ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №4, 2024 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.4-27

СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР УДЛИНЕННОЙ ПАНЕЛИ С ОДНИМ СВОБОДНЫМ КРАЕМ, ПЕРВОНАЧАЛЬНО НАГРУЖЕННОЙ ПО ДВУМ НАПРАВЛЕНИЯМ: РАСТЯНУТОЙ ПО ПОТОКУ ГАЗА И СЖАТОЙ В ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Мартиросян С. Р.

Ключевые слова: удлинённая прямоугольная пластинка, комбинированное нагружение, аэроупругая устойчивость, сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота, аналитический метод решения

Martirosyan S.R.

Supersonic flutter of an elongated panel with a free edge, initially loaded in two directions: stretched compressed along the gas flow and compressed in the perpendicular direction

Key words: rectangular elongated plate, combined loading, aeroelastic stability, concentrated inertial masses and moments, analytical solution method

By analyzing, as an example, a thin elastic elongated plate, initially loaded in two directions: stretched along supersonic the gas flow and compressed in the perpendicular direction, we study the influence of the initial stress state of the plate on the stability of the unperturbed equilibrium state of the dynamical system "plate – flow" under the assumption of presence of concentrated inertial masses and moments on its free edge. An analytical solution of the problem of stability is obtained. An accurate assessment of the influence of initial efforts on the system's stability threshold is given in order to manage it.

Ս.Ռ.Մարտիրոսյան

Գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ նախապես ձգված և միաժամանակ ուղղահայաց ուղղությամբ սեղմված, մեկ ազատ եզրով երկարաձիգ ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին

Հիմնաբառեր՝ երկարաձիգ ուղղանկյուն սալ, նախապես սեղմող և ձգող ուժեր, առաձգական կայունություն, իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, անալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է գերձայնային գազի հոսքում շրջհոսման ուղղությամբ նախապես ձգված և միաժամանակ ուղղահայաց ուղղությամբ սեղմված մեկ ազատ եզրով առաձգական երկարաձիգ ուղղանկյուն սալի նախնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը «սալ–հոսք» դինամիկ համակարգի ոչ խոտորված հավասարակշռության վիճակի կայունության վրա: Ենթադրվում է, որ սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: Գնահատված է նախնական ուժերի ազդեցությունը «սալ–հոսք» համակարգի կայունության շեմի վրա, այն ղեկավարելու նպատակով:

В статье, в линейной постановке, исследуется динамическая устойчивость тонкой упругой удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным краем при комбинированном нагружении. Предполагается, что обтекаемая сверхзвуковым потоком газа пластинка первоначально нагружена по двум направлениям: растягивающими силами по потоку и сжимающими силами в перпендикулярном направлении; поток набегает на свободный край пластинки, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота. Получено аналитическое решение задачи устойчивости. Дана точная оценка влиянию первоначальных усилий на порог устойчивости системы, с целью управления им.

Введение. Рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение [1 – 5].

В предлагаемой статье исследуется влияние первоначального напряжённого состояния достаточно удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями на устойчивость невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» при следующих предположениях. Прямоугольная пластинка первоначально нагружена по двум направлениям: растягивающими силами по потоку газа и сжимающими силами в перпендикулярном направлении; сверхзвуковой поток газа набегает на её свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты.

Получено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка-поток» с помощью алгоритма, подробно изложенного в [12].

Показано, что невозмущённое состояние равновесия системы «пластинка–поток» теряет устойчивость в виде дивергенции панели как эйлеровой, так и не эйлеровой, и в виде панельного флаттера. Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Определены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости [11].

Определена относительная толщина пластинки, обеспечивающая её прочность по критерию устойчивости колебаний.

Дана точная оценка влиянию соотношения первоначальных сжимающих и растягивающих сил, а также, относительной толщины пластинки на порог устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы.

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

Результаты работы могут быть использованы при обработке данных экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая достаточно удлинённая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$, $ab^{-1} < 0.33$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа принимается плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x = 0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 8,12,14,15].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию растягивающих $N_x = 2h\sigma_x$ и сжимающих $N_y = 2h\sigma_y$ сил, равномерно распределённых, соответственно, по кромкам пластинки $x = 0$, $x = a$, и $y = 0$, $y = b$, являющимися результатом нагрева, или каких – либо других причин; усилия σ_x и σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба $w = w(x, y, t)$ [1, 2, 5].
Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызывет избыточное давление δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» $\delta p = -a_0\rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, где

a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [6, 7]. Будем полагать, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$ [1, 5].

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками δp, растягивающими σ_x и сжимающими σ_y усилиями в срединной поверхности пластинки, и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c, приложенными вдоль её свободного края $x = 0$, в предположении, что усилия σ_x и σ_y малы по сравнению с критическими значениями $(\sigma_x)_{pr.}$ и $\left(\sigma_y\right)_{cr.}$, где $(\sigma_x)_{pr.}$ – усилия, начиная с которого имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [9]; $\left(\sigma_y\right)_{cr.}$ – усилия, которые могут произвести «выпучивание» пластинки в отсутствии обтекания [13, 16].

