

**ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ
НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ СО СМЕЩЕНИЕМ
ЛЕВОГО КОНЦА ПРИ ЗАКРЕПЛЕННОМ ПРАВОМ КОНЦЕ С
МИНИМИЗАЦИЕЙ ИНТЕГРАЛА ГРАНИЧНОЙ ЭНЕРГИИ**

Барсегян В. Р.

Ключевые слова: неоднородный колебательный процесс, оптимальное граничное управление, интеграл граничной энергии, волновое уравнение, кусочно-постоянные характеристики, оптимальное управление колебаниями, разделение переменных.

Barseghyan V. R.

**Optimal Boundary Control of a Distributed Heterogeneous Vibration System with a Fixed Right End by
Shifting the Left End and Minimizing the Integral of the Boundary Energy**

Keywords. heterogeneous vibrations process, optimal boundary control, integral of boundary energy, wave equation, piecewise constant characteristics, optimal control of vibrations, separation of variables.

The article considers the problem of optimal boundary control of a distributed heterogeneous vibrations system described by one-dimensional wave equation with piecewise constant characteristics. It is assumed that the wave travel time through each homogeneous section is the same. Control is achieved by shifting the left end while the right end is fixed. The quality criterion is the integral of the boundary energy specified over the entire time interval. A constructive approach to build an optimal control action that transfers vibrations over a given time interval from the initial state to the final state is proposed.

Բարսեղյան Վ. Ռ.

**Ամրացված աջ եզրով ձախ եզրի տեղափոխությամբ անհամասեռ բաշխված պարամետրերով
տատանողական համակարգի օպտիմալ եզրային ղեկավարման խնդիր էներգիայի ինտեգրալի
մինիմալացմամբ**

Հիմնաբաներ՝ անհամասեռ տատանումներ, օպտիմալ եզրային ղեկավարում, եզրային էներգիայի ինտեգրալ, ալիքային հավասարում, կտոր առ կտոր հաստատուն բնութագրիչներ, տատանումների օպտիմալ ղեկավարում, փոփոխականների անջատում:

Դիտարկվում է անհամասեռ բաշխված պարամետրերով տատանողական համակարգի օպտիմալ եզրային ղեկավարման խնդիր, որը նկարագրվում է կտոր առ կտոր հաստատուն բնութագրիչներով միաչափ ալիքային հավասարմամբ: Ենթադրվում է, որ յուրաքանչյուր համասեռ հատվածում ալիքը անցնում է հավասար ժամանակում: Ղեկավարումը իրականացվում է ձախ եզրի տեղափոխությամբ՝ երբ աջ եզրը ամրացված է: Որակի հայտանիշը հանդիսանում է ամբողջ ժամանակահատվածի վրա տրված եզրային էներգիայի ինտեգրալը: Առաջարկված է տատանողական համակարգը տրված սկզբնական վիճակից վերջնական վիճակ տեղափոխող օպտիմալ ղեկավարող ազդեցության կառուցման կոնստրուկտիվ մոտեցում:

В статье рассмотрена задача оптимального граничного управления распределенной неоднородной колебательной системой, описываемой одномерным волновым уравнением с кусочно-постоянными характеристиками. Предположено, что время прохождения волны через каждый однородный участок одинаково. Управление осуществляется смещением левого конца при закрепленном правом конце. Критерием качества является интеграл граничной энергии, заданный на всем промежутке времени. Предложен конструктивный подход построения оптимального управляющего воздействия, переводящего колебания за заданный промежуток времени из начального состояния в конечное состояние.

Введение. Исследованию задач управления и оптимального управления распределенными колебательными системами с заданными начальными и конечными условиями посвящены многие работы, в частности, [1-6]. Задачам исследования и управления разнородных распределенных составных систем посвящены, в частности, работы [7-22]. Одной из первых задач управления распределенной колебательной системой, состоящей из двух кусочно-однородных сред была поставлена А.Г. Бутковским и исследована в работе [12]. В работах [13, 14] (и других работах этого же автора и его учеников) изучены задачи граничного управления колебаниями стержня, состоящего из разнородных участков. При исследовании этих задач использован метод Даламбера. В работе [2] рассмотрены задачи оптимального граничного управления смещениями на концах струны, основанными на минимизации интеграла граничной энергии, которые за произвольный, достаточно большой промежуток времени переводят процесс колебаний струны из произвольно заданного начального состояния в заданное финальное состояние. В указанных работах предложены различные методы решения задач управления и оптимального управления, например, метод Фурье, метод гармоник и метод моментов.

