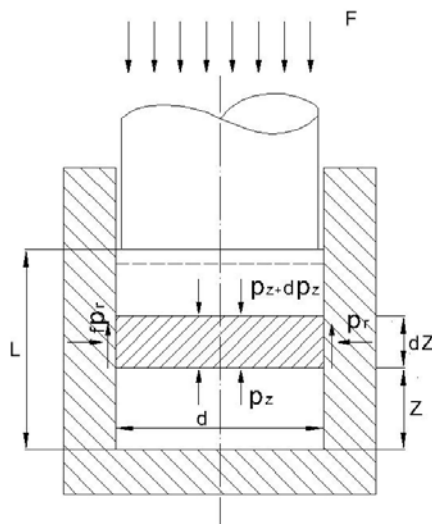
Отметим также, что на фиг. 3 котангенс угла, образованного прямой  $BD$  и осью  $p$ , равен  $\text{ctg } \delta = R$ .

Отметим, что теоретических исследований по пластической деформации для пористых материалов мало, особенно с использованием модифицированной модели текучести Друкера-Прагера. Следовательно, исследование напряженного состояния процесса прессования образца из неспеченного порошка в жесткой цилиндрической матрице является актуальной.

**Постановка задачи и решение.** Целью работы является исследование напряженного состояния процесса прессования цилиндрического брикета из неспеченного порошка в жесткой цилиндрической матрице с использованием простой теоретической формулы пластической деформации порошковых материалов для шляпкообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера-Прагера.

Для исследования напряженного состояния процесса прессования цилиндрического брикета из неспеченного порошка в жесткой цилиндрической матрице используется условие равновесия элемента, отделенного от образца двумя

параллельными сечениями и простая теоретическая формула пластической деформации порошковых материалов для шляпкообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера-Прагера.



Фиг. 4. Схема напряженного состояния при наличии трения о стенки матрицы (контейнера)

Для решения данной задачи используется условие равновесия элемента высотой  $dz$ , отделенного от цилиндрического образца двумя параллельными сечениями (фиг. 4) [11]:

$$D \cdot dp_z = 4f p_r dz, \quad (10)$$

где  $D$  - диаметр образца;  $f$  - коэффициент трения между матрицей и заготовкой;  $p_z$  - давление, действующее по направлению оси заготовки;  $p_r$  - боковое давление.

При анализе напряженного состояния образца, пренебрегая касательными напряжениями, осуществляется оценка главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

Принимается:

$$\sigma_\theta = \sigma_r = \sigma_1 = \sigma_2 = -p_r, \quad \sigma_3 = \sigma_z = -p_z \quad (p_z > p_r).$$

где  $\sigma_z, \sigma_\theta, \sigma_r$  - соответственно осевое, окружное и радиальное напряжения.

Определим значение  $p$  и  $q$  для вышеприведенного напряженного состояния

$$p = \left( \frac{2\sigma_1 + \sigma_3}{3} \right) = \left( \frac{-2p_r - p_z}{3} \right) = -\frac{2p_r + p_z}{3},$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2}[(-p_r + p_z)^2 + (-p_z + p_r)^2]} = |p_r - p_z| = p_z - p_r.$$

Подставляя значение  $p$  и  $q$  в условие пластичности (8), представим его в следующем виде

$$\begin{aligned}(p_z - p_r)R + \frac{2p_r + p_z}{3} - p_b &= 0, \\ 3p_z R - 3p_r R + 2p_r + p_z - 3p_b &= 0, \\ p_z(1 + 3R) + p_r(2 - 3R) - 3p_b &= 0, \\ p_r(2 - 3R) &= 3p_b - p_z(1 + 3R),\end{aligned}$$

из которого определим  $p_r$

$$p_r = \frac{3p_b - p_z(1 + 3R)}{2 - 3R}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в уравнение равновесия (10) приведем его к виду

$$dp_z = 4f \left[ \frac{3p_b - p_z(1 + 3R)}{2 - 3R} \right] \frac{dz}{D}. \quad (12)$$