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в рамках справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [6, 7] в предположении малости интенсивности $m\,\partial^2 w/\partial t^2$ распределённой массы пластинки m в сравнении с интенсивностями $m_c\,\partial^2 w/\partial t^2$ и $I_c\,\partial^2 w/\partial t^2$, учитываемых в граничных условиях [8], будет описываться соотношением [1, 2]:

$$D\Delta^2 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0\rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,,\ w = w\left(x, y, t\right); \qquad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1, 2, 8, 12, 14, 15]:

$$D\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=I_c\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}, \tag{1.2}$$

$$D\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-N_x\frac{\partial w}{\partial x}=-m_c\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{при } x=0;$$

$$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \text{ при } x=a \text{ и } w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \text{ при } y=0 \text{ и } y=b; \tag{1.3}$$

ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа – в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V\in(a_0M_0, a_0M_{2\cos m.}),\ M_0=\sqrt{2},\ M_{2\cos m.}\approx 33.85; \tag{1.4}$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.3) в предположении:

$$\sigma_x<(\sigma_x)_{pr.},\ \sigma_y<(\sigma_y)_{cr.} \tag{1.5}$$

А также, требуется определить относительную толщину пластинки $2ha^{-1}$, обеспечивающую её прочность по критерию устойчивости колебаний.

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы (1.1) – (1.3) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) и (1.3) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале (1.4) при условии (1.5). Задачу устойчивости (1.1) – (1.5) будем исследовать в случае достаточно удлинённых прямоугольных пластинок [1, 2, 12 – 15]:

$$\gamma=ab^{-1}<0.33, \tag{1.6}$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b.

В статье [12] получено аналитическое решение задачи (1.1) – (1.5) для всех значений $\gamma\in[0,\infty]$ в отсутствии первоначальных усилий в срединной поверхности пластинки $(\sigma_x=\sigma_y=0)$. В статьях [14] и [15] исследована исходная задача устойчивости при условии $\sigma_x=0$, $\sigma_y\neq 0$ и $\sigma_x\neq 0$, $\sigma_y=0$ соответственно, из сопоставления результатов которых следует, что растягивающие усилия σ_x приводят к существенному повышению устойчивости системы.

В работах [13] и [16] получено решение задачи (1.1) – (1.5) для всех $\gamma\in[0,\infty]$ в статической постановке $(m_c=0, I_c=0)$ по методу Эйлера при условии $\sigma_x=0$, $\sigma_y\neq 0$, и $\sigma_x\neq 0$, $\sigma_y\neq 0$ соответственно; показано, что система «пластинка-поток» теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели и в виде локализованной дивергенции, в зависимости от её параметров; установлена граница перехода из области эйлеровой дивергенции панели в область локализованной дивергенции. Найдены критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции.

Заметим, что согласно обозначению (1.6) значению $\gamma = 0$ соответствует предельный случай прямоугольной пластинки – бесконечно удлинённая пластинка.

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.3). Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), будем искать в виде суммы гармонических колебаний [1, 2, 12]:

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t)\cdot \sin(\mu_n y),\ \mu_n = \pi n b^{-1}, \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое состояние равновесия системы (1.1) – (1.3) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\,\lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\,\lambda > 0$) [10]. Критическая скорость потока газа V_{cr}, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\mathrm{Re}\,\lambda = 0$) [1, 2, 10].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» в виде [16]:

$$r^4 - 2\cdot(1+\beta_x^2)\cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + (1-\beta_y^2) = 0, \tag{2.2}$$

α_n^3 – параметр, определяющий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3} \in (a_0^2\rho_0 M_0 D^{-1}\mu_n^{-3},\ a_0^2\rho_0 M_{2\cos m.} D^{-1}\mu_n^{-3}); \tag{2.3}$$

β_x^2 и β_y^2 – коэффициенты, характеризующие усилия σ_x и σ_y соответственно, определяющие консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2\cdot N_x\, D^{-1}\mu_n^{-2} = h\sigma_x D^{-1}\mu_n^{-2} < (\beta_x^2)_{pr.},\ (\beta_x^2)_{pr.} = h(\sigma_x)_{pr.} D^{-1}\mu_n^{-2}; \tag{2.4}$$

$\beta_y^2 = N_y D^{-1}\mu_n^{-2} = 2h\sigma_y D^{-1}\mu_n^{-2} < \left(\beta_y^2\right)_{cr.},\ \ (\beta_y^2)_{cr.} = 2h(\sigma_y)_{cr.} D^{-1}\mu_n^{-2}$ (табл.1) [16];

согласно условиям (1.4), (1.5).