Задачи управления и оптимального граничного управления колебательными процессами, состоящими из двух разнородных участков с заданными начальным и конечным условиями функционала интеграла от квадратов граничных смещений, рассмотрены в работах [7-11]. Задачи оптимального управления с функционалом интеграла от квадратов производных граничных смещений, т.е. интеграла граничной энергии, пока еще недостаточно исследованы.

В настоящей работе рассмотрена задача оптимального граничного управления некоторой распределенной неоднородной колебательной системой, описываемой одномерным волновым уравнением, состоящей из двух разнородных участков, описывающих продольные колебания неоднородного стержня или поперечные колебания неоднородной струны с заданными начальным и конечным условиями. Предполагается, что длины разнородных участков колебательного процесса таковы, что время прохождения волны по каждому из участков одинаково.

Цель данной статьи состоит в разработке аналитического подхода построения функции оптимального граничного управления одномерными колебательными неоднородными процессами смещением левого конца при закрепленном правом конце, переводящего колебания за заданный промежуток времени из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. Критерием качества является интеграл граничной энергии, заданный на всем промежутке времени. Построение осуществляется по следующей схеме. Задача сводится к задаче оптимального управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями, далее используется метод разделения переменных и методы теории оптимального управления конечномерными системами.

1. **Постановка задачи.** Рассматриваются колебания распределенной кусочно-однородной среды, расположенной вдоль отрезка $-l_1 \leq x \leq l$ и состоящей из двух участков: участка $-l_1 \leq x \leq 0$ и участка $0 \leq x \leq l$. Скорость прохождения волны по

участкам обозначим $a_i = \sqrt{\frac{k_i}{\rho_i}}$, где $\rho_i = \text{const}$ - плотность, $k_i = \text{const}$ - модуль

Юнга, $i = 1, 2$. Предполагается, что длины l_1 и l участков выбраны так, что время прохождения волны по участку $-l_1 \leq x \leq 0$ совпадает со временем прохождения волны по участку $0 \leq x \leq l$, т.е.

$$\frac{l_1}{a_1} = \frac{l}{a_2}. \quad (1.1)$$

Отметим, что описанным колебательным неоднородным процессом могут быть продольные колебания кусочно-однородного стержня (ρ_i - плотность, k_i - модуль упругости, $i = 1, 2$) или поперечные колебания кусочно-однородной струны (ρ_i - плотность, k_i - натяжение струны, $i = 1, 2$).

Пусть состояние распределенной кусочно-однородной среды (продольные колебания стержня или поперечные колебания струны), представлено функцией $Q(x, t)$, $-l_1 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$. Отклонение от состояния равновесия, т.е. колебания распределенной кусочно-однородной среды, описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (1.2)$$

с граничными условиями

$$Q(-l_1, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.3)$$

и с условиями сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков

$$Q(0-0, t) = Q(0+0, t) \\ a_1^2 \rho_1 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0-0} = a_2^2 \rho_2 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0+0}. \quad (1.4)$$

Пусть заданы начальные (при $t = t_0 = 0$) и конечные (при $t = T$) условия

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad (1.5)$$

$$Q(x, T) = \varphi_T(x), \quad \frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{t=T} = \psi_T(x), \quad -l_1 \leq x \leq l. \quad (1.6)$$

В формуле (1.3) функция $\mu(t)$ - управляющее воздействие (граничное управление).

Предполагается, что функция $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T = \{(x, t) : x \in [-l_1, l], t \in [0, T]\}$, а функции $\varphi_0(x), \varphi_T(x) \in C^2[-l_1, l]$, $\psi_0(x), \psi_T(x) \in C^1[-l_1, l]$.

Предполагается также, что все функции такие, что выполняются следующие условия согласования.

$$\begin{aligned} \mu(0) &= \varphi_0(-l_1), \quad \dot{\mu}(0) = \psi_0(-l_1), \quad \varphi_0(l) = \psi_0(l) = 0, \\ \mu(T) &= \varphi_T(-l_1), \quad \dot{\mu}(T) = \psi_T(-l_1), \quad \varphi_T(l) = \psi_T(l) = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Сформулируем следующую задачу оптимального граничного управления колебаниями системы (1.2) с заданными начальными (1.5) и конечными (1.6) значениями.

