

О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ КОНТАКТНОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ СТРИНГЕРАМИ И УПРУГОЙ
БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНОЙ

ՄԽԻՏԱՐՅԱՆ Ս.Մ., ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ Ս.Ա., ՄԿՐՏԿՅԱՆ Մ.Ս.

Ключевые слова: упругая бесконечная пластина, стрингер, контактная задача, интегральное уравнение.

Mkhitaryan S.M., Avetisyan S.A., Mkrtchyan M.S.

On the exact solution of one class of problems of contact interaction between stringers and elastic infinite plate

Keywords: elastic infinite plate, stringer, contact problem, integral equation

In modified formulation, when the elastic horizontal displacements of the stringers points are given previously, problems of the contact interaction between two identical stringers of finite or semi-infinite lengths, as well a periodic system of stringers, symmetrically located relative to each other, and an elastic infinite plate, are considered. In order to minimize bending effects, it is considered that the stringers are reinforced on both front surfaces of the elastic plate symmetrically relative to its median plane. Within the framework of Melan model for stringers and the generalized plane stress state of the plate, the problems discussed are reduced to Fredholm integral equations of the first kind with symmetric logarithmic kernels. With the help of spectral relations for integrals with logarithmic kernels containing Chebyshev polynomials, exact solutions of these equations are constructed. Then the tangential contact stresses under the stringers and other force factors that must be applied to the stringers are determined to ensure a predetermined mode of the displacements of their points. For two problems their numerical analysis is carried out.

Մխիթարյան Ս.Մ., Ավետիսյան Ս.Ա., Մկրտչյան Մ.Ս.

Առաձգական անվերջ սալի և ստրինգերների միջև կոնտակտային փոխազդեցության խնդրների մի դասի ճշգրիտ լուծման մասին

Հիմնաբառեր. առաձգական անվերջ սալ, ստրինգեր, կոնտակտային խնդիր, ինտեգրալ հավասարում:

Մոդիֆիկացված դրվածքով, երբ նախապես տրվում է ստրինգերների կետերի հորիզոնական տեղափոխությունների ռեժիմը, դիտարկվում են միմյանց նկատմամբ համաչափ դասավորված երկու միատեսակ վերջավոր կամ կիսաանվերջ երկարության ստրինգերների, ինչպես նաև ստրինգերների պարբերական համակարգի և առաձգական անվերջ սալի միջև կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրներ: Որպեսզի ծուման էֆեկտները հանգեցվեն նվազագույնի, ենթադրվում է, որ առաձգական սալի երկու դիմալի մակերևույթների վրա համաչափ սալի միջին հարթության նկատմամբ, ստրինգերներ են ամրակցված: Ստրինգերների համար Մելանի մոդելի և սալի ընդհանրացված հարթ լարվածային վիճակի շրջանակներում քննարկվող խնդիրները բերվում են սիմետրիկ լոգարիթմական կորիզներով Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումների: Լոգարիթմական կորիզներով ինտեգրալների համար սպեկտրալ առնչությունների օգնությամբ, որոնք պարունակում են Չեբիշևի բազմանդամներ, կառուցվում են այդ հավասարումների ճշգրիտ լուծումները: Այնուհետև որոշվում են ստրինգերների տակ գործող կոնտակտային լարումները, ստրինգերներին կիրառված այն ուժային գործոնները, որոնք ապահովվում են ստրինգերների նախապես տրված տեղափոխությունների ռեժիմը: Կատարված է երկու խնդիրների թվային վերլուծություն:

В модифицированной постановке, когда наперед задаются упругие горизонтальные перемещения точек стрингеров, рассматриваются задачи о контактном взаимодействии симметрично расположенных

друг относительно друга двух одинаковых стрингеров конечных или полубесконечных длин, а также периодической системы стрингеров с упругой бесконечной пластиной. Чтобы изгибные эффекты свести к минимуму, считается, что стрингеры подкреплены на обеих лицевых поверхностях упругой пластины, симметрично относительно ее срединной плоскости. В рамках модели Мелана для стрингеров и обобщенного плоского напряженного состояния пластины обсуждаемые задачи сведены к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода с симметрическими логарифмическими ядрами. При помощи спектральных соотношений для интегралов с логарифмическими ядрами, содержащих многочлены Чебышева, построены точные решения этих уравнений. Затем определены касательные контактные напряжения под стрингерами и те силовые факторы, которые должны быть приложены к стрингерам, чтобы обеспечить заранее заданный режим перемещений их точек. Для двух задач проведен численный анализ.

Введение. Контактные задачи о взаимодействии стрингеров с массивными деформируемыми телами имеют теоретическое и практическое значение. В теоретическом аспекте эти задачи с идейной и методологической точки зрения тесно связаны с классическими контактными задачами теории упругости, представляют их обобщение и развитие. В практическом аспекте такие задачи непосредственно связаны с важными в инженерной практике вопросами о передаче нагрузок от тонкостенных элементов к массивным телам различных геометрических форм и с необходимостью исследования концентрации напряжений вокруг этих элементов, разработки методов снижения уровня концентрации. Результаты исследований в указанном направлении востребованы в механике композитов. Они позволяют повысить прочностные характеристики инженерных конструкций, усиленных или армированных тонкостенными элементами.

Контактные задачи о взаимодействии стрингеров с массивными упругими телами берут свое начало от известной работы Мелана [1], где рассмотрены две задачи о передаче горизонтальной сосредоточенной силы от бесконечного стержня-стрингера к упругой полубесконечной или бесконечной пластине. Здесь же предложена модель одномерного упругого континуума или одноосного напряженного состояния стрингера. Впоследствии существенное продвижение в этой области достигнуто в работах Койтера [2], где рассмотрена задача о контакте полубесконечного стрингера с полубесконечной упругой пластиной, Муки и Стернберга [3,4], где пересмотрена постановка задач Мелана и исследована задача о передаче нагрузки от растягивающего поперечного стержня-стрингера к упругой полубесконечной пластине, Буфлера [5], где исходя из двумерных уравнений теории упругости обоснована модель Мелана для стрингера. Основные результаты по исследованию задач контактного взаимодействия между стрингерами и массивными упругими телами, полученные до 1976 г., а также обзор методов решения таких задач подытожены в коллективной монографии [6]. В этом направлении укажем также на монографии [7–10].

В перечисленных и в других аналогичных по тематике работах обычно обсуждается такая постановка задач, когда в рамках модели Мелана требуется определить касательные контактные напряжения под стрингерами и осевых напряжений в сечениях по наперед заданным внешним силам, действующим на стрингеры. Но при исследовании вопросов жесткости системы стрингер-упругое основание, исходя из практической необходимости обеспечения конструктивно допускаемых величин для осевых перемещений точек стрингеров представляет также теоретический и практический интерес и такая постановка задач, когда заранее задается режим осевых упругих перемещений точек стрингеров и требуется определить, по дифференциальному уравнению их деформирования, действующие на

стрингеры соответствующие силовые факторы, генерирующие наперед заданный режим перемещений точек стрингеров.