В соответствии с известным решением Феррари, уравнение (2.2) можно представить в виде:

$$\left(r^2 + \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot r + q - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right) = 0, \tag{2.5}$$

$$\left(r^2 - \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot r + q + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right) = 0; \tag{2.6}$$

где $q > 0$ – единственный действительный корень кубического уравнения [16}:

$$8\cdot(q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2) - \alpha_n^6 = 0. \tag{2.7}$$

Отсюда, в соответствии с обозначением (2.3), очевидно, что параметр q характеризует скорость потока газа V : $q = q(V)$ при фиксированных значениях остальных параметров системы. А тогда, в силу условия (1.4), имеем $q \in (q(a_0 M_0), q(a_0 M_{2\cos m.}))$.
С помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), переписанного в виде (2.5) и (2.6), можно показать, что

$$q = q(V) \in \left(q_0,\, q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right) \subseteq \left(q\left(a_0 M_0\right), q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right), \tag{2.8}$$

$$q_0 = \left(-\left(1+\beta_x^2\right) + 2\sqrt{(1+\beta_x^2)^2 + 3(1-\beta_y^2)}\right) \Big/ 3 \tag{2.9}$$

при всех $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr}$ и $\beta_y^2 < \left(0.25\left(1+\beta_x^2\right)^2 + 1\right) \bigcap (\beta_y^2)_{cr.}$; (2.10)

в силу очевидного условия $q > 0$ и известного требования к его корням r_i[1, 2, 12]:

$$r_1 < 0,\ r_2 < 0,\ r_{3,4} = \alpha \pm i\beta \in W, \alpha > 0, \tag{2.11}$$

являющимся решением квадратных уравнений (2.5) и (2.6) соответственно [16]:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} - 0.5(q - 1 - \beta_x^2)},\ r_1 < 0,\ r_2 < 0; \tag{2.12}$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} + 0.5(q - 1 - \beta_x^2)}. \tag{2.13}$$

Тогда, в соответствии с выражениями (2.12) и (2.13), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{4} C_{nk} \cdot \exp(\mu_n r_k x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y). \tag{2.14}$$

В таблице 1 приведены критические значения коэффициента β_y напряжения σ_y: $(\beta_y^2)_{cr} = (\beta_y^2)_{cr}(n, \gamma, \nu)$ – решения дисперсионных уравнений исходной задачи устойчивости в отсутствии обтекания $(V = 0)$ для $\gamma < 0.33$ при $n = 1$, $\beta_x^2 = 0$ и $m_c = 0, I_c = 0$, найденные с точностью до порядка 10^{-4} [1, 13, 16]:
при $\gamma < 80$ имеем

$$F_1\left(n, \gamma, \nu, \beta_y^2\right) =$$

$$= \left(\sqrt{1+\beta_y}\left(1-\beta_y-\nu\right)^2 + \sqrt{1-\beta_y}\left(1+\beta_y-\nu\right)^2\right) sh\left(\pi n\gamma\left(\sqrt{1+\beta_y} - \sqrt{1-\beta_y}\right)\right) -$$

$$- \left(\sqrt{1+\beta_y}\left(1-\beta_y-\nu\right)^2 - \sqrt{1-\beta_y}\left(1+\beta_y-\nu\right)^2\right) sh\left(\pi n\gamma\left(\sqrt{1+\beta_y} + \sqrt{1-\beta_y}\right)\right) = 0$$

когда $\beta_y^2 < 1$;

$F_2\left(n, \gamma, \nu\right) = \left(2 - \nu^2\right) sh\left(\sqrt{2}\pi n\gamma\right) - \nu^2 \sqrt{2}\pi n\gamma \cdot ch\left(\sqrt{2}\pi n\gamma\right) = 0$, когда $\beta_y^2 = 1$;

$$F_3\left(n,\gamma,\nu,\beta_y^2\right)=\sqrt{\beta_y-1}\left(\beta_y+1-\nu\right)^2\operatorname{sh}\left(\pi n\gamma\sqrt{\beta_y+1}\right)\cos\left(\pi n\gamma\sqrt{\beta_y-1}\right)-$$

$$-\sqrt{\beta_y+1}\left(\beta_y-1+\nu\right)^2\operatorname{ch}\left(\pi n\gamma\sqrt{\beta_y+1}\right)\sin\left(\pi n\gamma\sqrt{\beta_y-1}\right)=0\text{, когда }\beta_y^2>1;$$

при $\gamma\geq 80$ имеем

$$F_4=F_4\left(\nu,\beta_y^2\right)=\left(1+\sqrt{1-\beta_y^2}\right)^2-2\nu\left(1+\sqrt{1-\beta_y^2}\right)-\left(1-\nu\right)^2=0\text{, когда }\beta_y^2<1.$$

Заметим, что $\lim\limits_{\gamma\to\gamma_{cr}}F_1\left(n,\gamma,\nu,\beta_y^2\right)=F_4\left(\nu,\beta_y^2\right)$ для всех n, когда $\gamma\geq\gamma_{cr.}\approx 80$.

Таблица 1.

