ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 78, №1, 2025 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2025.78.1-13

О СМЕШАННОЙ 3D ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ИМЕЮЩАЯ ПЛОСКОСТЬ УПРУГОЙ СИММЕТРИИ

Агаловян Л.А., Япуджян В. Т.

Ключевые слова: анизотропная пластинка, упругость, трехмерная задача, асимптотическое решение.

Aghalovyan L.A., Yapujyan V. T.

On mixed 3D problem of elasticity theory for an anisotropic plate with a plane of elastic symmetry

Key words: anisotropic plate, elasticity, 3D problem, asymptotic solution

The mixed 3D problem of elasticity theory is solved by the asymptotic method for an anisotropic rectangular plate, which has a plane of elastic symmetry. The normal displacement is subjected to the upper edge of the plate, the tangential stresses are equal to zero. The lower edge of the plate is rigidly fixed. For solving a problem of that class classical and refined plate theories are not applicable. By asymptotic method for solving singularly perturbed differential equations, the solution to the external problem is found, which coincides with the solution for the spatial layer. Cases are indicated when this solution becomes mathematically exact. An illustrative example, in which the weight of the plate is also taken into account, is given.

Աղալովյան Լ.Ա., Յափուջյան Վ. Տ.

Առաձգականության սիմետրիայի հարթություն ունեցող անիզոտրոպ սալի համար առաձգականության տեսության խառը 3D խնդրի մասին

Հիմնաբառեր՝ անիզոտրոպ սալ, առաձգականություն, եռաչափ խնդիր, ասիմպտոտիկ լուծում

Անիզոտրոպ ուղղանկյուն սալի համար, որն ունի առաձգականության սիմետրիայի հարթություն, ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է առաձգականության տեսության խառը եռաչափ խնդիր: Սալի վերին նիստին հաղորդված է նորմալ տեղափոխություն, տանգենցիալ լարումները հավասար են զրոյի: Սալի ստորին նիստը կոշտ ամրակցված է: Այդ խնդրի լուծման համար սալերի դասական և ճշգրտված տեսությունները կիրառելի չեն: Սինգուլյար գրգռված դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման ասիմպտոտիկ մեթոդով որոշված է արտաքին խնդրի լուծումը, որը համընկնում է տարածական շերտի համար լուծման հետ: Նշված են այն դեպքերը, երբ այդ լուծումը դառնում է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ: Բերված է իլյուստրացիոն օրինակ, որում հաշվի է առնված նաև սալի կշիռը:

Для анизотропной пластинки, которая имеет плоскость упругой симметрии, асимптотическим методом решена смешанная трехмерная задача теории упругости. Верхней кромке пластинки сообщено нормальное перемещение, тангенциальные напряжения равны нулю. Нижняя кромка пластинки жестко закреплена. Для решения задачи этого класса классическая и уточненные теории пластин неприменимы. Асимптотическим методом решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений найдено решение внешней задачи, которое совпадает с решением для пространственного слоя. Указаны случаи, когда это решение становится математически точным. Приведен иллюстрационный пример, в котором учитывается также вес пластинки.

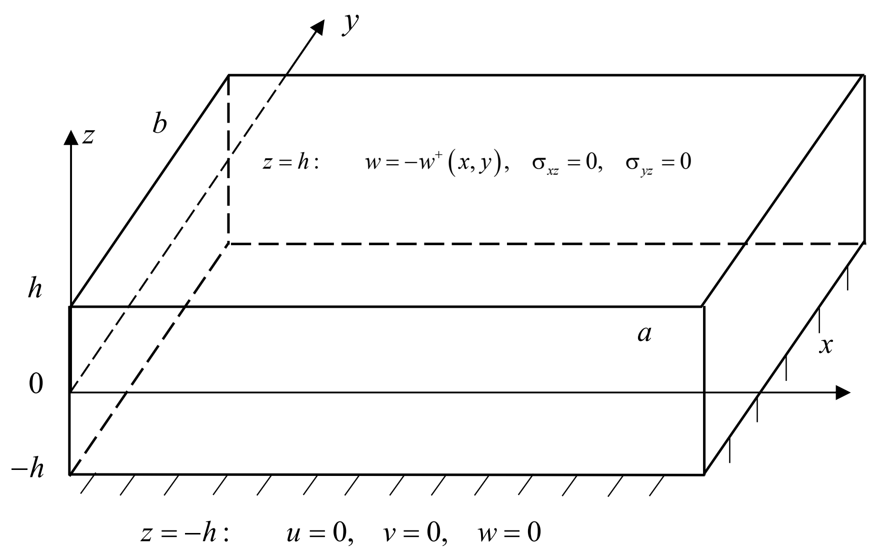
Введение. В классической и уточненных теориях пластин и оболочек рассматривается лишь один класс краевых задач теории упругости. Считается, что на лицевых поверхностях пластинки или оболочки заданы условия первой краевой задачи теории упругости, т.е. заданы значения соответствующих трех компонент тензора напряжений. Когда на лицевых поверхностях пластинки заданы значения компонент вектора перемещения или смешанные условия, гипотезы классической и уточненных теорий неприменимы [1,2].