Требуется найти такое оптимальное управление $\mu^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, (1.3), под воздействием которого колебательное движение системы (1.2) из заданного начального состояния (1.5) переходит в конечное состояние (1.6) и минимизирующее функционал

$$\int_0^T [\dot{\mu}(t)]^2 dt. \quad (1.8)$$

Критерием качества (1.8) является интеграл граничной энергии, заданный на всем промежутке времени.

2. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями. Для решения поставленной задачи перейдем к новой переменной [7-10, 22]

$$\xi = \begin{cases} \frac{a_2}{a_1} x, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq l, \end{cases}, \quad (2.1)$$

что приводит к растяжению или сжатию отрезка $-l_1 \leq x \leq 0$ относительно точки $x = 0$. При этом с учетом (1.1), будем иметь, что отрезок $-l_1 \leq x \leq 0$ переходит к отрезку $-l \leq \xi \leq 0$. Для функции $Q(\xi, t)$ получим на отрезках одинаковой длины одинаковые уравнения

$$\frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & -l \leq \xi \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & 0 \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

или

$$\frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \quad -l \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.2)$$

с соответствующими граничными условиями

$$Q(-l, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

с начальными условиями

$$Q(\xi, 0) = \varphi_0(\xi), \quad \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad (2.4)$$

с конечными условиями

$$Q(\xi, T) = \varphi_T(\xi), \quad \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad (2.5)$$

и с условиями сопряжения в точке $\xi = 0$ соединения участков

$$Q(0-0, t) = Q(0+0, t), \quad a_1 \rho_1 \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0-0} = a_2 \rho_2 \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0+0}. \quad (2.6)$$

Отметим, что для удобства, после замены переменной (2.1) все функции оставлены в исходных обозначениях.

Так как граничные условия (2.3) неоднородны, решение уравнения (2.2) построим в виде суммы

$$Q(\xi, t) = V(\xi, t) + W(\xi, t), \quad (2.7)$$

где $V(\xi, t)$ - функция с граничными условиями

$$V(-l, t) = V(l, t) = 0, \quad (2.8)$$

требующая определения, а функция $W(\xi, t)$ - решение уравнения (2.2) с условиями

$$W(-l, t) = \mu(t), \quad W(l, t) = 0. \quad (2.9)$$

и имеет вид

$$W(\xi, t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi}{l} \right) \mu(t). \quad (2.10)$$

Подстановка (2.7) в (2.2) с учетом (2.10), приводит к следующему уравнению для определения функции $V(\xi, t)$

$$\frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial \xi^2} + F(\xi, t), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.11)$$

где

$$F(\xi, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{l} - 1 \right) \ddot{\mu}(t). \quad (2.12)$$

Функция $V(\xi, t)$ удовлетворяет соответствующему условию сопряжения (2.6) в точке $\xi = 0$ соединения участков. Отметим, что из (1.7), согласно (2.1) и (1.1), будем иметь

$$\varphi_0(-l_1) = \varphi_0(-l), \quad \varphi_T(-l_1) = \varphi_T(-l),$$

$$\Psi_0(-l_1) = \Psi_0(-l), \quad \Psi_T(-l_1) = \Psi_T(-l). \quad (2.13)$$

Из начальных (2.4) и конечных (2.5) условий, с учетом условий (1.8) и (2.13) функция $V(\xi, t)$ должна удовлетворять следующим начальным

$$V(\xi, 0) = \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\varphi_0(-l),$$

$$\left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\psi_0(-l), \quad (2.14)$$

и конечным условиям

$$V(\xi, T) = \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\varphi_T(-l),$$

$$\left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\psi_T(-l). \quad (2.15)$$

Таким образом, решение исходной задачи сведено к задаче управления колебанием, описываемым неоднородным уравнением (2.11) с однородными граничными условиями (2.8), которая формулируется следующим образом:

требуется найти такое граничное оптимальное управление $\mu(t)$, $0 \leq t \leq T$, под воздействием которого колебание, описываемое уравнением (2.11) с граничными условиями (2.8), переходит из заданного начального состояния (2.14) в конечное состояние (2.15) и минимизирующие функционал (1.8).

