ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 78, №1, 2025 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2025.78.1-37

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ НАЛИЧИИ ДАННЫХ О ПЕРЕМЕЩЕНИИ ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА

Гулгазарян Л.Г., Амбарцумян П.Р.

Ключевые слова: 3D динамическая задача, асимптотический метод, трехслойная пластинка, датчики измерений.

Ghulghazaryan L.G., Hambardzumyan P.R.

Mixed Boundary-Value Problem of Forced Vibrations of a Three-Layered Plate in the Presence of Data about the Displacement of Contact Surface Points

Keywords: 3D dynamic problem, asymptotic method, , three-layered plate, measuring instrument.

The forced vibrations of three-layered orthotropic plate at full contact between the layers are considered, when mixed boundary conditions are set on the upper front surface of the plate, and the values of the displacement vector components are taken from the contact surface between the first and second layers, as data from measuring instruments. The amplitudes of vibrations are determined and the conditions for the occurrence of resonance are derived. The private solution of the corresponding dynamic equations and relations of the three-dimensional problem of elasticity theory is obtained by the asymptotic method.

Ղուլղազարյան Լ.Գ., Համբարձումյան Փ.Ռ.

Եռաշերտ սալի ստիպողական տատանումների խառը եզրային խնդիր՝ կոնտակտի մակերևույթի կետերի տեղափոխությունների տվյալների առկայության դեպքում

Հիմնաբառեր. 3D դինամիկ խնդիր, ասիմպտոտիկ մեթոդ, եռաշերտ սալ, չափիչ սարքեր.

Դիտարկված են եռաշերտ օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումները, երբ շերտերի միջև առկա է լրիվ կոնտակտ, վերին դիմային մակերևույթի վրա տրված են խառը եզրային պայմաններ, իսկ տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների արժեքները վերցված են առաջին և երկրորդ շերտերի միջև կոնտակտի մակերևույթից, որպես չափիչ սարքերից ստացված տվյալներ: Դուրս են բերված ռեզոնանսի առաջացման պայմանները և արտածված են տատանման ամպլիտուդները: Ասիմպտոտիկ մեթոդի կիրառմամբ՝ ստացված է առաձգականության տեսության եռաչափ խնդրի համապատասխան դինամիկ հավասարումների և առընչությունների մասնավոր լուծումը:

Рассмотрены вынужденные колебания трехслойной ортотропной пластинки при полном контакте между слоями, когда на верхней лицевой поверхности пластинки заданы смешанные граничные условия, а значения компонент вектора перемещения сняты с поверхности контакта между слоями, как данные измерительных приборов. Определены амплитуды колебаний и выведены условия возникновения резонанса. Асимптотическим методом получено частное решение соответствующих динамических уравнений и соотношений трехмерной задачи теории упругости.

Введение. В современной инженерии в качестве оптимальных конструктивных элементов используются упругие тонкие многослойные пакеты, состоящие из балок, пластин или оболочек. В строительных конструкциях, мониторинг перемещений точек между слоями и возникающих в конструкциях деформаций и напряжений важен для оценки механических свойств и поведения материалов в условиях эксплуатации, а также помогает рано выявить потенциальные проблемы и снизить риск аварийных ситуаций. Это особенно актуально для критических конструкций, таких как авиационные и космические компоненты, где безопасность играет решающую роль.

Таким образом, умение оценивать и предсказывать напряженно-деформированное состояние многослойных конструкций не только повышает их производительность и безопасность, но и способствует развитию инженерных наук и технологий в целом. Знание напряженно-деформированного состояния многослойных конструкций является критически важным аспектом в инженерных и технических приложениях, особенно когда необходимо оценить деформации и напряжения на нижней поверхности конструкции, а по каким-либо причинам прямое измерение этих параметров невозможно.

В фундаментальных исследованиях Э.И. Григолюка [1], Я.М. Григоренко [2] и J.N. Reddy [3] с помощью гипотез разработаны методы расчета многослойных элементов конструкций и их математических моделей. Асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений оказался эффективным при определении напряженно-деформированных состояний слоистых пакетов, когда верхняя поверхость свободна, данные измерений сняты с поверхности контакта между различными слоями, а также при наличии вязкого сопротивления [4-6]. На основе уравнений пространственной задачи теории упругости получены асимптотические решения неклассических краевых задач о колебаниях ортотропных пакетов, при различных условиях контакта между слоями, обзор которых представлен в работе [7].