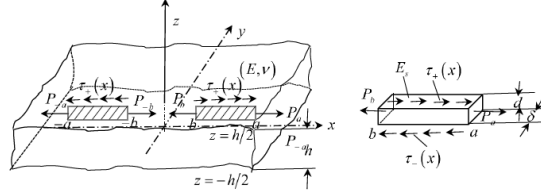
В такой модифицированной постановке, продолжая начатые в [11–13] исследования, в настоящей работе рассматривается один класс задач о контактном взаимодействии двух одинаковых стрингеров конечных или полубесконечных длин, а также периодической системы стрингеров, симметрично расположенных друг относительно друга, с упругой бесконечной пластиной. Считается, что стрингеры также симметрично, относительно срединной плоскости пластины, расположены на ее обеих лицевых поверхностях. В рамках модели Мелана [1] и обобщенного плоского напряженного состояния пластины выведены определяющие интегральные уравнения (ОИУ) и другие уравнения. Эти ОИУ представляют собой ИУ Фредгольма первого рода с симметрическими логарифмическими ядрами. При помощи спектральных соотношений для логарифмического ядра, содержащих многочлены Чебышева с аргументом в виде неполного эллиптического интеграла первого рода и с обычным аргументом построены точные решения ОИУ. Эти соотношения методами теории логарифмического потенциала в сочетании с методами конформных отображений установлены в [14].

В результате, определены касательные контактные напряжения под стрингерами и другие силовые факторы, которые должны быть приложены к стрингерам, чтобы обеспечить заранее заданный режим перемещений их точек. Для двух обсуждаемых задач проведен численный анализ.

Научная новизна статьи заключается в следующем:

- а) рассматриваются задачи контактного взаимодействия между стрингерами и упругой бесконечной пластиной, которые, вообще, мало исследованы;
- б) эти задачи рассматриваются в новой модифицированной постановке, когда наперед задаются горизонтальные перемещения точек стрингеров, а затем определяются необходимые силовые факторы, приложенные к стрингерам и обеспечивающие заданный режим перемещений;
- с) в предложенной модифицированной постановке контактные задачи о взаимодействии стрингеров с массивными упругими телами представляют обобщение и развитие классических контактных задач теории упругости;
- д) обсуждаемые в статье контактные задачи допускают точные (замкнутые) решения.

1. Постановка задач и вывод основных уравнений. Пусть упругая бесконечная пластина толщины h в правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ занимает область $\Pi = \{-\infty < x, y < \infty; -h/2 < z < h/2\}$ и обладает модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Пусть, далее, на своей верхней $z = h/2$ и нижней $z = -h/2$ лицевых поверхностях, симметрично относительно срединной плоскости $z = 0$, вдоль оси Ox по совокупности симметрично расположенных относительно начала координат O отрезков $L = [-a, -b] \cup [b, a]$, усилена двумя одинаковыми стрингерами модуля Юнга E_s , высоты d и ширины δ ($d, \delta \ll b - a$) (фиг.1).



Фиг. 1

Будем считать, что стрингеры по своим верхним граням вдоль их срединных линий в направлении оси Ox нагружены касательными силами интенсивности $\tau_+(x)$, причем $\tau_+(-x) = -\tau_+(x)$ ($x \in L$). На своих же концевых сечениях $x = \pm a, x = \pm b$ стрингеры также симметрически нагружены горизонтальными сосредоточенными силами $P_{\pm a}, P_{\pm b}$ ($\bar{P}_{-a} = -\bar{P}_a, \bar{P}_{-b} = -\bar{P}_b$). Кроме того, наперед зададимся горизонтальными по оси Ox перемещениями точек стрингеров $u_s(x)$ в виде функции $f(x)$, т.е. положим

$$u_s(x) = f(x); f(-x) = -f(x) \quad (x \in L); \quad f(x) \in C^2(L);$$

где $C^2(L)$ – функциональное пространство дважды непрерывно дифференцируемых на L функций.

При указанном выше нагружении упругой бесконечной тонкой пластины ($h \ll b - a$) изгибные эффекты можно свести к минимуму и, поэтому, можем считать, что пластина находится в обобщенном плоском напряженном состоянии. В рамках этого предположения относительно пластины и модели Мелана для стрингеров, как одномерных упругих континуумов, требуется определить касательные контактные напряжения под стрингерами $\tau_-(x)$, причем

$$\tau_-(-x) = -\tau_-(x) \quad (x \in L),$$

а также действующие на стрингеры необходимые силовые факторы $P_{\pm a}, P_{\pm b}, \tau_+(x)$, которые обеспечивают заранее заданный режим упругих перемещений точек стрингеров в виде дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$. Нужно определить также жесткие перемещения стрингеров.

Приступив к выводу ОИУ и других основных уравнений поставленной задачи, предварительно запишем выражения перемещений точек упругой бесконечной пластины от приложенной в ее точке $M_0(x_0, y_0)$ горизонтальной сосредоточенной силы величины X , отнесенной к единице высоты пластины. С этой целью воспользуемся комплексными потенциалами $\phi(z)$ и $\psi(z)$ для этой сосредоточенной силы X [15] (стр.198, ф-лы (3)):

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{X}{2\pi(1+\chi)} \ln(z-z_0); & \psi(z) &= \frac{\chi X}{2\pi(1+\chi)} \ln(z-z_0) + \\ &+ \frac{\bar{z}_0 X}{2\pi(1+\chi)} \frac{1}{z-z_0}; & z &= x+iy; \quad z_0 = x_0+iy_0; \quad \chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}.\end{aligned}\quad (2.1)$$

При этом комплексная комбинация перемещений будет определяться по формуле (там же, стр.11, ф-ла (1))

$$2\mu(u+iv) = \chi\varphi(z) - z\varphi'(z) - \psi(z); \quad \mu = E/2(1+\nu); \quad (2.2)$$

где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ –компоненты упругих перемещений точек пластины соответственно по осям Ox и Oy . Теперь, приняв во внимание, что согласно описанному выше способу нагружения пластины, следует заменить X на $2X$, после простых преобразований из (2.1) и (2.2) находим

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \vartheta_0 X \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} + \vartheta_1 X \frac{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}; \\ v(x, y) &= \vartheta_1 X \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}; \quad \vartheta_0 = \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{2\pi E}; \quad \vartheta_1 = \frac{(1+\nu)^2}{2\pi E} \\ &(-\infty < x, y < \infty)\end{aligned}$$

Отсюда, когда горизонтальная сосредоточенная сила X приложена в точке $M_0(x_0, 0)$ оси абсцисс, для компонент упругих перемещений точек этой же оси получим

$$u(x, 0) = \vartheta_0 X \ln \frac{1}{|x-x_0|} + C; \quad v(x, 0) = 0; \quad C = \vartheta_1 X \quad (-\infty < x < \infty).$$

Далее, по принципу линейной суперпозиции в сочетании с моделью контакта по линии [4], для горизонтальных упругих перемещений точек пластины $u(x, 0)$, расположенных на оси Ox , от распределенных касательных напряжений $\tau_-(x)$ ($x \in L$) будем иметь

$$u(x, 0) = \vartheta_0 \frac{\delta}{h} \left(\int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) \ln \frac{1}{|x-s|} \tau_-(s) ds \quad (-\infty < x < \infty)$$