γ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.001	$5.31\cdot10^5$	$4.559\cdot10^5$	$4.255\cdot10^5$	$3.80\cdot10^5$	$3.04\cdot10^5$
0.010	$5.31\cdot10^3$	$4.559\cdot10^3$	$4.255\cdot10^3$	$3.80\cdot10^3$	$3.04\cdot10^3$
0.100	54.092	46.554	43.521	38.880	31.289
0.200	14.202	12.359	11.605	10.456	8.493
0.300	6.822	6.029	5.695	5.180	4.272
0.330	5.799	5.150	4.875	4.447	3.686

Отметим, что параметр $q\gg 1$ для всех $\gamma\leq 0.01$, откуда следует справедливость неравенства $q-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}>0$ в соотношениях (2.5), (2.6) и выполнение условий (2.11) при всех допустимых значениях параметров системы «пластинка–поток» [12,13]. Иначе, как показано в [1,2,12], соответствующие дисперсионные уравнения не имеют решения.

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.7), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q)=2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)}\cdot\pi^3n^3\gamma^3D(a_0\rho_0a^3)^{-1},\gamma\in\left(0,0.33\right).\qquad(2.15)$$

позволяющую по известному значению параметра $q=q\left(n,\gamma,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2\right)$ определить приведённую скорость потока газа $V\left(q\right)\cdot D^{-1}(a_0\rho_0a^3)$.

Учитывая условия (1.4), из выражения (2.15) согласно формуле цилиндрической жёсткости $D=E\cdot(2h)^3\Big/\left(12\left(1-\nu^2\right)\right)$ имеем [16]:

$$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0a^3)\in(V(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0a^3),a_0M_{2\cos m}\Psi)\subseteq(a_0M_0,a_0M_{2\cos m.})\Psi,$$

когда $V(q_0)\geq a_0M_0$;

$$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0a^3)\in(a_0M_0,a_0M_{2\cos m.})\Psi\text{, когда }V(q_0)<a_0M_0;$$

$$\Psi=12(1-\nu^2)a_0\rho_0E^{-1}(2ha^{-1})^{-3},\ M_0=\sqrt{2},\ M_{2\cos m.}\approx 33.85.\qquad(2.16)$$

Далее, подставляя значения $2ha^{-1} \in [0.006,\ 0.015]$ в выражения (2.16), получаем соответствующие интервалы $d\left(2ha^{-1},\nu\right) = (a_0 M_0,\ a_0 M_{2\cos m})\Psi$ допустимых значений приведённой скорости $VD^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.4) для стальных пластинок (табл. 2) [14].

Таблица 2.

$2ha^{-1}$ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.8,1311.7)	(52.0,1245.2)	(50.5,1209.0)	(47.7,1141.6)	(41.6,996.3)
0.008	(23.1, 544.3)	(22.0, 516.4)	(21.5, 505.6)	(20.1, 473.3)	(17.6,413.1)
0.010	(11.8, 283.5)	(11.2, 269.1)	(10.9, 261.3)	(10.3, 246.7)	(9.0, 215.3)
0.012	(6.85, 164.0)	(6.5, 155.7)	(6.3, 151.2)	(5.96, 142.7)	(5.2, 124.6)
0.014	(4.3, 101.5)	(4.09, 96.24)	(4.0, 94.24)	(3.75, 88.22)	(3.27, 77.0)
0.015	(3.5, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23,77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67,63.81)

3. Достаточные признаки потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.3).

3.1. Достаточно удлинённая прямоугольная пластинка $\left(\gamma \in (0, 0.33)\right)$.

Подставляя общее решение (2.14) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.12) и (2.13), в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель, описывается биквадратным уравнением относительно собственного значения λ:

$$\chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + \left(\chi_n A_1 + \delta_n A_2\right)\lambda^2 + A_3 = 0\ , \tag{3.1}$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3},\ \ \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1},\ \delta_n > 0\ ,\ \chi_n > 0\ , \tag{3.2}$$

δ_n и γ_n – приведённые значения сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки;

$$A_0 = A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2) = \tag{3.3}$$

$$= \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\left(1-\exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma\right)B_1 B_2 -$$

$$-2B_2\left(q+1+\beta_x^2+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)sh(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2) -$$

$$-2B_1\left(q+1+\beta_x^2-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)ch(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\,;$$

$$A_1 = A_1(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2) = \tag{3.4}$$

$$= 2(q+1+\beta_x^2)\left[(q-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2})+(q+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2})\exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma\right]\cdot$$

$$\cdot B_1 B_2 + 2B_2\left[\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)}\left(q+1+\beta_x^2+\sqrt{(q^2-1+\beta_y^2}\right)\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+\right.$$

$$\left.+2B_1((2q-1)(q+1)+\beta_y^2+q\beta_x^2)\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\right]\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)+$$

$$+2\left[B_1\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)}\left(q+1+\beta_x^2-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)+\right.$$

$$\left.+(q+1+\beta_x^2)(q-1+\beta_y^2+q\beta_x^2)sh(\pi n\gamma B_1)\right]\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma);$$

$$A_2 = A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2) = \tag{3.5}$$

$$= 2(q+1+\beta_x^2)\left(1+\exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)\right)B_1 B_2 -$$

$$-4(q+1+\beta_x^2)B_1 B_2\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)+$$

$$+2(3(q^2-1)-2\beta_x^2-\beta_x^4+2\beta_y^2)\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)\,;$$