В данной работе решена внешняя динамическая задача трехслойной ортотропной пластинки, когда значения компонент вектора перемещения сняты с поверхности контакта между первым и вторым слоями с помощью установленных измерительных датчиков. На верхней лицевой поверхности заданы смешанные граничные условия, а между слоями заданы условия полного контакта.

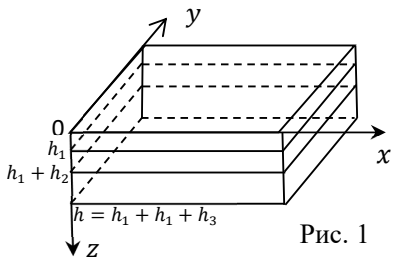

Рис. 1

1. Постановка задачи. Рассматриваются вынужденные колебания трехслойной ортотропной пластинки (рис. 1), $D = \{(x, y, z), 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le h,\ min(a, b) = l,\ h = h_1 + h_2 + h_3 \ll l\}$, где h_i, $i = 1,2,3$ толщины слоев пластины. Требуется найти ненулевые решения динамических уравнений пространственной задачи теории упругости для ортотропных сред при неклассических краевых условиях [8-9].

Имеем:

уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(j)}}{\partial z} = \rho^{(j)} \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial t^2} \qquad (1.1)$$
$$(x, y, z;\ u, v, w),\ \ j = I, II, III;$$

уравнения состояния (соотношения упругости) для ортотропного тела

$$\frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} = a_{11}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + a_{12}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} + a_{13}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j)}\ ,\quad \frac{\partial u^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial x} = a_{66} \sigma_{xy}^{(j)},$$
$$\frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} = a_{12}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + a_{22}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} + a_{23}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j)}\ ,\quad \frac{\partial w^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(j)}}{\partial z} = a_{55} \sigma_{xz}^{(j)}, \qquad (1.2)$$
$$\frac{\partial w^{(j)}}{\partial z} = a_{13}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + a_{23}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} + a_{33}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j)}\ ,\quad \frac{\partial w^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial z} = a_{44} \sigma_{yz}^{(j)},$$

где $\rho^{(j)}$ – плотности слоев, $a_{ik}^{(j)}$– постоянные упругости ($a_{ik}^{(j)} = a_{ki}^{(j)}$), j – номер слоя.

На лицевой поверхности $z = 0$ заданы условия:

$$\sigma_{xz}^{I}(x,y,0,t) = 0, \quad \sigma_{yz}^{I}(x,y,0,t) = 0, \quad \mathrm{W}^{I}(0) = 0. \tag{1.3}$$

На поверхности контакта между первым и вторым слоями известны значения перемещений точек поверхности контакта, как данные датчиков или других измерительных средств:

$$u^{I}(x,y,h_1,t) = u^{II}(x,y,h_1,t) = u^{+}(x,y)\,exp(i\Omega t) \qquad (u,v,w), \tag{1.4}$$

где Ω – частота вынужденных колебаний точек поверхности контакта между первым и вторым слоями пластинки.

На поверхности контакта между слоями должны выполняться условия полного контакта:

$$\begin{aligned} &\sigma_{xz}^{I}(x,y,h_1,t) = \sigma_{xz}^{II}(x,y,h_1,t) \qquad \left(\sigma_{xz},\sigma_{yz},\sigma_{zz}\right), \\ &u^{I}(x,y,h_1,t) = u^{II}(x,y,h_1,t) \qquad (u,v,w). \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_{xz}^{II}(x,y,h_1+h_2,t) = \sigma_{xz}^{III}(x,y,h_1+h_2,t) \qquad \left(\sigma_{xz},\sigma_{yz},\sigma_{zz}\right), \\ &u^{II}(x,y,h_1+h_2,t) = u^{III}(x,y,h_1+h_2,t) \qquad (u,v,w). \end{aligned} \tag{1.6}$$

В [8] показано, что сформулированная неклассическая краевая задача всегда имеет решение.