3. Сведение решения задачи с нулевыми граничными условиями к проблеме моментов. Учитывая, что граничные условия (2.8) однородны, решение уравнения (2.11) ищем в виде

$$V(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k \xi}{l}, \quad V_k(t) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l V(\xi, t) \sin \frac{\pi k \xi}{l} d\xi. \quad (3.1)$$

Функции $F(\xi, t)$, $\varphi_0(\xi)$, $\varphi_T(\xi)$, $\psi_0(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$ представим в виде рядов

Фурье, в базисе $\left\{ \sin \frac{\pi k \xi}{l} \right\}$ ($k=1, 2, \dots$), и, подставив их значения вместе с

$V(\xi, t)$ в уравнение (2.11), в соотношение (2.12), в условия (2.14) и (2.15), получим для каждого $k=1, 2, \dots$ следующее неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a_2 \pi k}{l} \right)^2, \quad (3.2)$$

$$F_k(t) = -\frac{2a_2}{\lambda_k l} \ddot{\mu}(t), \quad (3.3)$$

с начальным

$$V_k(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \varphi_0(-l), \quad \dot{V}_k(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \psi_0(-l), \quad (3.4)$$

и конечным условиями

$$V_k(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \varphi_T(-l), \quad \dot{V}_k(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \psi_T(-l). \quad (3.5)$$

Здесь коэффициенты Фурье функции $F(\xi, t)$, $\varphi_0(\xi)$, $\varphi_T(\xi)$, $\psi_0(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$ обозначены через $F_k(t)$, $\varphi_k^{(0)}$, $\varphi_k^{(T)}$, $\psi_k^{(0)}$ и $\psi_k^{(T)}$, соответственно.

Общее решение уравнения (3.2) с условиями (3.4) имеет вид

$$\begin{aligned} V_k(t) &= V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k(\tau) \sin \lambda_k (t - \tau) d\tau, \\ \dot{V}_k(t) &= -\lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k t + \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k t + \int_0^t F_k(\tau) \cos \lambda_k (t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Учитывая начальные и конечные условия, из (3.6) получим, что функции $F_k(t)$ для каждого k должны удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$\int_0^T F_k(\tau) \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau = \tilde{C}_{1k}(T), \quad \int_0^T F_k(\tau) \cos \lambda_k (T - \tau) d\tau = \tilde{C}_{2k}(T). \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1k}(T) &= \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k T, \\ \tilde{C}_{2k}(T) &= \dot{V}_k(T) + \lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k T, \end{aligned}$$

Следуя [3-6,22], подставляя выражение функции $F_k(t)$ из (3.3) в соотношения (3.7) и интегрируя по частям с учетом условий согласования (1.7), получим, что функция $\dot{\mu}(t)$ для каждого k должна удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$\int_0^T \dot{\mu}(\tau) \cos \lambda_k (T - \tau) d\tau = C_{1k}(T), \quad \int_0^T \dot{\mu}(\tau) \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau = C_{2k}(T), \quad (3.8),$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k}(T) &= \frac{\psi_0(-l)}{\lambda_k} \sin \lambda_k T - \frac{l}{2a_2} \tilde{C}_{1k}(T), \quad k = 1, 2, \dots \\ C_{2k}(T) &= \frac{\psi_T(-l)}{\lambda_k} - \frac{\psi_0(-l)}{\lambda_k} \cos \lambda_k T + \frac{l}{2a_2} \tilde{C}_{2k}(T), \end{aligned} \quad (3.9)$$

Таким образом, решение поставленной задачи оптимального управления сводится к нахождению такого граничного управления $\mu(t)$, $0 \leq t \leq T$, которое для каждого $k = 1, 2, \dots$ удовлетворяет интегральным соотношениям (3.8) и доставляет минимум функционалу (1.8).

Введем следующие обозначения:

$$\bar{H}_k(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \lambda_k (T - \tau) \\ \sin \lambda_k (T - \tau) \end{pmatrix}, \quad C_k(T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T) \\ C_{2k}(T) \end{pmatrix}, \quad U(\tau) = \dot{\mu}(\tau). \quad (3.10)$$

Отметим, что на практике обычно выбираются несколько первых n ($k = 1, \dots, n$) гармоник колебаний и решается задача синтеза управлений, используя методы теории управления конечномерными системами. Решение задачи будем строить придерживаясь этого подхода.