Запишем (12) в более удобном для нас виде

$$dp_z = \left[ \frac{12fp_b}{2 - 3R} - \frac{p_z 4f(1 + 3R)}{2 - 3R} \right] \frac{dz}{D}. \quad (13)$$

Приняв обозначения

$$a = \frac{12fp_b}{2 - 3R}, \quad b = -\frac{4f(1 + 3R)}{2 - 3R}, \quad (14)$$

из (13) получим:

$$dp_z = (a + bp_z) \frac{dz}{D}. \quad (15)$$

Дифференциальное уравнение (15) сначала представим в виде

$$\frac{d(a + bp_z)}{(a + bp_z)} = b \frac{dz}{D},$$

и, интегрируя его, получим:

$$\int \frac{d(a + bp_z)}{(a + bp_z)} = \int b \frac{dz}{D},$$

$$\ln(a + bp_z) = \frac{b}{D} z + C. \quad (16)$$

Для определения константы  $C$  используем следующее граничное условие:

$$\text{при } z = H \quad p_z = p_0. \quad (17)$$

Подставляя условие (17) в (16), получим следующее значение  $C$

$$C = \ln(a + bp_0) - \frac{b}{D} H, \quad (18)$$

что дает возможность из (16) получить следующую формулу для определения величины осевого давления  $p_z$

$$\begin{aligned} \ln(a + bp_z) &= \frac{b}{D} z + \ln(a + bp_0) - \frac{b}{D} H, \\ \ln\left(\frac{a + bp_z}{a + bp_0}\right) &= \frac{b}{D} (z - H), \\ \frac{a + bp_z}{a + bp_0} &= e^{\frac{b}{D}(z-H)}, \\ p_z &= \frac{(a + bp_0)e^{\frac{b}{D}(z-H)} - a}{b}. \end{aligned} \quad (19)$$

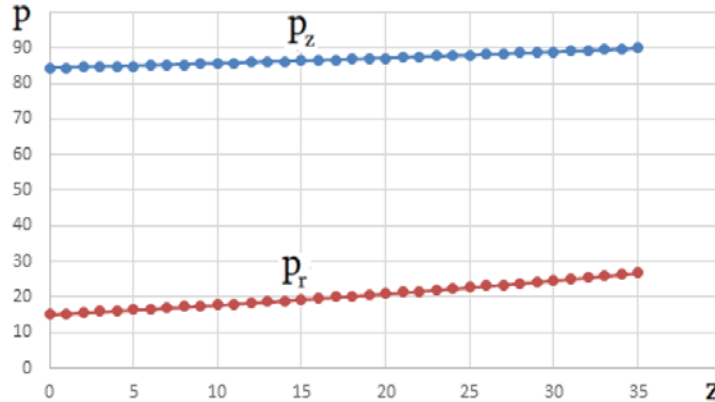
Учитывая принятые в (14) обозначения, из (11) и получим окончательную формулу для определения  $p_r$ :

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{3p_b}{2-3R} - \frac{p_z(1+3R)}{2-3R}, \\ p_r &= \frac{12fp_b}{4f(2-3R)} - \frac{4f(1+3R)p_z}{4f(2-3R)}, \\ p_r &= \frac{a}{4f} + \frac{bp_z}{4f}, \\ p_r &= \frac{a + bp_z}{4f}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для численных расчетов нужно корректно выбрать величины, которые характеризуют механические свойства порошка, а также коэффициент трения между матрицей и заготовкой, чтобы при решении задачи обеспечивалось выполнение условия положительности бокового давления  $p_r > 0$ .



Численные расчеты компонентов напряженного состояния проведены в программной среде “Excel” для значений  $D = 25\text{ мм}$  и  $H = 35\text{ мм}$  при  $d = 40\text{ МПа}$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $R = 0.99$ ,  $p_a = 4\text{ МПа}$ ,  $f = 0.05$ ,  $p_0 = 90\text{ МПа}$ . С помощью полученных данных были построены графики  $p_z$  и  $p_r$  в зависимости от  $z$  (фиг. 5).