2. Общее асимптотическое решение задачи. В уравнениях (1.1), (1.2) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям по формулам

$$\begin{aligned} &\xi = x/l, \ \eta = y/l, \ \zeta = z/h, \\ &U^j = u^j/l, \ V^j = v^j/l, \ W^j = w^j/l, \quad j = I,II,III. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Решение преобразованных уравнений будем искать в виде

$$Q^{(j)} = Q^{(j)}(\xi,\zeta)\,exp(i\Omega t), \ j = I,II,III, \tag{2.2}$$

где $Q^{(j)}$ – любое из напряжений и перемещений. В результате получается сингулярно возмущенная малым параметром $\varepsilon = h/l$ система относительно $Q^{(j)}$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_{xx}^{(j)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{(j)}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xz}^{(j)}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\rho^{(j)}(\Omega_*)^2U^{(j)} = 0, \ \ (x,y,z;U,V,W), \\ &\frac{\partial U^{(j)}}{\partial\xi} = a_{11}^{(j)}\sigma_{xx}^{(j)} + a_{12}^{(j)}\sigma_{yy}^{(j)} + a_{13}^{(j)}\sigma_{zz}^{(j)}, \qquad \frac{\partial U^{(j)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial\xi} = a_{66}^{(j)}\sigma_{xy}^{(j)}, \\ &\frac{\partial V^{(j)}}{\partial\eta} = a_{12}^{(j)}\sigma_{xx}^{(j)} + a_{22}^{(j)}\sigma_{yy}^{(j)} + a_{23}^{(j)}\sigma_{zz}^{(j)}, \qquad \frac{\partial W^{(j)}}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial U^{(j)}}{\partial\zeta} = a_{55}^{(j)}\sigma_{xz}^{(j)}, \\ &\varepsilon^{-1}\frac{\partial W^{(j)}}{\partial\zeta} = a_{13}^{(j)}\sigma_{xx}^{(j)} + a_{23}^{(j)}\sigma_{yy}^{(j)} + a_{33}^{(j)}\sigma_{zz}^{(j)}, \\ &\frac{\partial W^{(j)}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial V^{(j)}}{\partial\zeta} = a_{44}^{(j)}\sigma_{yz}^{(j)}, \ \Omega_*^2 = h^2\Omega^2, \ j = I,II,III. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Решение внешней задачи будем искать в виде асимптотического представления

$$\begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta}^{(j)} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{\alpha\beta}^{(j,s)}, \quad \alpha,\beta = x,y,z; \ \ s = \overline{0,N}, \\ &\left(U^{(j)},V^{(j)},W^{(j)}\right) = \varepsilon^{s}\left(U^{(j,s)},V^{(j,s)},W^{(j,s)}\right), \quad j = I,II,III. \end{aligned} \tag{2.4}$$

$s = \overline{0,N}$ здесь и далее означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование в пределах целочисленных значений 0, *N*.

Подставив (2.4) в (2.3) и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при ε, получим новую систему:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(j,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(j,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 \rho^{(j)} U^{(j,s)} = 0, \ \ (x, y, z; U, V, W)$$

$$\frac{\partial U^{(j,s-1)}}{\partial \xi} = a_{11}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j,s)} + a_{12}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j,s)} + a_{13}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j,s)},$$

$$\frac{\partial V^{(j,s-1)}}{\partial \eta} = a_{12}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j,s)} + a_{22}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j,s)} + a_{23}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j,s)}, \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial W^{(j,s)}}{\partial \zeta} = a_{13}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j,s)} + a_{23}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j,s)} + a_{33}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j,s)}, \ \ \frac{\partial W^{(j,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(j,s)}}{\partial \zeta} = a_{55}^{(j)} \sigma_{xz}^{(j,s)},$$

$$\frac{\partial W^{(j,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(j,s)}}{\partial \zeta} = a_{44}^{(j)} \sigma_{yz}^{(j,s)}, \ \ \frac{\partial U^{(j,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(j,s-1)}}{\partial \xi} = a_{66}^{(j)} \sigma_{xy}^{(j,s)}.$$

