

**АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОГО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО  
НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ С УПРУГИМ СТРИНГЕРОМ НА ГРАНИЦЕ**

**Аветисян С.А., Амирджанян А.А., Саакян А.В.**

**Ключевые слова:** антиплоская деформация, неоднородный слой, стрингер, контактные напряжения, коэффициент концентрации напряжений, механические квадратуры.

**Avetisyan S.A., Amirjanyan H.A., Sahakyan A.V.**

**Antiplane deformation of an elastic exponentially non-homogeneous layer with an elastic stringer at the boundary**

**Key words:** antiplane deformation, non-homogeneous layer, stringer, contact stresses, stress concentration factor, mechanical quadratures.

Under antiplane deformation conditions, a numerical study of the stress-strain state of a layer whose shear modulus varies exponentially across its thickness was performed. The lower edge of the layer is rigidly clamped, and on the upper edge there is a thin elastic stringer subjected to external forces that ensure the fulfillment of antiplane deformation conditions. The dependence of tangential contact stresses and their concentration factors on the layer thickness and the exponent of layer heterogeneity was revealed.

**Ավետիսյան Ս.Ա., Ամիրջանյան Հ.Ա., Սահակյան Ա.Վ.**

**Ցուցչային օրենքով անհամասեռ առաձգական շերտի հակահարթ դեֆորմացիան, երբ շերտի եզրին առկա է առաձգական վերադիր**

Կատարվել է հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում գտնվող և ըստ հաստության ցուցչային օրենքով փոփոխվող սահքի մոդուլ ունեցող շերտի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի թվային ուսումնասիրությունը: Շերտի ստորին եզրը կոշտ ամրակցված է, իսկ վերին եզրին ամրացված է բարակ առաձգական վերադիր, որը գտնվում է հակահարթ դեֆորմացիայի պայմանների կատարումը ապահովող արտաքին ուժերի ազդեցության տակ:

Բացահայտվել է շոշափող կոնտակտային լարումների և դրանց կոնցենտրացիայի գործակիցների կախվածությունը շերտի հաստությունից և շերտի անհամասեռության ցուցիչից:

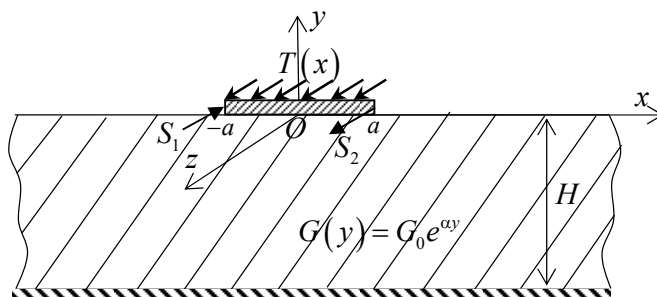
В условиях антиплоской деформации проведено численное исследование напряженно-деформированного состояния слоя, модуль сдвига которого по толщине изменяется по экспоненциальному закону. Нижняя грань слоя жестко закреплена, а на верхней грани имеется тонкий упругий стрингер, подверженный действию внешних усилий, обеспечивающих выполнение условий антиплоской деформации. Выявлена зависимость тангенциальных контактных напряжений и коэффициентов их концентрации от толщины слоя и показателя неоднородности слоя.

**Введение.** Контактные и смешанные задачи теории упругости при антиплоской деформации в идейном и методологическом аспектах тесно связаны с аналогичными задачами теории установившейся фильтрации жидкости в пористых средах, которые ранее были рассмотрены в работах [1-3]. В настоящей работе рассматривается одна смешанная граничная задача теории упругости при антиплоской деформации для слоя, модуль сдвига которого по глубине изменяется по экспоненциальному закону, а на верхней границе находится тонкий упругий стрингер, через который передается

нагрузка. Близость рассматриваемой задачи с задачами фильтрации обусловлена одинаковыми определяющими уравнениями.