Для решения подобных классов задач эффективным оказался асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений [3,4,5,6,7]. Найдена принципиально новая асимптотика для компонент тензора напряжений и вектора перемещения, позволившая решать подобные классы задач для изотропных и ортотропных пластин [1,2]. Соответствующая статическая 3D смешанная задача для ортотропной пластинки решена в [8]. Найденная асимптотика позволяет найти решения также динамических задач теории упругости для тонких тел [9].

В данной работе асимптотическим методом решена 3D статическая смешанная задача теории упругости для пластинки, имеющей плоскость упругой симметрии (13 независимых постоянных упругости) [10].

1. Основные уравнения и соотношения, постановка задачи

Имеем анизотропную прямоугольную пластинку, которая занимает область $D=\{(x,y,z):\ 0\le \mathrm{x}\le a,\ 0\le \mathrm{y}\le b,\ -h\le z\le h, h<<l, l=\min(a,b)\}$ (фиг. 1.)



Фиг. 1.

и имеет плоскость упругой симметрии *xOy* [10, Гл. 1, § 4].

Требуется найти решение уравнений равновесия теории упругости

$$\frac{\partial\sigma_{jx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{jy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{jz}}{\partial z}+F_j(x,y,z)=0,\quad j=x,y,z, \tag{1}$$

при соотношениях упругости

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx} = a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} + a_{16}\sigma_{xy};\\
&\varepsilon_{yy} = a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz} + a_{26}\sigma_{xy};\\
&\varepsilon_{zz} = a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz} + a_{36}\sigma_{xy};\\
&\varepsilon_{xy} = a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{36}\sigma_{zz} + a_{66}\sigma_{xy};\\
&\varepsilon_{xz} = a_{45}\sigma_{yz} + a_{55}\sigma_{xz}; \quad \varepsilon_{yz} = a_{44}\sigma_{yz} + a_{45}\sigma_{xz}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Решение должно удовлетворять следующим граничным условиям

$$
\begin{aligned}
&z = h: \qquad w = -w^{+}(x, y); \quad \sigma_{xz} = 0; \quad \sigma_{yz} = 0;\\
&z = -h: \qquad u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Условия на боковых поверхностях пластинки пока не будем конкретизировать. Ими обусловлено появление пограничного слоя. Вопрос, связанный с пограничным слоем, обычно рассматривается отдельно.

2. Асимптотический метод решения задачи

Чтобы решить поставленную задачу, в уравнениях равновесия (1) и соотношениях упругости (2) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям:

$$
\xi = \frac{x}{l}; \quad \eta = \frac{y}{l}; \quad \zeta = \frac{z}{h}; \quad U = \frac{u}{l}; \quad V = \frac{v}{l}; \quad W = \frac{w}{l},
\tag{4}
$$