Из системы (2.5) все напряжения можно выразить через перемещения по формулам:

$$\sigma_{xx}^{(j,s)} = -A_{23}^{(j)} \frac{\partial W^{(j,s)}}{\partial \zeta} + A_{22}^{(j)} \frac{\partial U^{(j,s-1)}}{\partial \xi} - A_{12}^{(j)} \frac{\partial V^{(j,s-1)}}{\partial \eta},$$

$$\sigma_{yy}^{(j,s)} = -A_{13}^{(j)} \frac{\partial W^{(j,s)}}{\partial \zeta} - A_{12}^{(j)} \frac{\partial U^{(j,s-1)}}{\partial \xi} + A_{33}^{(j)} \frac{\partial V^{(j,s-1)}}{\partial \eta},$$

$$\sigma_{zz}^{(j,s)} = A_{11}^{(j)} \frac{\partial W^{(j,s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^{(j)} \frac{\partial U^{(j,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(j)} \frac{\partial V^{(j,s-1)}}{\partial \eta}, \qquad (2.6)$$

$$\sigma_{xy}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{66}^{(j)}} \left[\frac{\partial U^{(j,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(j,s-1)}}{\partial \xi} \right], \quad \sigma_{xz}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(j)}} \left[\frac{\partial U^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(j,s-1)}}{\partial \xi} \right],$$

$$\sigma_{yz}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{44}^{(j)}} \left[\frac{\partial V^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(j,s-1)}}{\partial \eta} \right], \quad j = I, II, III,$$

где

$$A_{11}^{(j)} = \frac{a_{11}^{(j)} a_{22}^{(j)} - a_{12}^{(j)2}}{\Delta^{(j)}}, \quad A_{22}^{(j)} = \frac{a_{22}^{(j)} a_{33}^{(j)} - a_{23}^{(j)2}}{\Delta^{(j)}}, \ A_{33}^{(j)} = \frac{a_{11}^{(j)} a_{33}^{(j)} - a_{13}^{(j)2}}{\Delta^{(j)}},$$

$$A_{12}^{(j)} = \frac{a_{12}^{(j)} a_{33}^{(j)} - a_{23}^{(j)} a_{13}^{(j)}}{\Delta^{(j)}}, \ A_{13}^{(j)} = \frac{a_{11}^{(j)} a_{23}^{(j)} - a_{12}^{(j)} a_{13}^{(j)}}{\Delta^{(j)}}, \ A_{23}^{(j)} = \frac{a_{22}^{(j)} a_{13}^{(j)} - a_{12}^{(j)} a_{23}^{(j)}}{\Delta^{(j)}},$$

$$\Delta^{(j)} = a_{11}^{(j)} a_{22}^{(j)} a_{33}^{(j)} + 2 a_{12}^{(j)} a_{13}^{(j)} a_{23}^{(j)} - a_{22}^{(j)} a_{13}^{(j)\,2} - a_{11}^{(j)} a_{23}^{(j)\,2} - a_{33}^{(j)} a_{12}^{(j)\,2}.$$

Для определения функций $U^{(j,s)}, V^{(j,s)}, W^{(j,s)}, (j = I, II, III)$ получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 U^{(j,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^{(j)} \rho^{(j)} (\Omega_*)^2 U^{(j,s)} = R_U^{(j,s)}, (\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}) \qquad (2.7)$$

где

$$R_U^{(j,s)} = -\frac{\partial^2 W^{(j,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55}^{(j)} \left[\frac{\partial \sigma_{xx}^{(j,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(j,s-1)}}{\partial \eta} \right], \qquad j = I, II, III,$$

$$R_V^{(j,s)} = -\frac{\partial^2 W^{(j,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - a_{44}^{(j)} \left[\frac{\partial \sigma_{xy}^{(j,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(j,s-1)}}{\partial \eta} \right], \qquad (2.8)$$

$$R_W^{(j,s)} = \frac{1}{A_{11}^{(j)}}\left[A_{23}^{(j)}\frac{\partial^2 U^{(j,s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta} + A_{13}^{(j)}\frac{\partial^2 V^{(j,s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} - \frac{\partial\sigma_{xz}^{(j,s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\sigma_{yz}^{(j,s-1)}}{\partial\eta}\right],$$

$j = I, II, III.$, $Q^{(j,n)} \equiv 0$ при n < 0.