В работе [4] была поставлена аналогичная задача в общей постановке, когда на границе неоднородного слоя имеется произвольное конечное число стрингеров. Выписаны определяющие системы уравнений, но отсутствует численный анализ.

**Постановка задачи.** Пусть имеем слой, который в прямоугольной системе координат  $Oxyz$  занимает область  $\Omega = \{-\infty < x, z < \infty; -H \leq y \leq 0\}$  и обладает модулем сдвига  $G$ , изменяющимся по глубине по закону  $G = G_0 e^{\alpha y}$  ( $-H \leq y \leq 0$ ). Нижняя грань  $y = -H$  слоя  $\Omega$  предполагается жёстко закреплённой, а к верхней грани прикреплен тонкий упругий полосовой стрингер конечной ширины  $\omega = \{-a < x < a; y = 0; -\infty < z < \infty\}$ . Стрингер имеет высоту  $h \ll a$  и модуль сдвига  $G_s$ . Предположим, что на верхней грани  $y = h$  полосы  $\omega$  действуют касательные силы интенсивности  $T(x)$ , а по средней линии боковых граней  $x = -a$  и  $x = a$  полосы  $\omega$  действуют касательные силы  $S_1$  и  $S_2$  соответственно. При этом все указанные силовые факторы действуют в направлении оси  $Oz$  и равномерно распределены по этой оси, тем самым обеспечивая выполнение условий антиплоской деформации (фиг.1).



Фиг. 1 Схематическое представление задачи

Требуется определить зависимость распределения контактных напряжений под стрингером и коэффициентов их концентрации на концах от показателя неоднородности  $\alpha$  и толщины слоя  $H$ .

**Вывод определяющей системы уравнений.** Воспользуемся выражением для перемещений точек верхней грани  $y = 0$  экспоненциально неоднородной полосы  $\Omega_0 = \{-\infty < x < \infty; -H \leq y \leq 0\}$  [4]:

$$w(x) = \frac{2}{\pi G_0} \int_{-a}^a L(x-s) \tau(s) ds \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1)$$

$$L(x) = \int_0^{\infty} \frac{\text{th}(\mu H/2) \cos(\lambda x)}{\mu - \alpha \text{th}(\mu H/2)} d\lambda ; \quad \mu = \sqrt{\alpha^2 + 4\lambda^2} ,$$

Здесь  $w(x)$  - перемещения точек грани  $y = 0$  полосы  $\Omega_0$  в направлении оси  $Oz$ ,  $\tau(s)$  - неизвестные касательные напряжения, возникающие под стрингером. После дифференцирования по  $x$  будем иметь

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{2}{\pi G_0} \int_{-a}^a M(s-x) \tau(s) ds \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2)$$

$$M(x) = \int_0^{\infty} \frac{\text{th}(\mu H/2) \lambda \sin(\lambda x)}{\mu - \alpha \text{th}(\mu H/2)} d\lambda .$$

Далее запишем дифференциальное уравнение деформирования средней линии стрингера, с которой, по модели Мелана при антиплоской деформации [5,6], идентифицируется весь стрингер:

$$hG_s \frac{d^2 w_s(x)}{dx^2} = \tau(x) - T(x) \quad (-a < x < a), \quad (3)$$

где  $w_s(x)$  - перемещение точек стрингера в направлении оси  $Oz$ . При этом условие равновесия стрингера имеет вид

$$\int_{-a}^a \tau(x) dx = V = S_2 - S_1 + \int_{-a}^a T(x) dx . \quad (4)$$

Интегрирование уравнения (3) даст

$$hG_s \frac{dw_s}{dx} = \frac{S_2 - S_1}{2} + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \text{sign}(x-s) [\tau(s) - T(s)] ds \quad (-a < x < a). \quad (5)$$