Так как $\tau_-(-x) = -\tau_-(x)$ ($x \in L$), то окончательно получим

$$u(x, 0) = \vartheta_0 \frac{\delta}{h} \int_b^a \ln \frac{x+s}{|x-s|} \tau_-(s) ds \quad (0 < x < \infty). \quad (2.3)$$

Обратимся теперь к стрингерам, ограничиваясь, ввиду симметрии, только правым стрингером по отрезку $[b, a]$. По модели Мелана [1,10] дифференциальное уравнение его деформирования имеет вид

$$dE_s \frac{d^2 u_s}{dx^2} = \frac{\delta}{h} [\tau_-(x) - \tau_+(x)] \quad (b \leq x \leq a), \quad (2.4)$$

где $u_s = u_s(x)$ – упругие перемещения точек стрингера по оси Ox . Далее введем в рассмотрение осевые усилия $S = S(x)$ в сечении стрингера x и будем считать, что из-за существенной малости высоты стрингера d относительно его длины $b - a$ осевые напряжения $\sigma_x = \sigma_x(x)$ по высоте стрингера распределены равномерно.

Тогда

$$S(x) = d\delta\sigma_x(x) \quad (b \leq x \leq a)$$

и, приняв во внимание закон Гука для стрингера, будем иметь

$$\sigma_x = E_s \varepsilon_s = E_s \frac{du_s}{dx} \quad (b \leq x \leq a).$$

Следовательно, для определения $S(x)$ из (2.4) получим следующую простейшую граничную задачу:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dx} = \frac{\delta^2}{h} [\tau_-(x) - \tau_+(x)] \quad (b < x < a), \\ S(x)|_{x=b} = P_b, \quad S(x)|_{x=a} = P_a. \end{cases} \quad (2.5)$$

Отсюда находим

$$S(x) = \frac{\delta^2}{h} \int_b^x [\tau_-(s) - \tau_+(s)] ds + P_b \quad (b \leq x \leq a).$$

Полагая здесь $x = a$, при помощи второго граничного условия из (2.5) придем к условию равновесия правого стрингера

$$\frac{\delta^2}{h} \int_b^a [\tau_-(s) - \tau_+(s)] ds = P_a - P_b. \quad (2.6)$$

Далее, при помощи (2.3), реализуем условие контакта

$$u_s(x) = u(x, 0) = f(x) \quad (b \leq x \leq a),$$

между стрингерами и упругой пластиной. В результате для определения неизвестных касательных контактных напряжений под стрингерами $\tau_-(x)$ получим следующее ОИУ Фредгольма первого рода:

$$\vartheta_0 \frac{\delta}{h} \int_b^a \ln \frac{x+s}{|x-s|} \tau_-(s) ds = f(x) \quad (b < x < a). \quad (2.7)$$

Для полноты постановки задачи необходимо еще задать равнодействующую P касательных контактных напряжений $\tau_-(x)$:

$$\frac{\delta^2}{h} \int_b^a \tau_-(s) ds = P. \quad (2.8)$$

После решения ОИУ (2.7) при условии (2.8) можно определить действующие на стрингеры необходимые силовые факторы $\tau_+(x)$, P_a и P_b . А именно, из (2.4) сразу находим

$$\tau_+(x) = \tau_-(x) - dhE_s f''(x)/\delta \quad (b < x < a). \quad (2.9)$$

Кроме того, будем иметь

$$S(x) = d\delta\sigma_x = \delta dE_s f'(x) \quad (b \leq x \leq a), \quad (2.10)$$

а также

$$\sigma_x(x) = E_s f'(x), \quad P_a = \delta dE_s f'(a), \quad P_b = \delta dE_s f'(b). \quad (2.11)$$

Равнодействующая же T_+ касательных сил $\tau_+(x)$, при помощи (2.6) и (2.8), определится по формуле

$$T_+ = \frac{\delta^2}{h} \int_b^a \tau_+(s) ds = P - P_a + P_b.$$

Таким образом, после решения ОИУ (2.7) – (2.8) основные силовые факторы, действующие на стрингеры, определяются по формулам (2.9) – (2.11).

Теперь в выведенных уравнениях перейдем к безразмерным величинам, полагая

$$\xi = x/a, \quad \eta = s/a; \quad k = b/a; \quad \varphi_{\pm}(\xi) = \vartheta_0 \delta \tau_{\pm}(a\xi)/h;$$

$$g(\xi) = f(a\xi)/a; \quad S_0(\xi) = S(a\xi)/d\delta E_s; \quad \sigma_x^{(s)}(\xi) = \sigma_x(a\xi)/E_s;$$

$$P_a^{(0)} = P_a/d\delta E_s; \quad P_b^{(0)} = P_b/\delta dE_s, \quad k \leq \xi, \eta \leq 1.$$

В результате, ОИУ (2.7) преобразуется к виду

$$\int_k^1 \ln \frac{\xi + \eta}{|\xi - \eta|} \varphi_-(\eta) d\eta = g(\xi) \quad (k < \xi < 1), \quad (2.12)$$

а формулы (2.9) – (2.11) – соответственно, к видам

$$\varphi_+(\xi) = \varphi_-(\xi) - \lambda g''(\xi); \quad \lambda = \delta d \vartheta_0 E_s / ah; \quad g''(\xi) = f''(x)|_{x=a\xi};$$

$$S_0(\xi) = g'(\xi); \quad \sigma_x^{(0)}(\xi) = g'(\xi); \quad g'(\xi) = f'(x)|_{x=a\xi}; \quad (2.13)$$

$$P_a^{(0)} = g'(1); \quad P_b^{(0)} = g'(k).$$

Условие же (2.8) перейдет в следующее условие:

$$\int_k^1 \varphi_-(\eta) d\eta = P_0 \quad (P_0 = \vartheta_0 P / a\delta). \quad (2.14)$$

Далее, в изложенной выше постановке, рассмотрим также контактную задачу о взаимодействии двух одинаковых полубесконечных стрингеров с упругой пластиной. Пусть теперь упругая бесконечная пластина Π на своей верхней и нижней лицевых поверхностях вдоль оси Ox , симметрично относительно своей срединной плоскости $z = 0$, по совокупности отрезков $L = (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ усилена двумя одинаковыми и симметрически расположенными полубесконечными стрингерами. Как и выше, будем считать, что стрингеры на своих верхних гранях вдоль их срединных линий симметрично нагружены касательными силами интенсивности $\tau_+(x)$, причем $\tau_+(-x) = -\tau_+(x)$ ($x \in L$), а на своих концевых сечениях $x = \pm a$ нагружены горизонтальными сосредоточенными силами $P_{\pm a}$ ($\bar{P}_{-a} = -\bar{P}_a$) также симметрично нагружены. Кроме того будем считать, что наперед задан режим упругих перемещений точек стрингеров в виде функции $f(x) \in C^2(L)$, т.е.

$$u_s(x) = f(x) \quad (x \in L), \quad f(-x) = -f(x), \quad f(x) = O(1) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty.$$

При прежних предположениях относительно пластины и стрингеров требуется определить касательные контактные напряжения под стрингерами $\tau_-(x)$ ($\tau_-(-x) = -\tau_-(x)$ $x \in L$), а также силовые факторы $P_a, \sigma_x(x)$ и $\tau_+(x)$, которые должны обеспечить наперед заданный режим упругих горизонтальных перемещений точек стрингеров в виде функции $f(x)$.