Решениями уравнений (2.7) являются:

$$U^{(j,s)} = C_{u1}^{(j,s)}(\xi,\eta)sin\Omega_*\sqrt{a_{55}^{(j)}\rho^{(j)}}\zeta + C_{u2}^{(j,s)}\cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{(j)}\rho^{(j)}}\zeta + \overline{U}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta)$$
$$(\mathrm{U,V,W}; a_{55}^{(j)}, a_{44}^{(j)}, \tfrac{1}{\mathrm{A}_{11}^{(j)}}), \qquad (2.9)$$

$\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}$- частные решения уравнений (2.7).

После удовлетворения условий (1.3), (1.4), компоненты вектора перемещения для первого слоя определятся по формулам ($0 \le \zeta \le \zeta_1,\ \zeta_1 = \frac{h_1}{h}$):

$$U^{(I,s)} = \left(U^+ - \overline{U}^{(I,s)}(\zeta_1)\right)\cdot\frac{\cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\mathrm{I}}\rho^{\mathrm{I}}}\zeta}{\cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\mathrm{I}}\rho^{\mathrm{I}}}\zeta_1} -$$

$$\frac{1}{\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\mathrm{I}}\rho^{\mathrm{I}}}}\left[\frac{\partial\overline{U}^{(I,s)}(0)}{\partial\zeta} + \frac{\partial W^{(I,s-1)}(0)}{\partial\xi}\right]\cdot\frac{\sin\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\mathrm{I}}\rho^{\mathrm{I}}}(\zeta-\zeta_1)}{\cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\mathrm{I}}\rho^{\mathrm{I}}}\zeta_1} + \overline{U}^{(I,s)}(\zeta),$$
$$(U,V;\xi,\eta;a_{55},a_{44})$$

$$W^{(I,s)} = \left(W^+ - \overline{W}^{(I,s)}(0)\right)\cdot\frac{\sin\Omega_*\sqrt{\rho^{\mathrm{I}}/A_{11}^I}\zeta}{\sin\Omega_*\sqrt{\rho^{\mathrm{I}}/A_{11}^I}\zeta_1} + \qquad (2.10)$$

$$+\overline{W}^{(I,s)}(0)\frac{\sin\Omega_*\sqrt{\rho^{\mathrm{I}}/A_{11}^I}(\zeta-\zeta_1)}{\sin\Omega_*\sqrt{\rho^{\mathrm{I}}/A_{11}^I}\zeta_1} + \overline{W}^{(I,s)}(\zeta).$$

Для второго слоя $(\zeta_1 \le \zeta \le \zeta_2, \zeta_2 = \frac{h_1+h_2}{h})$:

$$U^{(II,s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{a_{55}^{\mathrm{II}}}{\rho^{\mathrm{II}}}}\left(\sigma_{xz}^{(I,s)}(\zeta_1) - \tilde{\sigma}_{xz}^{(II,s)}(\zeta_1)\right)\sin\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\mathrm{II}}\rho^{\mathrm{II}}}(\zeta-\zeta_1) +$$

$$\left(U^{+(s)} - \overline{U}^{(II,s)}(\zeta_1)\right)\cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\mathrm{II}}\rho^{\mathrm{II}}}(\zeta-\zeta_1) + \overline{U}^{(II,s)}(\zeta), \qquad (2.11)$$
$$(x,y,z;\ a_{55},a_{44},1/A_{11};U,V,W),$$

для третьего слоя $(\zeta_2 \le \zeta \le 1)$:

$$U^{(III,s)} = \frac{1}{\Omega_*}\sqrt{\frac{a_{55}^{\mathrm{III}}}{\rho^{\mathrm{III}}}}\left(\sigma_{xz}^{(II,s)}(\zeta_2) - \tilde{\sigma}_{xz}^{(III,s)}(\zeta_2)\right)\sin\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\mathrm{III}}\rho^{\mathrm{III}}}(\zeta-\zeta_2) +$$

$$\left(U^{(II,s)}(\zeta_2) - \overline{U}^{(III,s)}(\zeta_2)\right)\cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\text{III}}\rho^{\text{III}}}(\zeta-\zeta_2) + \overline{U}^{(III,s)}(\zeta), \qquad (2.12)$$

$$(x, y, z;\ a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}\,; U, V, W),$$

где

$$\tilde{\sigma}_{xz}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{55}^{j}}\left[\frac{\partial\overline{U}^{(j,s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W^{(j,s-1)}}{\partial\xi}\right], \quad j = II, III.$$