$$A_3 = A_3(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2) = \tag{3.6}$$

$$= \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2+\right.$$

$$\left.+2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\right\}B_1B_2-\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)^2-\right.$$

$$\left.-2(q+1)\nu-\left(1-\nu\right)^2+2\beta_x^2\left(q+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\right\}B_1B_2$$

$$\exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma+$$

$$+\ 2B_2\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)\left\{\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}-\right.\right.$$

$$-(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)+(2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+\beta_y^2+2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2-$$

$$-\left(q-1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\beta_y^2-2((2q-1)(\mathrm{q}+1)-q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+\beta_y^2+q\beta_x^2)\nu+$$

$$\left.+(\mathrm{q}+1+\beta_x^2+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2})\,\nu^2\right]\mathrm{sh}(\pi\,n\,\gamma B_1)+$$

$$\left.+2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)^3(q^2-1+\beta_y^2)}\,B_1\mathrm{ch}\left(\pi n\gamma B_1\right)\right\}\cdot\cos(\pi\,n\,\gamma B_2)-$$

$$-2\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)\left\{B_1\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+\right.\right.$$

$$+(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)-(2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+\beta_y^2+2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2+$$

$$+\left(q-1+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\beta_y^2+2((2q-1)(\mathrm{q}+1)+q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+\beta_y^2+q\beta_x^2)\nu-$$

$$-(\mathrm{q}+1+\beta_x^2-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2})\,\nu^2\Big]\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)+\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)\left(q^2-1+\beta_y^2\right)}\,\cdot$$

$$\cdot(3(q^2-1)-2\beta_x^2-\beta_x^4+2\beta_y^2)\cdot\mathrm{sh}\left(\pi n\gamma B_1\right)\Big\}\sin\left(\pi n\gamma B_2\right);$$

$$B_1=\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}-0.5(q-1-\beta_x^2)},\ B_2=\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}+0.5(q-1-\beta_x^2)}. \quad (3.7)$$

Легко показать, что при допустимых значениях (2.9) параметра $q=q(V)$ и коэффициентов (2.10): $\beta_x^2<(\beta_x^2)_{pr.}$, $\beta_y^2<\left(0.25\left(1+\beta_x^2\right)^2+1\right)\bigcap(\beta_y^2)_{cr.}$,

$$B_1=B_1(q,\beta_x^2,\beta_y^2)>0,\ B_2=B_2(q,\beta_x^2,\beta_y^2)>0, \quad (3.8)$$

откуда следует справедливость неравенств

$$A_0=A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2)>0\,,\ A_2=A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2)>0,\ \gamma\in\left(0,0.33\right). \quad (3.9)$$

Вводя обозначение

$$k_n=\chi_n\cdot\delta_n^{-1}=I_c\left(\pi n\gamma\right)^2\cdot\left(m_c a^2\right)^{-1}, \quad (3.10)$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.9), перепишется в виде

$$\lambda^4+(k_nA_1+A_2)\chi_n^{-1}A_0^{-1}\lambda^2+\chi_n^{-1}\delta_n^{-1}A_0^{-1}A_3=0\,,\ \delta_n>0\,,\ \chi_n>0\,,\ k_n>0\,. \quad (3.11)$$

Будем полагать, что

$$k_n\in\left(0,10\right]. \quad (3.12)$$

При больших значениях k_n происходит «жёсткий» переход через точку $\lambda_\infty=\pm\infty$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k.

Заметим, что непосредственной подстановкой $\beta_x^2=\beta_y^2=0$ в уравнение (3.11) можно убедиться в его тождественности уравнению, полученному в работе [12].

3.2. Бесконечно удлинённая пластинка $\left(\gamma=0\right)$**.** Дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности бесконечно удлинённой пластинки может быть получено из (1.1) путём предельного перехода $b\to\infty$. Тогда, вводя величину $\xi=xa^{-1}$, уравнения исходной задачи (1.1) – (1.3) перепишутся в виде:

$$D\frac{\partial^4 w_1}{\partial\xi^4}-\left(N_x a^2\right)\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}+\left(a_0\rho_0 a^3 V\right)\frac{\partial w_1}{\partial\xi}=0\,,\ w_1=w_1\left(\xi,\,t\right); \quad (3.12)$$

$$D\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}=\left(I_c a\right)\frac{\partial^3 w_1}{\partial\xi\cdot\partial t^2};\ D\frac{\partial^3 w_1}{\partial\xi^3}-\left(N_x a^2\right)\frac{\partial w_1}{\partial\xi}=-\left(m_c a^3\right)\frac{\partial w_1}{\partial t^2}\,,\ \xi=0; \quad (3.13)$$

$$w_1=0\,,\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}=0\,,\ \xi=1; \quad (3.14)$$

откуда очевидно, что в случае бесконечно удлинённой пластинки $(\gamma = 0)$, нагруженной в двух направлениях силами $N_x \neq 0$ и $N_y \neq 0$, на устойчивость невозмущённого состояния равновесия системы оказывают влияние только лишь силы $N_x \neq 0$, направленные по потоку газа, в отличие от сил $N_y \neq 0$, направленных перпендикулярно потоку, аналогично, как и в статье [17].