Приступив к выводу основных уравнений сформулированной задачи, согласно (2.3) для упругих горизонтальных перемещений точек пластины, расположенных на оси Ox , будем иметь

$$u(x) = \vartheta_0 \frac{\delta}{h} \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right) \ln \frac{1}{|x-s|} \tau_-(s) ds = \vartheta_0 \frac{\delta}{h} \int_a^{\infty} \ln \frac{x+s}{|x-s|} \tau_-(s) ds \quad (2.15)$$

$$(0 < x < \infty).$$

Далее, реализуя условие контакта

$$u_s(x) = u(x) = f(x) \quad (a \leq x < \infty),$$

при помощи (2.15) придем к следующему ОИУ рассмотренной задачи:

$$\vartheta_0 \frac{\delta}{h} \int_a^{\infty} \ln \frac{x+s}{|x-s|} \tau_-(s) ds = f(x) \quad (a < x < \infty). \quad (2.16)$$

Обращаясь к стрингерам, отметим, что в данном случае во введенных выше величинах и обозначениях формулы (2.4), (2.9) и (2.10) будут иметь место на интервале (a, ∞) , а граничная задача (2.5) заменится следующей граничной задачей:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\delta^2}{h} [\tau_-(x) - \tau_+(x)] & (a < x < \infty) \\ S(x)|_{x=a} = P_a; \lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Здесь принято во внимание, что на бесконечности осевые напряжения $\sigma_x(x)$ и, следовательно, осевые усилия $S(x)$ в сечениях правого полубесконечного стрингера исчезают. Решение граничной задачи (2.17) при первом граничном условии запишется в виде

$$S(x) = \frac{\delta^2}{h} \int_a^x [\tau_-(s) - \tau_+(s)] ds + P_a \quad (a \leq x < \infty),$$

Откуда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \frac{\delta^2}{h} \left[\int_a^\infty \tau_-(s) ds - \int_a^\infty \tau_+(s) ds \right] + P_a = 0.$$

Из этого равенства определим равнодействующую T_+ касательных сил $\tau_+(x)$:

$$T_+ = \frac{\delta^2}{h} \int_a^\infty \tau_+(s) ds = P_a + P; \quad P = \frac{\delta^2}{h} \int_a^\infty \tau_-(s) ds. \quad (2.18)$$

Этот же результат сразу можно получить из (2.9), когда $a < x < \infty$, проинтегрируя обе его части от a до ∞ . Формулы же (2.10) и (2.11) в случае обсуждаемой задачи примут вид

$$\begin{aligned} S(x) &= \delta dE_s f'(x); \quad \sigma_x(x) = E_s f'(x); \quad P_a = \delta dE_s f'(a) \\ \tau_+(x) &= \tau_-(x) - h dE_s f'(x) / \delta \quad (a \leq x < \infty). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Теперь в (2.16), (2.18) и (2.19) перейдем к безразмерным величинам, полагая

$$\begin{aligned} \xi &= a/x, \quad \eta = a/s, \quad 0 \leq \xi, \eta < 1; \quad \psi_\pm(\xi) = \frac{\vartheta_0 \delta}{h} \tau_\pm(a/\xi) / \xi^2; \\ h(\xi) &= f(a/\xi) / a; \quad \sigma_x^{(0)}(\xi) = \sigma_x(a/\xi) / E_s; \quad S_0(\xi) = S(a/\xi) / \delta dE_s; \\ T_+^{(0)} &= \vartheta_0 T_+ / \delta a; \quad P_0 = \vartheta_0 P / \delta a; \quad P_a^{(0)} = \vartheta_0 P_a / \delta a; \quad \lambda_0 = \vartheta_0 dE_s / a. \end{aligned}$$

В результате, ОИУ (2.16) примет вид

$$\int_0^1 \ln \frac{\xi + \eta}{|\xi - \eta|} \psi_-(\eta) d\eta = h(\xi) \quad (0 < \xi < 1), \quad (2.20)$$

а (2.18) и (2.19) – соответственно, вид

$$T_a^{(0)} = P_a^{(0)} + P_0; \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(0)}(\xi) &= S_0(\xi) = f'(x)\Big|_{x=a/\xi} = -\xi^2 h'(\xi); P_a^{(0)} = \lambda_0 f'(a) = -\lambda_0 h'(1); \\ \psi_+(\xi) &= \psi_-(\xi) - \lambda_0 \left[\xi^4 h''(\xi) + 2\xi^3 h'(\xi) \right] = \psi_+(\xi) - \lambda_0 a f''(x)\Big|_{x=a/\xi}.\end{aligned}\quad (2.22)$$

Таким образом основными уравнениями рассматриваемой задачи будут ОИУ (2.20), (2.21) – (2.22).

Перейдем к периодической контактной задаче о взаимодействии двух одинаковых и относительно начала координат симметрически расположенных стрингеров с упругой бесконечной пластиной, когда пластина на своей верхней и нижней лицевых поверхностях вдоль оси Ox также симметрично относительно своей срединной плоскости усилена периодической системой стрингеров. Будем считать, что при тех же предположениях, что и выше, часть фигуры 1, содержащая два одинаковых стрингера на совокупности отрезков $L = [-a, -b] \cup [b, a]$ оси Ox , периодически с периодом $2l$ ($a < l$) повторяется в правом и левом направлениях.

Приступив к выводу ОИУ только что описанной задачи, сначала при помощи формулы (2.3) определим упругие перемещения точек пластины в направлении оси Ox , расположенных на этой же оси, от периодической с периодом $2l$ системы касательных и кососимметрически распределенных сосредоточенных сил единичных величин:

$$\tau_-(x) = \text{sign } x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2nl) \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $\delta(x)$ – известная дельта-функция Дирака, а функция $\text{sign } x$ ($x \in L$), определенная на совокупности отрезков L , периодически, с периодом $2l$, продолжена на всю числовую ось.