Решения будут конечными, если будут выполняться следущие условия:

$$\cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\text{I}}\rho^{\text{I}}}\zeta_1 \neq 0, \quad (a_{55}, a_{44})$$

$$\sin\Omega_*\sqrt{\rho^{\text{I}}/A_{11}^{I}}\zeta_1 \neq 0 \qquad (2.13)$$

Таким образом, условия

$$\cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{\text{I}}\rho^{\text{I}}}\zeta_1 = 0,\ \ (a_{55}, a_{44}),\ \ \sin\Omega_*\sqrt{\rho^{\text{I}}/A_{11}^{I}}\zeta_1 = 0 \qquad (2.14)$$

являются условиями возникновения резонанса. Чтобы избежать возникновение резонанса необходимо физико-механические и геометрические параметры пластины выбрать таким образом, чтобы выполнялись условия (2.13), т.е. частота вынужденных колебаний не удовлетворяла условиям резонанса (2.14).

Полученное решение, как правило, не удовлетворяет граничным условиям на боковой поверхности пакета. Для устранения возникшей неувязки необходимо иметь решение для пограничного слоя, которое при удалении от боковой поверхности во внутрь пакета убывает экспоненциально.

3. Частное решение. С точки зрения практических применений полученных результатов, наиболее используемыми являются случаи, когда внешнее воздействие или постоянное или меняется линейно от тангенциальных координат. В этих случаях итерационный процесс определения искомых величин обрывается и получается математически точное решение во внешней задаче.

Рассмотрим частный случай, когда внешнее воздействие постоянно:

$$u = u^{+} = const, \qquad (U, V, W)$$

Тогда асимптотические решения прервятся уже в первом приближении и компоненты вектора перемещения примут вид:

$$u^{j} = lU^{(j,0)}\,exp(i\Omega t), \qquad (U, V, W),$$

$$\sigma_{xx}^{j} = \varepsilon^{-1}\cdot\sigma_{xx}^{(j,0)}\,exp(i\Omega t), \qquad (x, y, z,)\ \ j = I, II, III.$$

Для первого слоя:

$$u^{I} = l\cdot U^{+}\cdot\frac{cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{I}\rho^{I}}\zeta}{cos\Omega_*\sqrt{a_{55}^{I}\rho^{I}}\zeta_1}\,exp(i\Omega t),$$

$$(u, v; U, V; a_{55}, a_{44})$$

$$w^{I} = l\cdot W^{+}\cdot\frac{sin\Omega_*\sqrt{\rho^{\text{I}}/A_{11}^{I}}\zeta}{sin\Omega_*\sqrt{\rho^{\text{I}}/A_{11}^{I}}\zeta_1}\,exp(i\Omega t).$$

$$\sigma_{xx}^{I} = -\varepsilon^{-1} \cdot W^{+} \cdot A_{23}^{I}\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho^{\mathrm{I}}}{A_{11}^{I}}} \cdot \frac{cos\Omega_{*}\sqrt{\rho^{\mathrm{I}}/A_{11}^{I}}\zeta}{sin\Omega_{*}\sqrt{\rho^{\mathrm{I}}/A_{11}^{I}}\zeta_{1}} exp(i\Omega t),$$

$$(x, y, z, A_{23}^{I}, A_{13}^{I}, -A_{11}^{I})$$

$$\sigma_{xz}^{I} = -\varepsilon^{-1} \cdot U^{+} \cdot \Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho^{I}}{a_{55}^{I}}} \frac{sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{I}\rho^{I}}\zeta}{cos\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{I}\rho^{I}}\zeta_{1}} exp(i\Omega t),$$

$$(x, y;\ U, V; a_{55}, a_{44})$$

$$\sigma_{xy}^{I} = 0,$$

Для второго слоя:

$$u^{II} = (l \cdot U^{+} \cdot cos\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{II}\rho^{II}}(\zeta - \zeta_{1}) + \frac{l}{\Omega_{*}} \cdot \sqrt{\frac{a_{55}^{II}}{\rho^{II}}}\sigma_{xz}^{(I,0)}(\zeta_{1}) \times$$