Теперь, удовлетворяя условию контакта стрингера с упругой полосой  $\Omega_0$ , записанному в виде равенства производных  $\frac{dw(x)}{dx} = \frac{dw_s(x)}{dx}$ , после простых преобразований относительно неизвестных касательных напряжений  $\tau(x)$  получим определяющее интегральное уравнение:

$$\int_{-a}^a M(s-x) \tau(s) ds + \frac{\pi G_0}{4hG_s} \int_{-a}^a \text{sign}(s-x) \tau(s) ds = g(x) \quad (-a < x < a) \quad (6)$$

где

$$M(x) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda \text{th}(\mu H/2) \sin(\lambda x) d\lambda}{\mu - \alpha \text{th}(\mu H/2)}, \quad (7)$$

$$g(x) = \frac{\pi G_0}{4hG_s} \left[ -S_1 + S_2 + \int_{-a}^a \text{sign}(s-x) T(s) ds \right] \quad (-a < x < a).$$

Выделим особенности поведения ядра  $M(x)$ . Нетрудно проверить, что подынтегральная функция интеграла Фурье (7) на бесконечности имеет поведение:

$$\frac{\lambda \operatorname{th}(\mu H/2)}{\mu - \alpha \operatorname{th}(\mu H/2)} = \frac{1}{2} \operatorname{sign} \lambda + \frac{\alpha}{4\lambda} + \frac{\alpha^2}{16\lambda^2} \operatorname{sign} \lambda + O\left(\frac{\alpha^4}{\lambda^4}\right) \quad (\lambda \rightarrow \pm\infty)$$

Учитывая, что интегралы Фурье от первых двух слагаемых понимаются в смысле обобщенных функций и равны [7]

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \sin(\lambda x) d\lambda = \frac{1}{2x} ; \quad \frac{\alpha}{4} \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} d\lambda = \frac{\alpha\pi}{8} \operatorname{sign} x ,$$

ядро  $M(x)$  представим в виде:

$$M(x) = \frac{1}{2x} + \frac{\alpha\pi}{8} \operatorname{sign} x + \frac{1}{2} N(x) \quad (8)$$

$$N(x) = \int_0^\infty \frac{(4\lambda^2 + 2\lambda\alpha + \alpha^2) \operatorname{th}(\mu H/2) - (2\lambda + \alpha)\mu}{2\lambda(\mu - \alpha \operatorname{th}(\mu H/2))} \sin(\lambda x) d\lambda \quad (9)$$

Окончательно уравнение (6) перепишем в виде сингулярного интегрального уравнения

$$\int_{-a}^a \left[ \frac{1}{s-x} + \frac{\pi}{4} \left( \alpha + \frac{2G_0}{hG_s} \right) \operatorname{sign}(s-x) + N(s-x) \right] \tau(s) ds = 2g(x) \quad (|x| < a) \quad (10)$$

Отметим, что уравнение (10) должно рассматриваться совместно с условием равновесия стрингера (4).

Решение системы уравнений (10) и (4) построим при помощи метода механических квадратур.

**Метод механических квадратур.** Предварительно перейдем к безразмерным величинам и сведем интервал интегрирования к интервалу  $(-1, 1)$ . Получим

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\xi - \eta} + \frac{\pi}{4} (\alpha_* + 2\lambda_*) \operatorname{sign}(\xi - \eta) + N_*(\xi - \eta) \right] \tau_*(\xi) d\xi = f(\eta) \quad (|\eta| < 1) \quad (11)$$

$$\int_{-1}^1 \tau_*(\xi) d\xi = V_* \quad (12)$$

где

$$\alpha_* = \alpha a; \quad \lambda_* = \frac{aG_0}{hG_s}; \quad V_* = \frac{V}{aG_0}; \quad H_* = \frac{H}{a}; \quad \mu_* = \sqrt{\alpha_*^2 + 2\omega^2};$$

$$\tau_*(\xi) = \frac{\tau(a\xi)}{G_0}; \quad S_i^* = \frac{S_i}{aG_0} \quad (i=1,2); \quad T_*(\xi) = \frac{T(a\xi)}{G_0};$$