Тогда, учитывая введенные обозначения (3.10), для первых n гармоник соотношения (3.8) запишутся следующим образом:

$$\int_0^T H_n(\tau) U_n(\tau) d\tau = \eta_n, \quad (3.11)$$

где

$$U_n(\tau) = \dot{\mu}_n(\tau), \quad H_n(\tau) = \begin{pmatrix} \bar{H}_1(\tau) \\ \bar{H}_2(\tau) \\ \vdots \\ \bar{H}_n(\tau) \end{pmatrix}, \quad \eta_n = \begin{pmatrix} C_1(T) \\ C_2(T) \\ \vdots \\ C_n(T) \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

с размерностями $H_n(\tau) - (2n \times 1)$, $\eta_n - (2n \times 1)$.

Для произвольного числа первых n ($k = 1, \dots, n$) гармоник число интегральных соотношений в (3.8) равно $2n$, которым должна одновременно удовлетворять искомая функция управления $\mu(t)$.

Таким образом, интегральные условия (3.8) представлены условием (3.11).

Из полученного соотношения (3.11) следует справедливость следующего утверждения [23]. Для произвольного числа первых n гармоник динамический процесс, описываемый (3.2) с условиями (3.4), (3.5), вполне управляем на промежутке времени $[0, T]$ тогда и только тогда, когда для любого вектора η_n (3.12), можно найти управление $U_n(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (3.11).

4. Построение решения задачи. Отметим, что левая часть условия (3.11) - линейная операция, порожденная функцией управления $U_n(\tau)$ на промежутке времени $[0, T]$, а функционал (1.8) можно рассматривать как квадрат нормы линейного нормированного пространства L_2 . Следовательно, задачу оптимального управления с интегральным условием (3.11) при функционале (1.8) для каждого n , $n = 1, 2, \dots$ можно рассматривать как проблему моментов [1, 23].

Поэтому построим решение задачи (1.8) и (3.8) при $k = 1, 2, \dots, n$ с помощью алгоритма решения проблемы моментов. Для решения конечномерной (при

$k = 1, 2, \dots, n$) проблемы моментов (1.8) и (3.8), следуя [23], нужно найти величины $p_k, q_k, k = 1, \dots, n$, связанные условием

$$\sum_{k=1}^n [p_k C_{1k} + q_k C_{2k}] = 1, \quad (4.1)$$

для которых

$$(\rho_n^0)^2 = \min_{(4.1)} \int_0^T (h_n(\tau))^2 d\tau, \quad (4.2)$$

где

$$h_n(\tau) = \sum_{k=1}^n [p_k \cos \lambda_k (T - \tau) + q_k \sin \lambda_k (T - \tau)]. \quad (4.3)$$

Для определения величин $p_k^0, q_k^0, k = 1, \dots, n$, минимизирующих (4.2), применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Введем функцию

$$f_n = \int_0^T (h_n(\tau))^2 d\tau + \beta_n \left\{ \sum_{k=1}^n [p_k C_{1k}(T) + q_k C_{2k}(T)] - 1 \right\},$$

где β_n - неопределенный множитель Лагранжа. На основе этого метода, вычисляя производные по $p_k, q_k, k = 1, \dots, n$ функции f_n и приравнявая к нулю, с учетом обозначения (4.3), после присоединения к полученным уравнениям условия (4.1), получим замкнутую систему $2n+1$ алгебраических уравнений относительно столько же неизвестных величин $p_k, q_k, k = 1, \dots, n, \beta_n$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [a_{jk} p_j + b_{jk} q_j] &= -\frac{\beta_n}{2} C_{1k}(T), \\ \sum_{j=1}^n [d_{jk} p_j + e_{jk} q_j] &= -\frac{\beta_n}{2} C_{2k}(T), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\sum_{k=1}^n [p_k C_{1k}(T) + q_k C_{2k}(T)] = 1, \quad k = 1, \dots, n,$$

где

$$\begin{aligned} a_{jk} &= \int_0^T \cos \lambda_j (T - \tau) \cos \lambda_k (T - \tau) d\tau, \\ b_{jk} &= \int_0^T \sin \lambda_j (T - \tau) \cos \lambda_k (T - \tau) d\tau, \\ d_{jk} &= \int_0^T \cos \lambda_j (T - \tau) \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$e_{jk} = \int_0^T \sin \lambda_j (T - \tau) \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau, \quad (4.5)$$