в результате получим:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{jx}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{jy}}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{jz}}{\partial\zeta} + lF_j = 0, \quad \varepsilon = \frac{h}{l};\\
&\frac{\partial U}{\partial\xi} = a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} + a_{16}\sigma_{xy};\\
&\frac{\partial V}{\partial\eta} = a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz} + a_{26}\sigma_{xy};\\
&\varepsilon^{-1}\frac{\partial W}{\partial\zeta} = a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz} + a_{36}\sigma_{xy};\\
&\frac{\partial U}{\partial\eta} + \frac{\partial V}{\partial\xi} = a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{36}\sigma_{zz} + a_{66}\sigma_{xy};\\
&\frac{\partial W}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta} = a_{45}\sigma_{yz} + a_{55}\sigma_{xz}; \quad \frac{\partial W}{\partial\eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta} = a_{44}\sigma_{yz} + a_{45}\sigma_{xz}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Система (5) сингулярно возмущена малым параметром ε. Ее решение складывается из решений внешней задачи $\left(I^{out}\right)$ и пограничного слоя $\left(I^{b}\right)$:

$$I = I^{out} + I_b. \tag{6}$$

Решение внешней задачи будем искать в виде [1]

$$I^{out} = \varepsilon^{q_i + s} I^{(s)} \quad s = \overline{0, N}, \tag{7}$$

где $q_i = -1$ для $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$, $q_i = 0$ для U, V, W, обозначение $s = \overline{0, N}$ означает, что в (7) по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование по целочисленным значениям s от нуля до числа приближений N.

Асимптотика (7) принципиально отличается от асимптотики тех же величин в классической теории пластин. Например, в задачах изгиба по классической теории пластин, имеем [1, 5]:

$$q = -2 \text{ для } \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}; \; q = -1 \text{ для } \sigma_{xz}, \sigma_{yz}; \quad q = 0 \text{ для } \sigma_{zz};$$

$$q = -2 \text{ для } U, V; \quad q = -3 \text{ для } W. \tag{8}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решением, полученным асимптотикой (8), невозможно удовлетворить граничным условиям (3). Это следует также из гипотезы классической теории пластин относительно W. Принимается, что W не зависит от поперечной координаты z. Является очевидным, что при таком допущении невозможно удовлетворить условиям (3) относительно W.

Чтобы определить коэффициенты $I^{(s)}$ подставим (7) в (5) и приравняем в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при ε, получим:

$$\frac{\partial \sigma_{jx}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{jz}^{(s)}}{\partial \zeta} + F_j^{(s)} = 0, \; j = x, y, z, \; F_j^{(0)} = \frac{h^2}{l} F_j, F_j^{(s)} = 0, s \neq 0;$$

$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} = a_{11}\sigma_{xx}^{(s)} + a_{12}\sigma_{yy}^{(s)} + a_{13}\sigma_{zz}^{(s)} + a_{16}\sigma_{xy}^{(s)};$$

$$\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} = a_{12}\sigma_{xx}^{(s)} + a_{22}\sigma_{yy}^{(s)} + a_{23}\sigma_{zz}^{(s)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(s)};$$

$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{13}\sigma_{xx}^{(s)} + a_{23}\sigma_{yy}^{(s)} + a_{33}\sigma_{zz}^{(s)} + a_{36}\sigma_{xy}^{(s)}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}=a_{16}\sigma_{xx}^{(s)}+a_{26}\sigma_{yy}^{(s)}+a_{36}\sigma_{zz}^{(s)}+a_{66}\sigma_{xy}^{(s)};$$

$$\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta}=a_{45}\sigma_{yz}^{(s)}+a_{55}\sigma_{xz}^{(s)};\quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta}=a_{44}\sigma_{yz}^{(s)}+a_{45}\sigma_{xz}^{(s)}.$$

Любая величина $Q^{(m)}$ системы (9) равна нулю, при $m<0.$

Из системы (9), напряжения можно выразить через перемещения $U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$. Первые четыре соотношения упругости составляют алгебраическую систему относительно $\sigma_{xx}^{(s)}, \sigma_{yy}^{(s)}, \sigma_{zz}^{(s)}, \sigma_{xy}^{(s)}$. Решив эту систему, получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(s)}&=\frac{1}{\Delta}\left(\gamma_{13}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}+\gamma_{11}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi}-\gamma_{12}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}-\gamma_{14}\left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}\right)\right)\\
\sigma_{yy}^{(s)}&=\frac{1}{\Delta}\left(-\gamma_{23}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}-\gamma_{21}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi}+\gamma_{22}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}+\gamma_{24}\left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}\right)\right);\\
\sigma_{zz}^{(s)}&=\frac{1}{\Delta}\left(\gamma_{33}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}+\gamma_{31}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi}-\gamma_{32}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}-\gamma_{34}\left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}\right)\right);\\
\sigma_{xy}^{(s)}&=\frac{1}{\Delta}\left(-\gamma_{43}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}-\gamma_{41}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi}+\gamma_{42}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}+\gamma_{44}\left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}\right)\right);
\end{aligned}\tag{10}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{16}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{26}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{36}\\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{66}\end{vmatrix},$$