Поступив совершенно аналогично сделанному в [16], после выделения расходящейся части ряда в виде суммы постоянных, подобных постоянным в решении задачи Фламана в перемещениях, для этих перемещений в случае распределенных касательных кососимметрических сил интенсивности $\tau_-(x)$, причем

$$\tau_-(x) = -\tau_-(x) \quad (x \in L); \quad \tau_-(x + 2l) = \tau_-(x);$$

получим

$$\begin{aligned}u(x) &= \vartheta_0 \frac{\delta}{h} \left(\int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\pi(x-s)}{2l} \right|} \tau_-(s) ds = \\ &= \vartheta_0 \frac{\delta}{h} \int_b^a \ln \frac{\sin \left(\frac{\pi(x+s)}{2l} \right)}{\left| \sin \left(\frac{\pi(x-s)}{2l} \right) \right|} \tau_-(s) ds \quad (0 < x < \infty).\end{aligned}\quad (2.23)$$

Далее, опять зададимся горизонтальными упругими перемещениями $u_s(x)$ в виде функции $f(x)$, причем $f(-x) = -f(x)$ ($x \in L$). И запишем условие контакта

$$u_s(x) = u(x) = f(x) \quad (x \in L), \quad (2.24)$$

где $f(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая периодическая с периодом $2l$ функция. Теперь, после реализации условия контакта (2.24) при помощи (2.23), ограничиваясь только стрингером по отрезку $[b, a]$, относительно $\tau_-(x)$ придем к следующему ОИУ:

$$\vartheta_0 \frac{\delta}{h} \int_b^a \ln \frac{\sin \left(\frac{\pi(x+s)}{2l} \right)}{\left| \sin \frac{\pi(x-s)}{2l} \right|} \tau_-(s) ds = f(x) \quad (b < x < a). \quad (2.25)$$

ОИУ (2.25) должно рассматриваться при условии

$$\frac{\delta}{h} \int_b^a \tau_-(s) ds = P, \quad (2.26)$$

где P – заданная, т.е. известная величина.

Если теперь перейти к безразмерным величинам, полагая

$$\xi = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2l}, \quad \eta = \operatorname{tg} \frac{\pi s}{2l}; \quad \varphi_-(\xi) = \frac{2\vartheta_0 \delta}{h} \frac{1}{1+\xi^2} \tau_-\left(\frac{2l}{\pi} \operatorname{arctg} \xi\right);$$

$$g(\xi) = \frac{1}{l} f\left(\frac{2l}{\pi} \operatorname{arctg} \xi\right); \quad c = \operatorname{tg} \frac{\pi b}{2l}; \quad d = \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2l}; \quad c \leq \xi, \eta \leq d;$$

то ОИУ (2.25) примет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_c^d \ln \frac{\xi + \eta}{|\xi - \eta|} \varphi_-(\eta) d\eta = g(\xi) \quad (c < \xi < d), \quad (2.27)$$

а условие (2.26) – вид

$$\int_c^d \varphi_-(\eta) d\eta = P_0^- \left(P_0^- = \frac{\pi \vartheta_0 P}{\delta l} \right). \quad (2.28)$$

Очевидно, что заменой переменных ξ на $d\xi$, η на $d\eta$ ОИУ (2.27) можно свести к ОИУ (2.12), где $k = c/d$.

Итак, решение данной периодической контактной задачи сводится к решению ОИУ (2.27) – (2.28).

В рассматриваемой задаче действующие на стрингеры силовые факторы, обеспечивающие наперед заданные упругие перемещения в виде функции $f(x)$,

определяются формулами (2.7) – (2.11). При этом входящие в них функции считаются периодически продолженными вне L с периодом $2l$.

3.Решение определяющего уравнения. Так как все рассмотренные выше задачи фактически описываются единым ИУ Фредгольма первого рода с симметрическим логарифмическим ядром, то здесь построим лишь решение ОИУ (2.12). Это решение, как в [17,18], построим методом спектральных интегральных соотношений, содержащих ортогональные многочлены Чебышева.

В данном случае имеются ввиду следующие соотношения [14]:

$$\int_b^a \ln \frac{x+s}{|x-s|} \frac{T_n(Y) ds}{\sqrt{(a^2-s^2)(s^2-b^2)}} = \lambda_n T_n(X);$$

$$X = \cos \vartheta, \quad \vartheta = \frac{\pi}{K'} \int_1^{x/b} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}; \quad (k = b/a);$$

$$Y = \cos \varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{K'} \int_1^{s/b} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}; \quad (0 \leq \vartheta, \varphi < \pi);$$

$$\lambda_0 = \pi K/a; \quad \lambda_n = (an)^{-1} K' \operatorname{th}(\pi n K/K') (n=1,2,\dots),$$

где $T_n(X)$ – многочлены Чебышева первого рода аргумента X , $K = K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода модуля k , а $K' = K(k')$

($k' = \sqrt{1-k^2}$). Отметим, что ϑ и φ можно выразить через неполный эллиптический интеграл первого рода. Действительно, в выражении ϑ положим $x/a = \xi = \cos \vartheta$ и от переменной интегрирования u перейдем к переменной $t = 1/u$. В результате, после простых преобразований, воспользовавшись известным интегралом из [19] (стр.260, ф-ла 3.152.10), будем иметь

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{\pi}{K'} \int_1^{\xi/k} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}} = \frac{\pi}{K'} \int_{k/\xi}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k^2)}} = \\ &= \frac{\pi}{K'} F\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{\xi^2-k^2}}{k'\xi}\right), k'\right) = \frac{\pi}{K'} \int_{k/\xi}^{\sqrt{\xi^2-k^2}/k'\xi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k^2t^2)}}; \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $F(\lambda, q)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода [19], а $k \leq \xi \leq 1$.

Отметим еще, что из обычных условий ортогональности многочленов $T_n(x/a)$ на интервале $-a < x < a$ подстановкой $\xi = x/a = \cos \vartheta$, где ϑ выражается второй

формулой из (3.1), после элементарных преобразований получим следующие условия ортогональности многочленов $T_n(X)$:

$$\int_{-a}^a T_m(X) T_n(X) \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} = \begin{cases} K'/a & (m = n = 0); \\ K'/2a & (m = n \neq 0); \\ 0 & (m \neq n). \end{cases} \quad (3.3)$$

Теперь, приступив к решению ОИУ (2.12), его решение представим в виде бесконечного ряда

$$\Phi_-(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi^2)(\xi^2 - k^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n(X) \quad (k < \xi < 1) \quad (3.4)$$

с неизвестными пока коэффициентами X_n . Далее (3.4) подставим в левую часть ОИУ (2.12), поменяем порядок интегрирования и суммирования и воспользуемся спектральными соотношениями (3.1), где формально положим $b = k$, $a = 1$. В результате получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n X_n T_n(X) = g(\xi) \quad (k < \xi < 1).$$

Отсюда при помощи условий ортогональности многочленов $T_n(X)$, т.е. при помощи (3.3), находим

$$X_0 = g_0/\lambda_0 K', \quad X_n = 2g_n/\lambda_n K' \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$g_n = \int_k^1 \frac{g(\xi) T_n(X) d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(\xi^2 - k^2)}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.5)$$

Теперь заметим, что горизонтальные упругие перемещения точек стрингеров в виде функции $f(x)$ состоят из чисто упругих перемещений в виде функции $f_0(x)$

и из одинаковых горизонтальных жестких смещений величины Δ , так что

$$f(x) = f_0(x) + \Delta \operatorname{sign} x \quad (x \in [-a, -b] \cup [b, a]; f_0(-x) = -f_0(x)).$$

Отсюда

$$g(\xi) = g_0(\xi) + \Delta_0, \quad g_0(\xi) = f_0(a\xi)/a, \quad \Delta_0 = \Delta/a \quad (k < \xi < 1).$$