Фиг. 5. Графики осевого и бокового давлений

**Закключение.** Таким образом, изучено напряженное состояние процесса прессования неспеченной порошковой заготовки в жесткой цилиндрической матрице при наличии контактного трения между ней и матрицей. Была использована простая теоретическая формула пластической деформации порошковых материалов для шляпкообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера-Прагера и метод тонких сечений. Получены формулы для определения осевого и бокового давлений в зависимости от текущей высоты матрицы и были построены их графики в зависимости от  $z$ .

Из полученных графиков видно, что и осевое и боковое давления наибольшее значение принимают верхней поверхности образца и монотонно убывают вглубь образца, при этом значения бокового давления составляют 19-31% от осевого давления, что находится в пределах экспериментальных данных [12].

Полученные формулы позволяют определить параметры процесса уплотнения по всему объему заготовки (среднее напряжение и пористость), а также произвести расчет прочности пуансона и матрицы, выбора пресса и решать другие практические задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Перельман В.Е. Формование порошковых материалов. - М.: Металлургия, 1979. – 232 с.
2. Петросян Г.Л., Арзуманян М.Г. Исследование напряженного состояния полого шара из неспеченного порошкового материала в условиях равномерного трехосного сжатия // ЛНТУ. Міжвузівський збірник "Наукові нотатки" - Луцьк, 2016. Випуск № 53- С.113-118

3. Петросян Г.Л., Арзуманян М.Г., Бабаян А.А. Особенности модифицированной модели текучести Друкера-Прагера в процессах деформирования неспечённых порошковых материалов // Вестник инженерной академии Армении. -2021.- Вып. 18, No2. - С. 211-218.
4. Арзуманян М.Г. Обоснование модифицированной модели текучести Друкера – Прагера для порошковых материалов // Доклады НАН РА. -2022.- Вып. 122, No2.- С.133-140
5. Арзуманян М.Г. Особенности пластического деформирования неспеченных порошковых материалов // Вестник, Механика, машиноведение, машиностроение. НПУА. Сер. -2023. - No2.-С.53-62
6. ABAQUS, 2006. ABAQUS 6.6 Theory Manual. ABAQUS Inc.
7. Han L.H., Elliott J.A., Bentham A.C., Mills A., Amidon G.E., Hancock B.C., 2007. A modified Drucker-Prager Cap model for die compaction simulation of pharmaceutical powders. International Journal of Solids and Structures 45 (2008) 3088–3106.
8. Rottman G. Mechanisches Verhalten beim Trockenpressen – Triaxialversuche an SiC and Stahlpulver zur Untersuchung von Werkstoffmodellen: Dissertation of Doctor of Material Science.- Fraunhofer IWM , Germany, Mai, 2001. – 102 p.
9. Goube O., Riedel H. Numerical simulation of powder die compaction with special consideration of cracking // Powder Metallurgy. – 2000.- Vol. 43, N2.- P. 123-131.
10. Doremus P., Toussaint F., Alvain O. Simple tests and standard procedure for the characterization of green compacted powder // Recent developments in computer modeling of powder metallurgy processes. IOS Press, 2001.- P. 29-41.
11. Петросян Г.Л. Пластическое деформирование порошковых материалов.-М.: Металлургия, 1988.-153 с.
12. Бальшин М.Ю. Научные основы порошковой металлургии и металлургии волокна. - М.: Металлургия, 1972. - 535 с.

**Сведения об авторе:**

**Арзуманян Мартин Галерикович**, к.т.н., доцент, кафедра “Машиноведение и Машиностроение”, НПУА. **Адресс:** 0009, Ереван, ул. Теряна, 105.  
**Тел.:** (+37494) 751675, E-mail: [arzmartin@rambler.ru](mailto:arzmartin@rambler.ru)

Поступила в редакцию 19 ноября 2025