Задача устойчивости (3.12) – (3.14) подробно исследована в [15]. Показано, что система, в случае растянутой по потоку газа бесконечно удлинённой пластинки $(\gamma = 0)$, будучи неустойчивой вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.4) при $\beta_\xi^2 = 2h\sigma_\xi a^2 D^{-1} > \left(\beta_\xi^2\right)_{\min}$ становится устойчивой: $\left(\beta_\xi^2\right)_{\min}$ – монотонно убывающая функция от $2ha^{-1}$, которая на промежутке $2ha^{-1} \in [0.006; 0.015]$ убывает от 7.9 до 0.83. В дальнейшем, с увеличением скорости потока система (3.12) – (3.14) теряет устойчивость в виде эйлеровой и неэйлеровой дивергенции панели, а также, в виде панельного флаттера [15].

Исходную задачу устойчивости будем исследовать для $\gamma \in (0, 0.33)$.

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.3) при ограничениях (1.4) и (1.5) сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.11), определяющего собственные движения системы “пластинка–поток” в пространстве её «существенных» параметров $\Im = \left\{q(V), n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n\right\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическую систему «пластинка–поток». Значения остальных параметров системы принимаются фиксированными.

4. **Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости.** Как и в работах [12, 14, 15], введём в рассмотрение в пространстве параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\Im_0\left(k_n A_1 + A_2 > 0, A_3 > 0, \Delta > 0\right)$ и области неустойчивости: $\Im_1\left(A_3 < 0, \Delta > 0\right)$, $\Im_2\left(k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 > 0, \Delta > 0\right)$ и $\Im_3\left(A_3 > 0, \Delta < 0\right)$, соответственно, эйлеровой и неэйлеровой дивергенции панели и панельного флаттера. Здесь Δ – дискриминант биквадратного уравнения (3.11):

$$\Delta = \Delta(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4k_n A_0 A_3 . \tag{4.1}$$

В области устойчивости $\Im_0$ уравнение (3.11) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$: прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого состояния равновесия; в области $\Im_1$ – имеет два действительных корня $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ и два чисто мнимых корней $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$, что характеризует эйлерову дивергенцию панели; в области $\Im_2$ – имеет два отрицательных ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) и два положительных ($\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$) корня, характеризующее более ярко выраженную дивергенцию панели – неэйлеровую дивергенцию; а в области $\Im_3$, по крайней мере, два корня уравнения (3.11) являются комплексно сопряжёнными числами с положительной вещественной частью: имеет место панельный флаттер: пластинка совершает флаттерные колебания – колебания по нарастающей амплитуде [12, 14, 15].

Границами области устойчивости $\Im_0$ системы в пространстве её параметров $\Im$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ являются гиперповерхности $A_3 = 0$ и $\Delta = 0$ – определяющие условия апериодической и колебательной неустойчивости соответственно [10–12]: характеристическое уравнение (3.11) на гиперповерхности $A_3 = 0$ имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2, а на гиперповерхности $\Delta = 0$ – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Переходы ($\Im_0 \to \Im_3$) и ($\Im_2 \to \Im_3$) определяют «опасные границы» областей $\Im_0$ и $\Im_2$ [11].

На границе $A_3 = 0$ области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ система «пластинка-поток» при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели $\Im_1$. Критические скорости $\{V_{cr.div}\}$, определяемые подстановкой первого и третьего корней уравнения $A_3 = 0$ в формулу (2.15), разграничивают области $\Im_0$ и $\Im_1$. При скоростях $V \geq V_{cr.div.}$ потока газа происходит «мягкий» переход через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к эйлеровой дивергенции панели. Это приводит к возникновению дополнительных напряжений, приводящих к изменению плоской формы равновесия: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Критические скорости неэйлеровой дивергенции $\{V_{1,2}\}$ разграничивают области $\Im_1$ и $\Im_2$. При скоростях потока газа $V \geq V_{1,2}$ происходит «мягкий» переход из области $\Im_1$ в область $\Im_2$. Критические скорости $V_{1,2}$ определяются подстановкой второго корня уравнения $A_3 = 0$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$ и $\Delta > 0$ в формулу (2.15).

На границе $\Delta = 0$ области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, а так же, на границе $\Delta = 0$ области $\Im_2$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, система при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl}$ теряет, соответственно, устойчивость в виде колебательной неустойчивости, либо переходит из состояния равновесия в состояние колебательной неусточивости, либо из состочния неэйлеровой дивергенции в состояние колебательной неустойчивости: имеет место панельный флаттер.