Следовательно, из (3.5)

$$g_n = g_n^{(0)} + \Delta_0 \delta_n K', \quad \delta_n = \begin{cases} 1 & (n = 0); \\ 0 & (n = 1, 2, \dots); \end{cases} \quad X_0 = (g_n^{(0)} + \Delta_0 K')/\lambda_0 K',$$

$$g_n^{(0)} = \int_k^1 \frac{g_0(\xi) T_n(X) d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(\xi^2 - k^2)}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad X_n = 2g_n^{(0)}/\lambda_n K' \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.6)$$

Далее (3.4) подставим в условие (2.14), отсюда находим $X_0 = P_0/K'$. Тогда из (3.6) получим

$$\Delta_0 = \Delta/a = \left(\lambda_0 P_0 - g_0^{(0)} \right) / K'. \quad (3.7)$$

Перейдем к решению ОИУ (2.20), представим его решение в виде бесконечного ряда

$$\psi_-(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n T_{2n-1}(\xi) \quad (0 < \xi < 1). \quad (3.8)$$

С неизвестными коэффициентами Y_n . Теперь (3.8) подставим в левую часть (2.20), опять поменяем порядок интегрирования и суммирования, а затем воспользуемся спектральными соотношениями [20]

$$\frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \ln \frac{\xi + \eta}{|\xi - \eta|} \frac{T_{2n-1}(\eta) d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{1}{2n-1} T_{2n-1}(\xi) \quad (0 < \xi < 1).$$

Далее, как и выше, при помощи условий ортогональности $T_{2n-1}(\xi)$ определим коэффициенты Y_n .

$$Y_n = \frac{4(2n-1)}{\pi^2} h_n; \quad h_n = \int_0^1 h(\xi) \frac{T_{2n-1}(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (3.9)$$

Так как функция $h(\xi)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, то полагая в интеграле из (2.6) $\xi = \cos \vartheta$ и дважды произведя интегрирование по частям, можно показать, что по крайней мере

$$Y_n = O\left(\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}\right) (\varepsilon > 0) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, ряд (3.8) равномерно сходящийся.

Теперь, исходя из (3.8), по формуле (2.18) вычислим равнодействующую P_0 безразмерных касательных контактных напряжений $\psi_-(\xi)$:

$$P_0 = \int_0^1 \psi_-(\xi) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{Y_n}{2n-1}. \quad (3.10)$$

А касательные контактные напряжения в размерных величинах будут выражаться формулой

$$\tau_-(x) = \frac{a^2 h}{9_0 \delta x} \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n T_{2n-1}\left(\frac{a}{x}\right) \quad (a < x < \infty).$$

4. Числовые результаты. Для численной реализации полученных выше аналитических формул с целью выявления закономерности изменения характерных физических величин рассматриваемых выше контактных задач, формулы для

коэффициентов $g_n^{(0)}$ из (3.6) и формулу для коэффициентов h_n из (3.9) преобразуем в формулы для коэффициентов косинус-рядов Фурье. Это позволит для вычисления коэффициентов Фурье применить весьма эффективный метод тригонометрической интерполяции в сочетании с методом наименьших квадратов [21].

С этой целью обращаясь к коэффициентам $g_n^{(0)}$, в интеграле из (3.6) положим

$$X = \cos \vartheta \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi),$$

где ϑ – выражается формулой (3.2). По этой формуле

$$d\vartheta = \frac{\pi}{K'} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)}} \quad (k < \xi < 1). \quad (4.1)$$

Далее установим функциональную зависимость между переменными ξ и ϑ , для чего, согласно (3.2), будем иметь [19], полагая $\vartheta = \sin \alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{K'}{\pi} \vartheta &= F \left(\arcsin \left(\frac{\sqrt{\xi^2 - k^2}}{k' \xi} \right), k' \right) = \int_0^{\vartheta} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \\ &= \int_0^{\sin \vartheta} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2 \tau^2)}}, \quad \varphi = \arcsin \left(\frac{\sqrt{\xi^2 - k^2}}{k' \xi} \right) \quad (k \leq \xi \leq 1). \end{aligned}$$

Отсюда, приняв во внимание определение эллиптической синус функции Якоби $\operatorname{sn}(u, k)$ [19] (стр.924), можно записать

$$u = \frac{K'}{\pi} \vartheta, \quad \sin \varphi = \operatorname{sn}(u, k') = \operatorname{sn} \left(\frac{K'}{\pi} \vartheta, k' \right) = \frac{\sqrt{\xi^2 - k^2}}{k' \xi}.$$

Следовательно,

$$\frac{\sqrt{\xi^2 - k^2}}{k' \xi} = \operatorname{sn} \left(\frac{K'}{\pi} \vartheta, k' \right),$$

откуда

$$\xi = \chi(\vartheta) = \frac{k}{\sqrt{1 - k'^2 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{K'}{\pi} \vartheta, k' \right)}} \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi). \quad (4.2)$$

В результате

$$g_n^{(0)} = \frac{K'}{\pi} \int_0^{\pi} g_0(\chi(\vartheta)) \cos(n\vartheta) d\vartheta \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.3)$$

Отметим, что для вычисления значений функции $\operatorname{sn}(u, k) (-K \leq u \leq K)$ можно воспользоваться ее известным представлением в виде синус-ряда Фурье [19] (стр.925, ф-ла 8.146.1)

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K'}{\pi}\vartheta, k'\right) = \frac{2\pi}{k'K'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-1/2}}{1-q^{2n-1}} \sin\left((2n-1)\frac{\vartheta}{2}\right) \quad q = e^{-\pi K/K'}; \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi. \quad (4.4)$$

Так как здесь

$$\frac{q^{n-1/2}}{1-q^{2n-1}} \sim q^{n-1/2} \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

то сходимость синус-ряда Фурье (4.4) можно ускорить при помощи следующего преобразования:

$$\frac{q^{n-1/2}}{1-q^{2n-1}} = q^{n-1/2} + \left(\frac{q^{n-1/2}}{1-q^{2n-1}} - q^{n-1/2} \right) = q^{n-1/2} + \frac{q^{3n-3/2}}{1-q^{2n-1}}.$$

Следовательно, (4.4) можно представить в форме

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K'}{\pi}\vartheta, k'\right) = \frac{2\pi}{k'K'} \left[\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1/2} \sin\left((2n-1)\frac{\vartheta}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{3n-3/2}}{1-q^{2n-1}} \sin\left((2n-1)\frac{\vartheta}{2}\right) \right] \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi.$$

Но сумму первого ряда можно легко найти. А именно.

$$A(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1/2} \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\vartheta\right) = \frac{1}{2i} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (qe^{i\vartheta})^{n-1/2} - \sum_{n=1}^{\infty} (qe^{-i\vartheta})^{n-1/2} \right].$$

Далее воспользовавшись формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, после элементарных преобразований находим

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K'}{\pi}\vartheta, k'\right) = \frac{2\pi}{k'K'} A(\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{3n-3/2}}{1-q^{2n-1}} \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\vartheta\right) \\ A(\vartheta) = \frac{2q(1+q)\sin(\vartheta/2)}{1+q^2-q\cos\vartheta} \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi.$$

Далее перейдем к коэффициентам h_n из (3.9) и в интеграле положим $\xi = \cos \vartheta$ ($0 \leq \vartheta \leq \pi$), будем иметь.