$$sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{II}\rho^{II}}(\zeta - \zeta_{1}))\, exp(i\Omega t), \quad \left(x, y, z; u, v, w; U, V, W; a_{55}, a_{44}, \frac{1}{A_{11}}\right).$$

$$\sigma_{xx}^{II} = \varepsilon^{-1}A_{23}^{II} \cdot (W^{+} \cdot \Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho^{II}}{A_{11}^{II}}} \cdot sin\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho^{II}}{A_{11}^{II}}}(\zeta - \zeta_{1}) -$$

$$\frac{1}{A_{11}^{II}}\sigma_{zz}^{(I,0)}(\zeta_{1})cos\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho^{II}}{A_{11}^{II}}}(\zeta - \zeta_{1}))\, exp(i\Omega t), \quad (xx, yy;\ A_{23}^{II}, A_{13}^{II}),$$

$$\sigma_{zz}^{II} = \varepsilon^{-1} \cdot (-A_{11}^{II} \cdot W^{+} \cdot \Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho^{II}}{A_{11}^{II}}} \cdot sin\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho^{II}}{A_{11}^{II}}}(\zeta - \zeta_{1}) +$$

$$\sigma_{zz}^{(I,0)}(\zeta_{1})cos\Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho^{II}}{A_{11}^{II}}}(\zeta - \zeta_{1}))\, exp(i\Omega t),$$

$$\sigma_{xy}^{II} = 0,$$

$$\sigma_{xz}^{II} = \varepsilon^{-1} \cdot (-U^{+} \cdot \Omega_{*}\sqrt{\frac{\rho^{II}}{a_{55}^{II}}} sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{II}\rho^{II}}(\zeta - \zeta_{1}) +$$

$$\sigma_{xz}^{(I,0)}(\zeta_{1})cos\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{II}\rho^{II}}(\zeta - \zeta_{1}))\, exp(i\Omega t),$$

$$(x, y;\ U, V; a_{55}, a_{44})$$

Для третьего слоя:

$$u^{III} = l \cdot (U^{(II,0)}(\zeta_{2}) \cdot cos\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{III}\rho^{III}}(\zeta - \zeta_{2}) + \frac{1}{\Omega_{*}} \cdot \sqrt{\frac{a_{55}^{III}}{\rho^{III}}}\sigma_{xz}^{(II,0)}(\zeta_{2}) \times$$

$$sin\Omega_{*}\sqrt{a_{55}^{III}\rho^{III}}(\zeta - \zeta_{2}))\, exp(i\Omega t), \quad \left(x, y, z; u, v, w; U, V, W; a_{55}, a_{44}, \frac{1}{A_{11}}\right),$$

$$\sigma_{xx}^{III} = \varepsilon^{-1} A_{23}^{III} (W^{(II,0)}(\zeta_2) \cdot \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{III}}{A_{11}^{III}}} \cdot sin\Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{III}}{A_{11}^{III}}} (\zeta - \zeta_2) -$$

$$\frac{1}{A_{11}^{III}} \sigma_{zz}^{(II,0)}(\zeta_2) cos\Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{III}}{A_{11}^{III}}} (\zeta - \zeta_2)) \, exp(i\Omega t), \quad (xx, yy;\ A_{23}^{III}, A_{13}^{III}),$$

$$\sigma_{zz}^{III} = \varepsilon^{-1} (A_{11}^{III} \cdot W^{(II,0)}(\zeta_2) \cdot \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{III}}{A_{11}^{III}}} \cdot sin\Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{III}}{A_{11}^{III}}} (\zeta - \zeta_2) +$$

$$\sigma_{zz}^{(II,0)}(\zeta_2) cos\Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{III}}{A_{11}^{III}}} (\zeta - \zeta_2)) \, exp(i\Omega t),$$

$$\sigma_{xy}^{III} = 0,$$

$$\sigma_{xz}^{III} = \varepsilon^{-1} \cdot (-U^{(II,0)}(\zeta_2) \cdot \Omega_* \sqrt{\frac{\rho^{III}}{a_{55}^{III}}} sin\Omega_* \sqrt{a_{55}^{III} \rho^{III}} (\zeta - \zeta_2) +$$

$$\sigma_{xz}^{(II,0)}(\zeta_2) cos\Omega_* \sqrt{a_{55}^{III} \rho^{III}} (\zeta - \zeta_2)) \, exp(i\Omega t),$$

$$(x, y;\ U, V; a_{55}, a_{44})$$

Заключение. В рассмотренной задаче изучено напряженно-деформированное состояние трехслойной пластинки, при наличии данных о перемещении точек поверхности контакта между первым и вторым слоями.