где γ_{ij} является минором элемента, стоящего на пересечении i-того столбца и j-той строки определителя $\Delta.$

Из остальных соотношений упругости определяются $\sigma_{xz}^{(s)}, \sigma_{yz}^{(s)}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}^{(s)}&=\frac{1}{\alpha_1}\left(a_{44}\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta}-a_{45}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta}+a_{44}\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi}-a_{45}\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}\right);\\
\sigma_{yz}^{(s)}&=-\frac{1}{\alpha_1}\left(a_{45}\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta}-a_{55}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta}+a_{45}\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi}-a_{55}\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}\right);
\end{aligned}\tag{11}$$

$\alpha_1 = \left(a_{44}a_{55} - a_{45}^2\right)$.

Подставив значения напряжений $\sigma_{xz}^{(s)}, \sigma_{yz}^{(s)}, \sigma_{zz}^{(s)}$ в уравнения равновесия (9), получим следующую систему уравнений для определения $U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\alpha_1}\left(a_{44}\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2} - a_{45}\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2} + a_{44}\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta} - a_{45}\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}\right) = \\
= -F_x^{(s)} - \frac{\partial\sigma_{xx}^{(s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial\eta}; \\
-\frac{1}{\alpha_1}\left(a_{45}\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2} - a_{55}\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2} + a_{45}\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta} - a_{55}\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}\right) = \\
= -F_y^{(s)} - \frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\sigma_{yy}^{(s-1)}}{\partial\eta}; \\
\frac{1}{\Delta}\left(\gamma_{33}\frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \gamma_{31}\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta} - \gamma_{32}\frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} - \gamma_{34}\left(\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} + \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}\right)\right) = \\
= -F_z^{(s)} - \frac{\partial\sigma_{xz}^{(s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\sigma_{yz}^{(s-1)}}{\partial\eta}.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Из первых двух уравнений (12) вытекают уравнения для определения $U^{(s)}, V^{(s)}$, а из третьего уравнения для $W^{(s)}$:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2} = R_U^{(s)},\ \ R_U^{(s)} = -\left(a_{55}F_x^{(s)} + a_{45}F_y^{(s)} + a_{55}\frac{\partial\sigma_{xx}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \right. \\
\left. + a_{55}\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial\eta} + a_{45}\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial\xi} + a_{45}\frac{\partial\sigma_{yy}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right) - \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}; \\
\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2} = R_V^{(s)},\ \ R_V^{(s)} = -\left(a_{45}F_x^{(s)} + a_{44}F_y^{(s)} + a_{45}\frac{\partial\sigma_{xx}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \right. \\
\left. + a_{45}\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial\eta} + a_{44}\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial\xi} + a_{44}\frac{\partial\sigma_{yy}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right) - \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta};
\end{gathered}
\tag{13}
$$

$$\frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial\zeta^2}=R_w^{(s)},\ \ R_W^{(s)}=-\frac{1}{\gamma_{33}}\left(\Delta\left(F_z^{(s)}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right)+\right.$$

$$\left.+\gamma_{31}\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}-\gamma_{32}\frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}-\gamma_{34}\left(\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}+\frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}\right)\right).$$

В случае ортотропных пластин $a_{45}=0$ и уравнения (12) относительно $U^{(s)}$ и $V^{(s)}$ независимы, из (13) же следует, что они независимы лишь для исходного приближения $s=0$.