Критические скорости панельного флаттера $\{V_{cr.fl.}\}$, определяемые подстановкой первого корня уравнения $\Delta = 0$ в формулу (2.15), разграничивают области $\Im_0$ и $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, либо области $\Im_2$ и $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, в зависимости от значений параметров системы $n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n$. В обоих случаях при $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к флаттерным колебаниям. Однако, следует отметить, что в первом случае начинает совершать флаттерные колебания относительно равновесного состояния плоская по форме пластинка, а во втором случае – изогнутая по форме пластинка – «выпученная». Переходы ($\Im_0 \to \Im_3$) и ($\Im_2 \to \Im_3$) определяют «опасные границы» областей $\Im_0$ и $\Im_2$ [11].

Следует отметить, что критические скорости $V_{cr.div.}$, $V_{1,2}$ и $V_{cr.fl.}$ определяются с достаточной точностью подстановкой в формулу (2.15) искомых значений параметра $q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$.

5. **Численные результаты**. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n)\} \in \Im$ для $\gamma \in (0, 0.33)$, параметризованных надлежащим образом.

Аналогично, как и в [14, 17], для наглядной иллюстрации динамики невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка – поток» в пространстве параметров $\Im$ составлены цепочки переходов из области $\Im_l \subset \Im$ в область $\Im_m \subset \Im$ сопоставлением найдённых значений критических скоростей с данными таблицы 2. Здесь, так же, формы представления цепочек переходов существенно зависят от относительной толщины $2ha^{-1}$ и материала пластинок. В частности, цепочки переходов исходной системы в случае стальных пластинок относительной толщины $\left(2ha^{-1}\right) \in [0.006, 0.015]$ будут вида:

для $\gamma = 0.1$

$$(\Im_0) \xrightarrow{V_{crdiv}^{(1)}} \Im_1 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^2} \Im_1, \quad k_1 \in (0, 0.0257); \tag{5.1}$$

$$(\Im_0) \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \Im_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \Im_2 \xrightarrow{V_0^{**}} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \Im_1, \ k_1 \in [0.0257, 0.058);$$

$$(\Im_0) \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \Im_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \Im_2 \xrightarrow{V_{crfl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^{**}} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \Im_1, \ k_1 \geq 0.058;$$

для $\gamma = 0.3$

$$(\Im_0) \xrightarrow{V_{crdiv}^{(1)}} \Im_1 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^2} \Im_1, \ k_1 \in (0, 0.0687), \ \beta_x^2 < 3 \tag{5.2}$$

и $k_1 \in (0, 0.5)$, $\beta_x^2 \geq 3$;

$$(\Im_0) \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \Im_1 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{V_{crfl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^{**}} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \Im_1,$$

$k_1 \in [0.0687, 0.5), \beta_x^2 < 3$;

$$\left(\Im_0\right) \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \Im_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \Im_2 \xrightarrow{V_{crfl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^{**}} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \Im_1, \; k_1 \geq 0.5 .$$

Как следует из выражений (5.1), для $\gamma = 0.1$ при малых k_1 $\left(k_1 < 0.058\right)$ панельный флаттер отсутствует: система теряет только статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции, когда $k_1 \in \left(0;\, 0.0257\right)$, и в виде эйлеровой и неэйлеровой дивергенции, когда $k_1 \in \left[0.0257; 0.058\right)$. При этом, $V_0^* = V_{1,2}$.

В цепочках переходов (5.2) для $\gamma = 0.3$ при малых k_1 $\left(k_1 \in \left[0.0687;\, 0.5\right)\right)$ имеет место переход $\Im_1 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{V_{crfl}} \Im_3$, а при больших $k_1 \geq 0.5$ – $\Im_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \Im_2 \xrightarrow{V_{crfl}} \Im_3$. Здесь, также, $V_0^*\left(\gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2\right) = V_{1,2}\left(\gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2\right)$ для всех ν, β_x^2 и β_y^2. При скоростях потока $V \geq V_{cr.fl.}$, когда $k_1 \in \left[0.0687, 0.5\right)$, начинает совершать флаттерные колебания «плоская» пластинка, а когда $k_1 \geq 0.5$ – «выпученная» (изогнутая) пластинка.

Отметим, что качественные характеристики динамики невозмущённого состояния равновесия системы одинаковы для всех $\gamma \in \left(0; 0.193\right]$ и $\gamma \in \left(0.193; 0.33\right)$: описываются цепочками переходов (5.1) и (5.2) соответственно. Однако её количественные характеристики различны – существенно зависят от γ.

Представления (5.1) и (5.2) наглядно указывают ещё на одну особенность в динамике невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка–поток»: невозмущённое состояние равновесия системы будучи статически неустойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ при малых β_x^2, становится устойчивым, когда $\beta_x^2 > \left(\beta_x^2\right)_{\min}$ (табл. 3) [16].

Таблица 3.

$2ha^{-1}$	0.006	0.010	0.012	0.015
$\left(\beta_x^2\right)_{\min}$, $\gamma = 0.1$	79.00	23.00	15.00	8.27
$\left(\beta_x^2\right)_{\min}$, $\gamma = 0.3$	9.60	1.98	1.17	0.62

Результаты численных расчётов показали, что для $\gamma \in \left(0, 0.33\right)$ критические скорости эйлеровой и неэйлеровой дивергенции панели, а также панельного флаттера являются возрастающими функциями от числа полуволн n: их наименьшему значению соответствует $n = 1$.