$$N_*(\zeta) = \int_0^\infty \frac{(4\omega^2 + 2\omega\alpha_* + \alpha_*^2) \operatorname{th}(\mu_* H_*/2) - (2\omega + \alpha_*)\mu_*}{2\omega(\mu_* - \alpha_* \operatorname{th}(\mu_* H_*/2))} \sin(\omega\zeta) d\omega;$$

$$f(\eta) = \frac{\pi\lambda_*}{2} \left[ -S_1^* + S_2^* + \int_{-1}^1 \operatorname{sign}(\xi - \eta) T_*(\xi) d\xi \right].$$

Уравнение (11) является сингулярным интегральным уравнением первого рода и, поэтому, его решение имеет корневую особенность на концах. Следовательно, решение системы (11)-(12) будем искать в виде:

$$\tau_*(\xi) = \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (13)$$

где  $\varphi(\xi)$  - гильдеровская функция на отрезке  $[-1,1]$ .

Новую искомую функцию  $\varphi(\xi)$  будем искать в виде интерполяционного многочлена Лагранжа по узлам в корнях многочлена Чебышева первого рода  $T_n(t)$ :

$$\varphi(t) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \frac{X_p T_n(t)}{(t-u_p) U_{n-1}(u_p)} \quad T_n(u_p) = 0, \quad (-1 \leq t \leq 1) \quad (14)$$

где  $n$  - порядок аппроксимации, оптимальным выбором которого можно достичь желаемой точности решения,  $U_n(t)$ - многочлен Чебышева второго рода, коэффициенты  $X_p$  ( $p = \overline{1, n}$ ) подлежат определению.

Далее, воспользовавшись квадратурными формулами [8, 9]:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(x)}{x-z} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{p=1}^n \frac{\varphi(u_p)}{u_p - z} \left[ 1 - \frac{U_{n-1}(z)}{U_{n-1}(u_p)} \right] \quad z \in (-1,1)$$

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sign}(x-y) \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{2}{n} \sum_{p=1}^n \varphi(u_p) A(u_p, y) \quad (-1 \leq y \leq 1)$$

$$A(u_p, y) = -\arcsin y + 2\sqrt{1-y^2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} T_m(u_p) U_{m-1}(y)$$

и выбрав в качестве точек коллокации корни многочлена Чебышева второго рода  $U_{n-1}(t_r) = 0$  ( $r = \overline{1, n-1}$ ), систему уравнений (11)-(12) сведем к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\pi}{n} \sum_{p=1}^n \left[ \frac{1}{u_p - t_r} + \left( \frac{\alpha_*}{2} + \lambda_* \right) A(u_p, t_r) + N_*(u_p - t_r) \right] X_p = f(t_r) \quad (r = \overline{1, n-1}) \quad (15)$$

$$\frac{\pi}{n} \sum_{p=1}^n X_p = V_*$$

Здесь

$$u_p = \cos \left[ \frac{(2p-1)\pi}{2n} \right] \quad (p = \overline{1, n}); \quad t_r = \cos \left( \frac{\pi r}{n} \right) \quad (r = \overline{1, n-1})$$

Таким образом, решение задачи свелось к определению коэффициентов  $X_p$ , посредством которых искомую функцию  $\varphi(\xi)$  можно восстановить по формуле (14) или по идентичной ей формуле

$$\varphi(t) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n X_p \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} T_m(t) T_m(u_p) \right] \quad (16)$$

Исходя из представления (13), нетрудно убедиться, что безразмерными коэффициентами концентрации контактных напряжений будут величины:

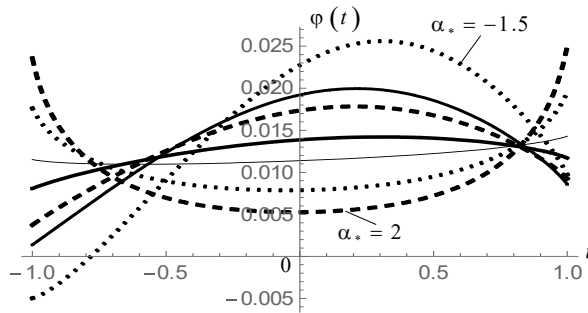
$$K_{-1} = \frac{\varphi(-1)}{\sqrt{2}}; \quad K_1 = \frac{\varphi(1)}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

**Численный анализ.** При численных расчетах для внешних силовых факторов приняты значения  $S_1^* = 0.01$ ;  $S_2^* = 0.02$ ;  $T_*(\eta) = 0.001$ ; для отношения модулей сдвига полосы и стрингера и относительной толщины стрингера примем значения  $G_0/G_1 = 0.01$  и  $h_* = 0.1$ . Далее эти величины будем считать неизменными, тогда неизменными будут и величины

$$\lambda_* = 0.1; \quad f(\xi) = 0.0001(5 + \xi); \quad V_* = 0.012.$$

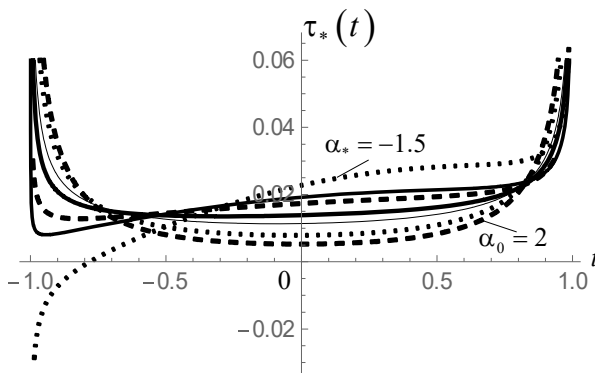
Будем проводить исследование зависимости распределения контактных напряжений и коэффициентов их концентрации на концах от значений показателя неоднородности  $\alpha_*$  и относительной толщины упругого неоднородного слоя  $H_*$ .

На фиг. 2 представлены кривые распределения регулярной части безразмерных контактных напряжений  $\varphi(t)$ , рассчитанных при  $H_* = 2$  и разных значениях показателя неоднородности  $\alpha_* = \{-1.5, -1.2, -1, -0.5, 0, 1, 2\}$ . Кривые, соответствующие указанным значениям показателя неоднородности, располагаются в порядке убывания значения на оси ординат, т.е.  $\varphi(0)$ .



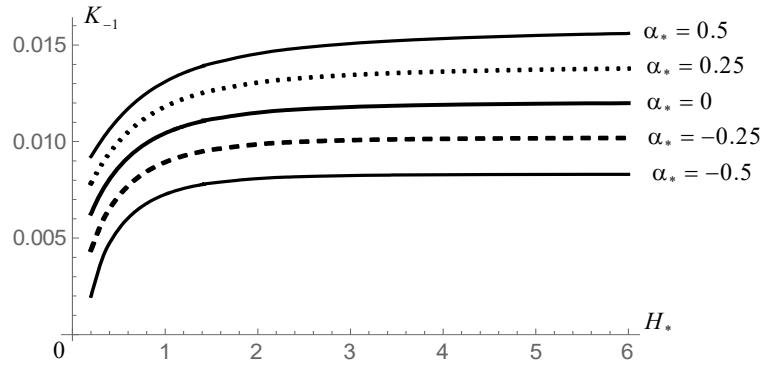
Фиг. 2 Кривые  $\varphi(t)$  при  $\alpha_* = \{-1.5, -1.2, -1, -0.5, 0, 1, 2\}$

На фиг. 3 представлены кривые распределения безразмерных контактных напряжений  $\tau_*(t)$ , рассчитанных при тех же значениях относительной толщины и показателя неоднородности. И здесь кривые, соответствующие указанным значениям показателя неоднородности, располагаются в порядке убывания значения на оси ординат, т.е.  $\tau_*(0)$ .