Решив уравнения (13) получим

$$U^{(s)}=\int_0^\zeta d\zeta\int_0^\zeta R_U^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta+\zeta A_1^{(s)}(\xi,\eta)+A_2^{(s)}(\xi,\eta);$$

$$V^{(s)}=\int_0^\zeta d\zeta\int_0^\zeta R_V^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta+\zeta B_1^{(s)}(\xi,\eta)+B_2^{(s)}(\xi,\eta); \tag{14}$$

$$W^{(s)}=\int_0^\zeta d\zeta\int_0^\zeta R_w^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta+\zeta C_1^{(s)}(\xi,\eta)+C_2^{(s)}(\xi,\eta).$$

Решение (14) содержит пока неизвестные функции $A_i^{(s)}, B_i^{(s)}, C_i^{(s)}$, которые однозначно определяются из граничных условий (3), которые согласно (4) и (7) принимают вид:

$$\begin{aligned}&\zeta=1:\quad W^{(s)}=-w^{+(s)},\ w^{+(0)}=w^+/l,\ w^{+(s)}=0, s\neq 0;\quad \sigma_{xz}^{(s)}=0;\quad \sigma_{yz}^{(s)}=0;\\&\zeta=-1:\quad U^{(s)}=0;\quad V^{(s)}=0;\quad W^{(s)}=0.\end{aligned} \tag{15}$$

Используя формулы (11), (14) и удовлетворив условиям (15), получим:

$$\left(a_{44}\int_0^1 R_U^{(s)}\,d\zeta-a_{45}\int_0^1 R_V^{(s)}\,d\zeta\right)+\left(a_{44}\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi}-a_{45}\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta}\right)_{\zeta=1}+$$

$$+a_{44}A_1^{(s)}-a_{45}B_1^{(s)}=0;$$

$$\left(a_{45}\int_0^1 R_U^{(s)}\,d\zeta-a_{55}\int_0^1 R_V^{(s)}\,d\zeta\right)+\left(a_{45}\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi}-a_{55}\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta}\right)_{\zeta=1}+$$

$$+a_{45}A_1^{(s)}-a_{55}B_1^{(s)}=0;$$

$$\int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_U^{(s)}\, d\zeta - A_1^{(s)} + A_2^{(s)} = 0; \quad \int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_V^{(s)}\, d\zeta - B_1^{(s)} + B_2^{(s)} = 0; \tag{16}$$

$$\int_0^{1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_w^{(s)}\, d\zeta + C_1^{(s)} + C_2^{(s)} = -w^{+(s)}; \quad \int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_w^{(s)}\, d\zeta - C_1^{(s)} + C_2^{(s)} = 0.$$

Решив эту систему, будем иметь:

$$A_1^{(s)} = -\int_0^1 R_U^{(s)}\, d\zeta - \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi}\right)_{\zeta=1}; \quad B_1^{(s)} = -\int_0^1 R_V^{(s)}\, d\zeta - \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}\right)_{\zeta=1};$$

$$A_2^{(s)} = -\int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_U^{(s)}\, d\zeta - \int_0^1 R_U^{(s)}\, d\zeta - \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi}\right)_{\zeta=1};$$

$$B_2^{(s)} = -\int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_V^{(s)}\, d\zeta - \int_0^1 R_V^{(s)}\, d\zeta - \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}\right)_{\zeta=1}; \tag{17}$$

$$C_1^{(s)} = -\frac{1}{2}\left(w^{+(s)} + \int_0^1 d\zeta \int_0^{\zeta} R_w^{(s)}\, d\zeta - \int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_w^{(s)}\, d\zeta\right);$$

$$C_2^{(s)} = -\frac{1}{2}\left(w^{+(s)} + \int_0^1 d\zeta \int_0^{\zeta} R_w^{(s)}\, d\zeta + \int_0^{-1} d\zeta \int_0^{\zeta} R_w^{(s)}\, d\zeta\right).$$

Имея значения функций $A_i^{(s)}, B_i^{(s)}, C_i^{(s)}$, по формулам (10), (11) и (14) определятся все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения.

Найденное решение удовлетворяет уравнениям равновесия (1), соотношениям упругости (2) и граничным условиям (3) на лицевых поверхностях пластинки (внешние условия). Это решение практически является решением для пространственного слоя толщины $2h$. Как правило, оно не будет удовлетворять условиям на боковой поверхности пластинки.

3. Математически точное решение

Если функция $w^+(x, y)$ является алгебраическим многочленом, итерационный процесс обрывается на определенном приближении, зависящем от степени многочлена, в результате получим математически точное решение внешней задачи. Для иллюстрации сказанного, пусть

$$w^+ = l\left(a_0 + a_1\xi + a_2\eta\right); \quad F_x = 0; \quad F_y = 0; \quad F_z = -\rho g, \tag{18}$$

где последним слагаемым $F_z = -\rho g$ учитывается вес пластинки.