$$Y_n = \frac{4(2n-1)}{\pi^2} h_n, \quad h_n = \int_{\pi}^{\pi/2} h(\cos \vartheta) \cos(2n-1)\vartheta \quad (n=1, 2, \dots), \quad (4.5)$$

Численный анализ проведем для первых двух задач. В первой задаче примем $g_0(\xi) = \xi^p$ ($p=0, 1, 2, \dots$); $k=0.1; 0.2; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9$; $P_0=0.001$. (4.6)

В качестве $g(\xi)$ примем также простейшие линейные комбинации функций ξ^p , т.е. простейшие многочлены от ξ . Приняв во внимание (4.2), будем иметь

$$g_0(\xi) = g_0(\chi(\vartheta)) = \left(k / \sqrt{1-k'^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{K'}{\pi}\vartheta, k'\right)} \right)^p \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi). \quad (4.7)$$

Теперь при помощи элементарных преобразований коэффициенты $g_n^{(0)}$ из (3.6) можем представить формулой

$$g_n^{(0)} = \frac{K'}{\pi} \int_0^\pi g_0(\chi(\vartheta)) \cos(n\vartheta) d\vartheta \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (4.8)$$

как обычные косинус-коэффициенты Фурье функции (4.7). Эти коэффициенты (4.8) далее вычисляются по формуле (4-11.30) из [21] (стр.243).

Во второй задаче примем

$$h(\xi) = \xi^{2p} = (\cos \vartheta)^{2p} \quad \left(p=1,2,\dots, 0 < \xi < 1; 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} \right).$$

Тогда из (3.9)

$$h_n = h_n^{(2p)} = \int_0^1 \xi^{2p} \frac{T_{2n-1}(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \vartheta)^{2p} \cos(2n-1)\vartheta d\vartheta.$$

Далее, подставляя сюда выражение $(\cos \vartheta)^{2p}$ из [19] (стр.39, ф-ла 1.320.5), находим

$$h_n^{(2p)} = \frac{1}{2^{2p}} \left[2(2n-1) \sum_{j=0}^{p-1} \binom{2p}{j} \frac{(-1)^{n+p-j-1}}{(2n-1)^2 - 4(p-j)^2} + \binom{2p}{p} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right]. \quad (4.9)$$

$(p=1,2,\dots, n=1,2,\dots)$

В результате

$$Y_n = \frac{4(2n-1)}{\pi^2} h_n^{(2p)} \quad (p, n=1,2,\dots). \quad (4.10)$$

Теперь безразмерные касательные контактные напряжения под правым полубесконечным стрингером будут выражаться формулой (3.8), где коэффициенты Y_n даются формулами (4.10-4.9). Равнодействующая же этих напряжений вычисляется по формуле (3.10).

Вычисленные по формулам (4.7)-(4.8) числовые значения коэффициентов $g_n^{(0)}$ при $k=0.5$ и для различных p приведены в таблице 1, а при $p=1$ и для различных k - в таблице 2. В обоих случаях эти коэффициенты, как коэффициенты Фурье, при возрастании индекса n несколько колеблясь по абсолютной величине убывают.

Далее, приняв во внимание выражения коэффициентов X_n из (3.6), по формуле (3.4) рассчитаем функцию $\varphi_-(\xi)$ в двух случаях

$$I. p_1 = 1, p_2 = 4; g_0(\xi) = \xi^{p_1} - 4\xi^{p_2}$$

$$II. p_1 = 3, p_2 = 7; g_0(\xi) = \xi^{p_1} - 4\xi^{p_2}$$

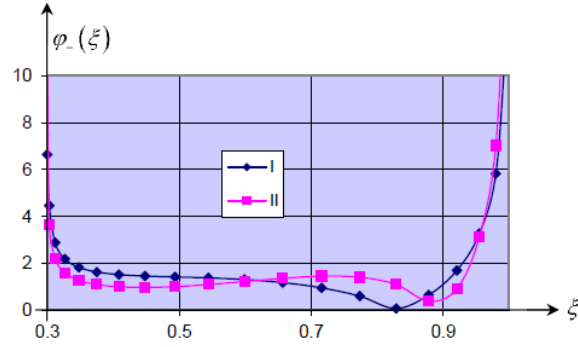
По формулам (3.6) и (3.4) вычислены значения безразмерных касательных напряжений $\varphi_-(\xi)$ под правым стрингером и на их основе построены графики изменения $\varphi_-(\xi)$ (фиг.2).

Таблица 1 Значения $g_n^{(0)}$ при $k = 0.5$ для различных p

$\begin{matrix} p \\ n \end{matrix}$	0	1	2	3	5	7	10
0	2.44134	1.82663	1.44298	1.19496	0.90989	0.75732	0.62733
1	0	-0.30815	-0.46149	-0.53292	-0.56696	-0.54997	-0.50731
2	0	0.00514	0.04462	0.09276	0.17641	0.23165	0.27485
3	0	0.00177	0.00186	-0.00348	-0.02738	-0.05845	-0.10182
4	0	0.00161	0.00060	-0.00019	0.0013	0.00815	0.02561
5	0	-0.00062	-0.00087	-0.00084	-0.00047	-0.00082	-0.00442
6	0	0.00183	0.00153	0.00137	0.00114	0.00093	0.0011
7	0	-0.00061	-0.00092	-0.00107	-0.00118	-0.00117	-0.00107
8	0	0.00183	0.001526	0.001374	0.001261	0.001232	0.001194

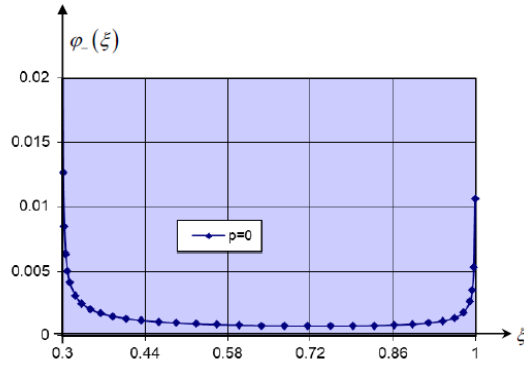
Таблица 2 Значения $g_n^{(0)}$ при $p = 1$, для различных k

$\begin{matrix} k \\ n \end{matrix}$	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9
0	1.85523	1.85179	1.84613	1.82663	1.79101	1.7177
1	-0.89353	-0.67281	-0.52113	-0.30815	-0.15813	-0.04518
2	0.190825	0.085139	0.039458	0.005147	-0.00172	0.000271
3	-0.02161	-0.00051	0.003003	0.001773	0.000247	-8.7E-05
4	-0.00156	-0.00118	0.000327	0.001614	0.001789	0.001714
5	0.000989	-0.00052	-0.00084	-0.00062	-0.00032	-9E-05
6	0.001338	0.001918	0.001923	0.001835	0.001782	0.001713
7	-0.00165	-0.00135	-0.00104	-0.00061	-0.00031	-9E-05
8	0.002218	0.002016	0.001917	0.001831	0.001782	0.001713



Фиг.2

При принятых $g_0(\xi)$, как линейных комбинаций ξ^{p_1} и ξ^{p_2} , ход изменения $\varphi_-(\xi)$ представляется более наглядно. На фиг.3 показан ход изменения $\varphi_-(\xi)$ при $p=0$ и $k=0.3$.