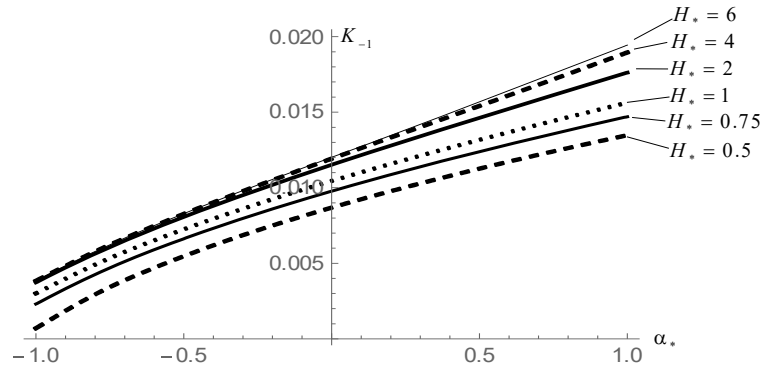
Фиг. 3 Кривые  $\tau_*(t)$  при  $\alpha_* = \{-1.5, -1.2, -1, -0.5, 0, 1, 2\}$

На фиг. 4 приведены кривые зависимости безразмерного коэффициента  $K_{-1}$  концентрации на левом конце зоны контакта струнгера со слоем от относительной толщины слоя  $H_*$  для различных значений показателя неоднородности  $\alpha_* = \{-0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5\}$ . Кривые для коэффициента  $K_{-1}$  отличаются от представленных лишь количественно, что обусловлено несимметричностью приложенных силовых факторов.



Фиг. 4 Зависимость коэффициентов концентрации напряжений от толщины слоя.

На фиг. 5 приведены кривые зависимости безразмерного коэффициента концентрации контактных напряжений у левого конца зоны контакта  $K_{-1}$  от показателя неоднородности  $\alpha_*$  при различных значениях относительной толщины слоя  $H_* = \{0.5, 0.75, 1, 2, 4, 6\}$ . Качественно такие же кривые имеют место и для  $K_1$ .

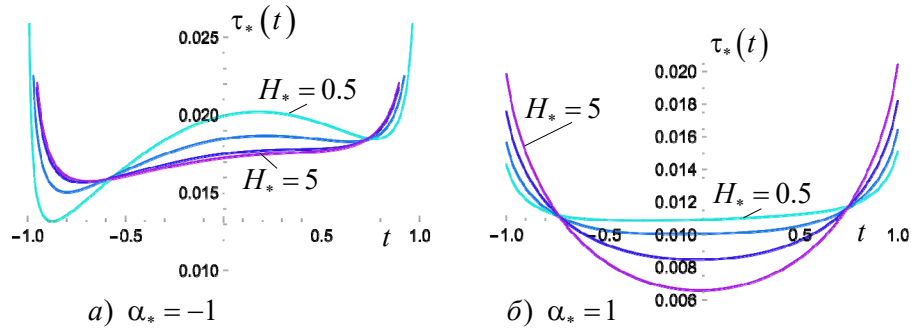


Фиг. 5 Зависимость коэффициентов концентрации напряжений от показателя неоднородности.

На фиг. 6а и фиг. 6б представлены кривые распределения контактных напряжений  $\tau_*(t)$ , рассчитанных при  $\alpha_* = -1$  и  $\alpha_* = 1$  для разных значений относительной толщины слоя  $H_* = \{0.5, 0.8, 1.5, 5\}$ . Кривые, соответствующие указанным значе-



ниям толщины слоя, на обеих фигурах располагаются опять-таки в порядке убывания значений  $\tau_*(0)$ .