Согласно (9), (10), (11), (13), (14), (17), (18) будем иметь при $s=0$

$$U^{(0)}=V^{(0)}=\sigma_{xz}^{(0)}=\sigma_{yz}^{(0)}=0;$$

$$W^{(0)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}}\frac{h^2\rho g}{l}\left(\zeta^2-1\right)-\left(a_0+a_1\xi+a_2\eta\right)\left(\zeta+1\right)\right);$$

$$\sigma_{xx}^{(0)}=\frac{\gamma_{13}}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}}\frac{h^2\rho g}{l}\zeta-\frac{1}{2}\left(a_0+a_1\xi+a_2\eta\right)\right);$$

$$\sigma_{yy}^{(0)}=-\frac{\gamma_{23}}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}}\frac{h^2\rho g}{l}\zeta-\frac{1}{2}\left(a_0+a_1\xi+a_2\eta\right)\right); \qquad (19)$$

$$\sigma_{zz}^{(0)}=\frac{\gamma_{33}}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}}\frac{h^2\rho g}{l}\zeta-\frac{1}{2}\left(a_0+a_1\xi+a_2\eta\right)\right);$$

$$\sigma_{xy}^{(0)}=-\frac{\gamma_{43}}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}}\frac{h^2\rho g}{l}\zeta-\frac{1}{2}\left(a_0+a_1\xi+a_2\eta\right)\right),$$

при $s=1$

$$U^{(1)}=\frac{1}{4}\left(\beta_1+a_1\right)\zeta^2-\frac{1}{2}\left(\beta_1-a_1\right)\zeta-\frac{1}{4}\left(3\beta_1-a_1\right);$$

$$V^{(1)}=\frac{1}{4}\left(\beta_2+a_2\right)\zeta^2-\frac{1}{2}\left(\beta_2-a_2\right)\zeta-\frac{1}{4}\left(3\beta_2-a_2\right);$$

$$W^{(1)}=\sigma_{xx}^{(1)}=\sigma_{yy}^{(1)}=\sigma_{zz}^{(1)}=\sigma_{xy}^{(1)}=0; \qquad (20)$$

$$\sigma_{xz}^{(1)}=\frac{\left(a_{44}\beta_1-a_{45}\beta_2\right)}{2\alpha_1}\left(\zeta-1\right);\quad \sigma_{yz}^{(1)}=-\frac{\left(a_{45}\beta_1-a_{55}\beta_2\right)}{2\alpha_1}\left(\zeta-1\right),$$

где

$$\beta_1=\left(\gamma_{13}a_{55}a_1-\gamma_{43}a_{55}a_2-\gamma_{43}a_{45}a_1-\gamma_{23}a_{45}a_2\right)/\Delta\ ;$$

$$\beta_2=\left(\gamma_{13}a_{45}a_1-\gamma_{43}a_{45}a_2-\gamma_{43}a_{44}a_1-\gamma_{23}a_{44}a_2\right)/\Delta.$$

Все величины при $s\geq 2$ тождественно равны нулю, т. е. итерация обрывается на приближении $s=1$, следовательно имеем математически точное решение:

$$u=h\left(\frac{1}{4}\left(\beta_1+a_1\right)\zeta^2-\frac{1}{2}\left(\beta_1-a_1\right)\zeta-\frac{1}{4}\left(3\beta_1-a_1\right)\right);$$

$$v = h\left(\frac{1}{4}(\beta_2 + a_2)\zeta^2 - \frac{1}{2}(\beta_2 - a_2)\zeta - \frac{1}{4}(3\beta_2 - a_2)\right);$$