Пусть величины $p_k^0, q_k^0, k = 1, \dots, n$ и β_n^0 , являются решением замкнутой системы алгебраических уравнений (4.4). Тогда, согласно (4.2), (4.3) будем иметь

$$(\rho_n^0)^2 = \int_0^T (h_n^0(\tau))^2 d\tau, \quad (4.6)$$

$$h_n^0(\tau) = \sum_{k=1}^n [p_k^0 \cos \lambda_k (T - \tau) + q_k^0 \sin \lambda_k (T - \tau)].$$

Оптимальная функция $\dot{\mu}_n^0(\tau)$ для любого $n = 1, 2, \dots$ представляется в виде:

$$\dot{\mu}_n^0(\tau) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2} h_n^0(\tau).$$

Отсюда имеем

$$\mu_n^0(t) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2} \int_0^t h_n^0(\tau) d\tau + S, \quad t \in [0, T], \quad (4.7)$$

где S – постоянная интегрирования. Из (4.7) имеем, что $\mu_n^0(0) = S$, следовательно, учитывая условия согласования (1.7) и (2.13), получим $S = \varphi_0(-l)$.

Для вывода явного выражения оптимального управления $\mu_n^0(\tau), \tau \in [0, T]$, из (4.7), вычисляя соответствующие интегралы, будем иметь:

$$\begin{aligned} \mu_n^0(t) = & \frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} [-p_k^0 \sin \lambda_k (T - t) + q_k^0 \cos \lambda_k (T - t) + \\ & + p_k^0 \sin \lambda_k T - q_k^0 \cos \lambda_k T] + \varphi_0(-l). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Заметим, что согласно (2.1) из (2.13) имеем, что $\varphi_0(-l) = \varphi_0(-l_1)$, т.е. при переходе к исходным переменным последнее слагаемое выражения функции $\mu_n^0(t)$ будет $\varphi_0(-l_1)$.

Таким образом, имея явный вид функции оптимального граничного управления $\mu_n^0(t), t \in [0, T]$, можно построить соответствующую функцию состояния $Q_n^0(\xi, t)$. Подставляя полученные выражения для оптимальных управлений $\mu_n^0(t), t \in [0, T]$, в (3.3), а полученное для $F_k^0(\tau)$ выражение – в (3.6), получим функцию $V_k^0(t), t \in [0, T], k = 1, \dots, n$. Далее, из формулы (3.1) будем иметь:

$$V_n^0(\xi, t) = \sum_{k=1}^n V_k^0(t) \sin \frac{\pi k}{l} \xi, \quad (4.9)$$

где

$$V_k^0(t) = V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k^0(\tau) \sin \lambda_k (t - \tau) d\tau,$$

а с помощью формул (2.7) и (2.10) получим функцию $Q_n^0(\xi, t)$, которую назовем оптимальной функцией состояния колебательной системы для первых n гармоник. Функция $Q_n^0(\xi, t)$ запишется в виде

$$Q_n^0(\xi, t) = V_n^0(\xi, t) + \frac{1}{2l}(l - \xi)\mu_n^0(t). \quad (4.10)$$

Учитывая обозначения (2.1), согласно (4.9) и (4.10), оптимальная функция $Q_n^0(x, t)$ в исходных переменных, т.е. при $-l_1 \leq x \leq l$ представляется в виде:

$$Q_n^0(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n V_k^0(t) \sin \frac{\pi k}{l_1} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) \mu_n^0(t), & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ \sum_{k=1}^n V_k^0(t) \sin \frac{\pi k}{l} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \mu_n^0(t), & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases}. \quad (4.11)$$

Из полученных явных выражений (4.8)-(4.11) видно, что в силу непрерывности функции $\mu_n^0(t)$, $\tau \in [0, T]$ оптимальная функция состояния $Q_n^0(x, t)$ также является непрерывной и можно убедиться, что для функции $Q_n^0(x, t)$ выполняются условия сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков (1.4).