Фиг. 6 Распределение контактных напряжений

**Закключение.** Из представленных графиков можно сделать следующие выводы:

1) для однородного слоя и слоя с уменьшающимся по глубине модулем сдвига ( $\alpha_* \geq 0$ ) выбранные, положительно направленные, силовые факторы преобладают над отрицательно направленной силой  $S_1$  и приводят к возникновению положительных контактных напряжений по всей зоне контакта, в то время как для слоя с достаточно большим показателем ( $\alpha_* = -1.5$ ) увеличения модуля сдвига с глубиной эта закономерность нарушается (фиг.3);

2) увеличение толщины слоя приводит к увеличению коэффициентов концентрации напряжений на обоих концах зоны контакта независимо от показателя неоднородности (фиг. 4);

3) при любом значении относительной толщины слоя увеличение показателя неоднородности ( $-1 \leq \alpha_* \leq 1$ ) приводит к увеличению коэффициентов концентрации, при этом чем меньше показатель неоднородности, тем быстрее, т.е. при меньших толщинах слоя, эти коэффициенты стремятся к предельным значениям при  $H_* \rightarrow \infty$  (фиг. 5);

4) несимметричность распределения контактных напряжений, обусловленная приложенными нагрузками, наиболее проявляется у слоя, модуль сдвига которого увеличивается, чем у слоя с уменьшающимся, с таким же показателем, модулем сдвига. В первом случае кривые для  $H_* = 1.5$  и  $H_* = 5$  достаточно близки друг к другу, а во втором случае они существенно разнятся (фиг.6). Этот факт подтверждает вывод, сделанный в предыдущем пункте.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян С.А. О двух смежных граничных задачах теории фильтрации и теории упругости для экспоненциально неоднородной полосы. Механика – 2013. Труды межд. школы-конф. мол. учёных, 1-4 октября 2013, Цахкадзор. С.40-44.
2. Mkhitaryan S.M., Tokmajyan H.V., Avetisyan S.A., Grigoryan M.S.. On Steady-State Filtration of Fluid in Strip-Like and Wedge-Shaped Porous Ground Bases. Advanced Materials Research Vol. 1020 (2014). Pp.373-378.
3. Аветисян С.А., Мкртчян М.М. Об установившейся фильтрации жидкости в пористой экспоненциально неоднородной полосе при заданном режиме давления.//Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №2. С.68–79.
4. Аветисян С.А. Об одной смешанной задаче для упругого экспоненциально неоднородного слоя при антиплоской деформации. Сб. науч. трудов межд. конф. "Актуальные проблемы механики сплошной среды". 21-26 сентября 2015, Цахкадзор. Ереван, 2015 стр.15-19.
5. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. – Ingr. Arch., 1932, Bd. 3, No2, S. 123–129.
6. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. – В сб.: Механика деформируемого твердого тела, Ереван, Изд-во НАН Армении, 1993, стр. 129–143.
7. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. СМБ, М., «Наука», 1977, 288 с.
8. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070
9. Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A. Quadrature formulas for integrals with a weak singularity in the kernel and a weight function of Jacobi polynomials with complex exponents. In Book: Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. book series Advanced Structured Materials (STRUCTMAT, volume 185), Editors: H.Altenbach, S.Mkhitaryan, V.Hakobyan, A.Sahakyan, 2023, p. 285- 298

### Сведения об авторах:

**Аветисян Сирануш Араратовна** – м.н.с. Института механики НАН РА,  
тел.: (374 95) 65 90 18. e-mail: [siranushav@gmail.com](mailto:siranushav@gmail.com)

**Амирджаниян Арутюн Арменович** – кандидат физ.-мат. наук., ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА,  
тел.: (37410) 56-81-88. e-mail: [amirjanyan@gmail.com](mailto:amirjanyan@gmail.com)

**Саакян Аветик Варздатович** – д.ф.м.н., зав. отделом, Институт механики НАН Армении,  
тел.: (37494) 57-93-48. E-mail: [avetik.sahakyan@sci.am](mailto:avetik.sahakyan@sci.am)

Поступила в редакцию 25.01.2025