$$\begin{aligned}
w &= \frac{l}{2}\left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}}\frac{h^2\rho g}{l}(\zeta^2 - 1) - (a_0 + a_1\xi + a_2\eta)(\zeta + 1)\right);\\
\sigma_{xx} &= \frac{l}{h}\frac{\gamma_{13}}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}}\frac{h^2\rho g}{l}\zeta - \frac{1}{2}(a_0 + a_1\xi + a_2\eta)\right);\\
\sigma_{yy} &= -\frac{l}{h}\frac{\gamma_{23}}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}}\frac{h^2\rho g}{l}\zeta - \frac{1}{2}(a_0 + a_1\xi + a_2\eta)\right);\\
\sigma_{zz} &= \frac{l}{h}\frac{\gamma_{33}}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}}\frac{h^2\rho g}{l}\zeta - \frac{1}{2}(a_0 + a_1\xi + a_2\eta)\right);\\
\sigma_{xy} &= -\frac{l}{h}\frac{\gamma_{43}}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{\gamma_{33}}\frac{h^2\rho g}{l}\zeta - \frac{1}{2}(a_0 + a_1\xi + a_2\eta)\right);\\
\sigma_{xz} &= \frac{(a_{44}\beta_1 - a_{45}\beta_2)}{2\alpha_1}(\zeta - 1); \quad \sigma_{yz} = -\frac{(a_{45}\beta_1 - a_{55}\beta_2)}{2\alpha_1}(\zeta - 1).
\end{aligned} \tag{21}$$

В частности, если учесть лишь влияние веса $(w^+ = 0)$, будем иметь

$$\begin{aligned}
&u = v = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0;\\
&w = \frac{1}{2}\frac{\Delta}{\gamma_{33}}h^2\rho g(\zeta^2 - 1);\\
&\sigma_{xx} = \frac{\gamma_{13}}{\gamma_{33}}h\rho g\zeta; \quad \sigma_{yy} = -\frac{\gamma_{23}}{\gamma_{33}}h\rho g\zeta;\\
&\sigma_{zz} = h\rho g\zeta; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\gamma_{43}}{\gamma_{33}}h\rho g\zeta.
\end{aligned} \tag{22}$$

Найденное решение внешней задачи, как правило не будет удовлетворять граничным условиям на боковых поверхностях пластинки. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя (I_b). Это решение можно построить автономно и срастить его с решением внешней задачи, описанным в [1] способом. Этот вопрос для ортотропных пластин изучен авторами в [11]. Величины пограничного слоя экспоненциально убывают при удалении от боковой поверхности внутрь пластинки. Для пластин, имеющих плоскость упругой симметрии вопрос рассматривается аналогичным образом.

Заключение. Найдено асимптотическое решение трехмерной внешней задачи для анизотропной прямоугольной пластинки, которая имеет плоскость упругой симметрии. На верхней лицевой поверхности пластинки заданы значения нормального перемещения, тангенциальные касательные напряжения равны нулю, а нижняя лицевая поверхность жестко закреплена. Определены все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения. Указаны случаи, когда найденное решение становится математически точным. В качестве иллюстрации сказанного, получено решение задачи, когда нормальное перемещение есть линейная функция от тангенциальных координат и учитывается также влияние веса пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит. 1997. 414с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория деформируемых тонкостенных систем. // В сб. Механика. 2009: Труды межд. школы – конференции молодых ученых. Ереван. Изд-во ЕГУАС, 2009. С. 5-35.
3. Friedrichs K.O. Asymptotic Phenomena in Mathematical Physics // Bull. Amer. Math. Soc., 1955, Vol.61, p.485.
4. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1968. 464 с.
5. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668-686.
6. Найфе А.Х. Методы визмущений. М.: Мир. 1976. 455 с.
7. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука. 1981. 398 с.
8. Япуджян В.Т. Об одной смешанной 3D задаче теории упругости для ортотропной пластинки. // Доклады. Изд-во “Гитутюн” НАН РА. Т.123. №2. 2023. С. 31-37.
9. Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore. London. World Scientific. 2015. 376p.
10. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Изд. 2-е. Наука. М.. 1977. 416 стр.
11. Агаловян Л.А., Япуджян В.Т. О пограничном слое в смешанной 3D краевой задаче ортотропной пластинки. // Известия НАН РА. Механика. Т. 76. №3. 2023. С. 64-75.

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович – академик НАН РА, д.ф.-м.н., зав. отделом Института механики НАН РА. Тел.: (+37410) 529630, E-mail: lagal@sci.am

Япуджян Варужан Тигранович – к.ф.-м.н., науч. сотр. Института механики НАН РА, Тел.: (+37444) 990250, E-mail: varuzhanyapujyan48@gmail.com

Поступила в редакцию 12.02.2025