Выведены условия возникновения резонанса. Проанализировав условия (2.14), приходим к выводу, что если измерительные приборы для считывания данных о перемещениях точек поверхности установлены между первым и вторым слоями, то в условия резонанса входят только параметры первого слоя, а на напряженно-деформированное состояние пластинки влияют параметры всех слоев.

Проводя мониторинг по данным измерительных приборов и следя за изменением напряженно-деформированного состояния пакета во времени, можно определить моменты, когда будет нарушена прочность контактной поверхности между некоторыми слоями пластинки, в результате чего произойдет разрыв или контакт будет неполный.

Литература

1. Григолюк Э. И., Коган Е. А. В кн.: Механика оболочек и пластин в XXI веке. Межвуз. науч. сб. Саратовский гос. техн. ун-т.1999. С. 3-30.// Grigolyuk E.I., Kogan E.A., In book: Mechanics of shells and plates at XXI centure. Interuniversity scientific collection. Saratov state university. 1999. 3-30p.
2. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. Киев. Наукова думка. 1991. 216с.// Grogirenko Ya.M., Vasilenko A.T., Ponkratova N.D. Problems of the theory of elasticity of inhomogeneous bodies. Kyiv. Naukova Dumka. 1991. 216p.
3. Reddy J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. CRC Press. Boca Raton, FL, Second Edition. 2004. P. 831.

4. Гулгазарян Л.Г., Амбарцумян П.Р., Динамическая трёхмерная задача теории упругости двуслойной пластинки при наличии вязкого сопротивления, Доклады НАН Армении, 2020, Т.120, N3, 181-190с // Ghulghazaryan L.G., Hambardzumyan P.R. (2020) The Dynamic Three-Dimensional Problem of the Theory of Elasticity of a Two-Layer Plate in the Presence of Viscous Resistance. Reports of NAS RA. 120 (3). 181-190. http://elib.sci.am/2020_3/04_3_2020.pdf
5. Aghalovyan L. A., Ghulghazaryan L. G., Kaplunov J. D. et al. 3D dynamic analysis of layered elastic shells. - J. Math. Sciences. 2023. V. 273. P. 999-1015. https://doi.org/10.1007/s10958-023-06560-5 .
6. Амбарцумян П. Р. Вынужденные колебания двухслойной пластинки при наличии данных о перемещении точек поверхности контакта. Доклады НАН Армении. 2023. Т. 120. № 3. С. 181-190.// Hambardzumyan P.R. Forced vibrations of a double-layer plate in the presence of data about the movement of contact surface points. Reports of NAS RA. 2023. V.120. № 3. 181-190p.
7. Aghalovyan L.A. On the classes of problems for deformable one-layer and multilayer thin bodies solvable by the asymptotic method // Mechanics of composite materials.- 2011.- Vol. 47, № 1.- PP. 59-72.
8. Aghalovyan L. A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore, London. World Scientific. 2015. 376 p.
9. Агаловян Л.А, Агаловян М.Л., Тагворян В.В. О решениях динамических трёхмерных задач теории упругости по моделированию землетрясений // Изв. НАН РА.Механика. – 2018. – Т. 71.– N 4. – С. 17–29.

Сведения об авторах:

Автор для корреспонденции:
Гулгазарян Лусине Гургеновна, д.ф.м.н, профессор, в.н.с. Института механики НАН Армении, зав.кафедрой математики и методики ее преподавания АГПУ им. Х. Абовяна
Tel.(+37491) 302554, .(+37455) 302554
E-mail: lusina@mail.ru, ghulghazaryanlusine08@aspu.am

Амбарцумян Парандзем Рафиковна - преподаватель и соискатель кафедры Математики и методики ее преподавания Армянского государственного педагогического университета имени Х. Абовяна.
Тел.: (+374-77) 684856
E-mail: hambardzumyanparandzem@mail.ru, hambardzumyanparandzem05@aspu.am

Поступила в редакцию 18.03.2025