Закключение. В работе предложен конструктивный подход построения функции оптимального граничного управления одномерными неоднородными колебательными процессами смещением левого конца при закреплённом правом конце, переводящим колебания за заданный промежуток времени из заданного начального состояния в заданное конечное состояние с критерием качества, являющимся интегралом граничной энергии, заданным на всем промежутке времени. Результаты могут быть использованы при проектировании оптимального граничного управления процессами разнородных колебаний в физических и технологических системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. Абдукаримов М.Ф. Об оптимальном граничном управлении, производимом смещением процесса вынужденных колебаний на одном конце струны при свободном втором // Докл. АН Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 4. С. 280–286.
3. Barseghyan V.R. Control Problem of String Vibrations with Inseparable Multipoint Conditions at Intermediate Points in Time // *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54, Issue 8, pp. 1216-1226.
4. Barseghyan V.R. The problem of optimal control of string vibrations // *International Applied Mechanics*, 56(4), (2020), 471–48, DOI: 10.1007/s10778-020-01030-w
5. Barseghyan V., Solodusha S. Optimal Boundary Control of String Vibrations with Given Shape of Deflection at a Certain Moment of Time. *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2021 // Lecture Notes in Computer Science*, 2021, vol 12755. pp 299-313.
6. Barseghyan V. and Solodusha S. On One Problem in Optimal Boundary Control for String Vibrations with a Given Velocity of Points at an Intermediate Moment of Time // Conference Paper. Publisher: IEEE. 2021 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), pp. 343-349, 2021. Doi: 10.1109/RusAutoCon52004.2021.9537514
7. Barseghyan V., Solodusha S. On the Optimal Control Problem for Vibrations of the Rod/String Consisting of Two Non-Homogeneous Sections with the Condition at an Intermediate Time. *Mathematics*. 2022, 10(23): 4444.
8. Барсегян В.Р. Задача граничного управления смещением на двух концах процессом колебания стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2023. № 2. С. 125-135.
9. Барсегян В.Р., Солодуш С.В. Граничные управления некоторой распределенной неоднородной колебательной системой с промежуточными условиями. *Итоги науки и техн. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*. (ВИНИТИ РАН), 2023. Т. 226. С. 3–15.
10. Барсегян В.Р. О задачах граничного управления и оптимального управления распределенной неоднородной колебательной системой с заданными промежуточными условиями на функции состояния. *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, **232** (2024), 13–29.
11. Barseghyan V.R., Solodusha S.V. Model of the Control Problem of the Thermal Effect of a Laser Beam on a Two-Layer Biomaterial. *Mathematics* 2024, 12, 374.
12. Львова Н.Н. Оптимальное управление некоторой распределенной неоднородной колебательной системой // *Автоматика и телемеханика*, 1973. № 10. С. 22–32.
13. Ильин В.А. Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков. *Доклады РАН*. 2011. Т.440, № 2. С.159–163.
14. Ильин В.А. О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // *Доклады РАН*. 2010. Т. 435, № 6. С. 732–735.
15. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами // *Тр. ИММ УрОРАН*, 2011, Т. 17, № 1. С. 85–92.
16. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Об управляемости колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // *Ж. вычисл.*

- матем. и матем. физ.. 2009. Т. 49, № 5. С. 815–825. Comput. Math. Math. Phys., 2009. Vol. 49. Issue 5, pp. 786–796.
17. Провоторов В.В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. 2012. Вып. 1. С. 62–71.
 18. Amara J. Ben, Beldi E. Boundary controllability of two vibrating strings connected by a point mass with variable coefficients // SIAM J. Control Optim., 2019. Vol. 57, No. 5, pp. 3360–3387.
 19. Mercier D., Régnier V. Boundary controllability of a chain of serially connected Euler-Bernoulli beams with interior masses // Collectanea Mathematica. 2009. Vol. 60, No. 3, pp. 307–334.
 20. Кулешов А.А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости // Доклады РАН, 2012. Т. 442. № 5. С. 594–597.
 21. Рогожников А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Доклады РАН, 2012, Т. 444. С. 488–491.
 22. Холодовский С.Е., Чухрий П.А. Задача о движении неограниченной кусочно-однородной струны // Учёные записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2018. Т. 13, № 4. С. 42–50.
 23. Красовский, Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

Сведения об авторе:

Барсегян Ваня Рафаелович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор ЕГУ, факультет математики и механики.

Тел.: (+374 91) 20 32 20 ;

E-mail: barseghyan@sci.am

Поступила в редакцию 04.03.2025