Фиг.3

Значения Δ_0 при $p_1=1$, $p_2=4$, $g_0(\xi)=\xi^{p_1}-4\xi^{p_2}$ и для различных k приведены в таблице 3, а значения Δ_0 при $k=0.5$ и $g_0(\xi)=\xi^{p_1}-4\xi^{p_2}$, для различных p_1 и p_2 приведены в таблице 4.

Во второй контактной задаче, связанной с полубесконечными стрингерами, также в двух случаях:

$$I. p_1=6, p_2=10; h(\xi)=\xi^{2p_1}-5\xi^{2p_2};$$

$$II. p_1=6, p_2=10; h(\xi)=\xi^{2p_1}-10\xi^{2p_2}$$

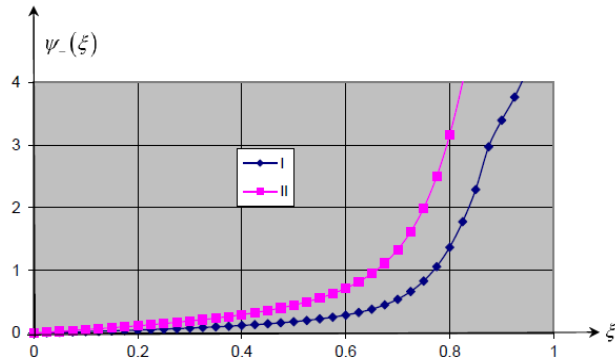
по формулам (3.8) и (4.9)-(4.10) произведены численные расчеты. По полученным числовым результатам построены графики распределения безразмерных касательных напряжений $\psi_-(\xi)$ под правым полубесконечным стрингером (фиг.4).

Таблица 3 Значения Δ_0 при $p_1 = 1, p_2 = 4, g_0(\xi) = \xi^{p_1} - 4\xi^{p_2}$, для различных k

k	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9
Δ_0	0.41603	0.51983	0.63056	0.9435	1.47697	2.37186

Таблица 4 Значения Δ_0 при $k = 0.5$, для разных p_1 и p_2 , где $g_0(\xi) = \xi^{p_1} - 4\xi^{p_2}$.

$g_0(\xi)$	$p_1 = 1, p_2 = 4$	$p_1 = 2, p_2 = 5$	$p_1 = 3, p_2 = 6$	$p_1 = 4, p_2 = 7$
Δ_0	0.943502	0.90789	0.867848	0.828199



Фиг.4

Заклучение. При помощи спектральных соотношений для интегралов с логарифмическими ядрами, содержащих многочлены Чебышева, построено замкнутое решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода с симметрическим логарифмическим ядром. Таковым является определяющее уравнение трех задач о контактном взаимодействии симметрично расположенных друг относительно друга двух одинаковых стрингеров конечных или полубесконечных длин, а также периодической системы стрингеров с упругой бесконечной пластиной, если рассматривать их в модифицированной постановке, когда наперед задаются упругие горизонтальные перемещения точек стрингеров. Получены формулы для определения касательных контактных напряжений под стрингерами и величины жесткого перемещения стрингеров, а также тех силовых факторов, которые должны быть приложены к стрингерам, чтобы обеспечить заранее заданный режим перемещений их точек.

Для двух задач проведен численный анализ, на основе которого построены таблицы для жесткого перемещения стрингеров и графики распределения контактных напряжений под ними для разных значений входных параметров задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. Ing.-Arch., 1932, Bd3, No2, S.123–129.
2. Koiter W.I.T. On the Diffusion of Load from Stiffener into a Sheet. Quart. J.Mech. and Appl. Math. 1955, v.8, No 2, pp.164–178.
3. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от краевого ребра жесткости к листу (пересмотр задачи Мелана). Прикл. мех. Труды амер.Общ.инж-мех., серия Е. 1967, т.34, №3, с.233–242.
4. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягивающего поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. Прикл. Мех. Труды амер. Общ. Инж-мех., серия Е, 1968, т. 35, №4, с.124–135.
5. Buefler H. Zur Krafteileitung in Scheiben über geschweißte oder geklebte Verbindungen. Östr. Ing.-Arch., 1964, No 3–4, S.284–292.
6. Развитие теории контактных задач в СССР. Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976, 493 с.
7. Nakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies. Springer, 2023, 380p. DOI/10.1007/978-3-031-16023-3.
8. Механика контактных взаимодействий. Под редакцией И.И. Воровича и В.М.Александрова. М.: Физматлит, 2001, 670 с.
9. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983, 296с.
10. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983, 488 с.
11. Mkhitarian S.M., Kanetsyan E.G., Mkrtchyan M.S. On two Problems of Contact Interaction of Stringers with an Elastic Half-Plane. Construction Technologies and architecture. ISSN 2674-1237, v. 2, pp. 19-30.
12. Григорян М.С., Мхитарян С.М. О точном решении одного класса задач о контактном взаимодействии стрингеров с упругими телами. Известия НАН РА, Механика, 2022, т.75, No 1-2, с.48-66.
13. Аветисян С.А. О взаимодействии коллинеарной системы стрингеров с упругой неоднородной по экспоненциальному закону полосой. Доклады НАН РА, 2022, т. 122, №2 с.141-152.
14. Мхитарян С.М. О собственных функциях интегрального оператора, порожденного логарифмическим ядром на двух интервалах, и их приложении к контактным задачам. Известия АН Армянской ССР. Механика, 1982, т.35, №6, с.3–18.
15. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707 с.
16. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949, 270с.
17. Mkhitarian S.M., Mkrtchyan M.S., Kanetsyan E.G. On a method for solving Prandtl's integrodifferential equation applied to problems of continuum mechanics using polynomial approximations. Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM), 2017, vol.97, Issue 6, pp.639–654.
18. Mkhitarian S.M., Mkrtchyan M.S., Kanetsyan E.G. Hypersingular Integral Equation Arising in the Boundary Value Problems of the Elasticity Theory. The Quart. J. of

Mechanics and Appl. Math. Febr. 2020, vol.73, Issue 1, pp. 51–73, <https://doi.org/10.1093/qimem/hbz022>.

19. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971, 1108 с.
20. Попов Г.Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактнм задачам. Прикл. Мат. и Мех. 1963, т.27, вып.5, с.821–832.
21. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961, 524 с.

Сведения об авторах:

Мхитарян Сурен Манукович, член-корр. НАН РА, профессор, главный научный сотрудник ин-та Механики НАН Армении., E-mail: smkhitaryan39@rambler.ru.

Аветисян Сирануш Араратовна, младший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, E-mail: siranushav@gmail.com.

Мкртчян Мушег Сережаевич, – к.ф.м.н., вед. науч.сотр. Института механики НАН РА, Тел.: +374 98 801956, E-mail: muscheg-mkrтчhyan@rambler.ru

Поступила в редакцию 04.07.2024