Значения $V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ для $\gamma = 0.1$, $\nu = 0.3$. Таблица 4.

β_y^2 \ β_x^2	0	5	10	15	20
0	77.318	83.490	89.623	95.737	101.852
15	77.319	83.503	89.646	95.769	101.893
30	77.320	83.512	89.668	95.797	101.938

В таблицах 4 – 7 и 8 – 11 представлены некоторые значения критических скоростей дивергенции и флаттера, соответственно, для $\gamma = 0.1$ и $\gamma = 0.3$ при $n = 1$. Критические скорости устойчивости V_0^* и неэйлеровой дивергенции $V_{1,2}$ являются монотонно возрастающими функциями от γ, β_x^2, β_y^2 и от коэффициента Пуассона ν : с ростом ν возрастают, примерно, на 0.5 %– 5 % (табл. 4, 8).

Значения $V_{crdiv}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ для $\gamma = 0.1$ при $\nu = 0.3$. Таблица 5.

β_y^2 \ β_x^2	0	1	5	10	15	20
0	0.283	0.684	2.334	4.501	6.776	9.148
1	0.276	0.676	2.328	4.494	6.767	9.140
5	0.250	0.650	2.299	4.467	6.732	9.105
10	–	0.616	2.263	4.425	6.695	9.061
20	–	0.552	2.196	4.356	6.621	8.985
30	–	–	2.126	4.282	6.541	8.902

Значения $V_{crdiv}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ для $\gamma = 0.1$ при $\nu = 0.3$. Таблица 6.

β_y^2 \ β_x^2	0	1	5	10	15	20
0	484.256	486.175	493.837	503.448	513.009	522.593
5	484.250	486.172	493.835	503.443	513.007	522.584
10	484.247	486.170	493.834	503.440	513.006	522.577
20	484.241	486.166	493.831	503.431	513.003	522.566
30	484.237	486.160	493.827	503.418	512.995	522.561

Критические скорости эйлеровой дивергенции $V_{crdiv}^{(1)}$ и $V_{crdiv}^{(2)}$ являются возрастающими функциями от β_x^2, а от β_y^2 и коэффициента Пуассона ν – медленно убывающими функциями: с ростом ν убывают, примерно, на 5 % – 30 % и на 0.5 % – 4 % соответственно (табл. 5 и 6).:

Значения $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ для $\gamma = 0.1$ при $\nu = 0.3$ и $k_1 \in [0.1, 5]$: Таблица 7.

$k_1 = 0.1$

β_y^2 \ β_x^2	0	1	5	10	15	20
0	92.746	93.698	97.528	102.368	107.284	112.254
5	92.784	93.738	97.577	102.425	107.334	112.303
10	92.823	93.777	97.604	102.465	107.374	112.345
20	92.886	93.852	97.692	102.547	107.458	112.431
30	92.974	93.922	97.773	102.628	107.543	112.519

$k_1 = 0.5$.

β_y^2 \ β_x^2	0	1	5	10	15	20
0	124.088	125.168	129.269	124.461	139.745	144.967
5	124.152	125.200	129.357	124.557	139.795	145.015
10	124.204	125.244	129.406	134.615	139.839	145.077
20	124.299	125.336	129.503	134.718	139.948	145.189
30	124.390	125.434	129.597	134.820	140.050	145.300

$k_1 = 1$.

β_y^2 \ β_x^2	0	1	5	10	15	20
0	134.182	135.275	139.653	145.616	150.622	156.087
5	134.231	135.324	139.688	145.676	150.676	156.171
10	134.273	135.374	139.754	145.727	150.731	156.223
20	134.364	135.465	139.853	145.830	150.838	156.342
30	134.460	135.557	139.954	145.933	150.943	156.461

$k_1 = 5$.

β_y^2 \ β_x^2	0	1	5	10	15	20
0	149.045	150.225	154.967	160.901	166.844	172.797
5	149.087	150.275	155.017	160.971	166.899	172.849
10	146.129	150.317	155.067	161.005	166.952	172.910
20	146.228	150.409	155.160	161.108	167.060	173.022
30	149.312	150.501	155.261	161.207	167.166	173.134

Значения $V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ для $\gamma = 0.3$, $\nu = 0.3$. Таблица 8.

β_y^2 \ β_x^2	0	0. 5	1	2	3
0.0	90.306	96.053	102.000	113.360	124.989
2.0	90.452	96.250	102.076	113.723	125.407
3.5	90.460	96.321	102.188	113.898	125.729

Критическая скорость флаттера $V_{cr.fl.} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.1$ является монотонно возрастающей функцией от β_x^2, β_y^2, коэффициента Пуассона ν и k_1 (табл. 7). В частности, с ростом коэффициента Пуассона ν возрастает , примерно, на 0.1– 0.4 %. Из сопоставления данных таблиц 4 и 8 следует, что критическая скорость неэйлеровой дивергенции $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ является возрастающей функцией от γ.

Значения $V_{crdiv}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ для $\gamma = 0.3$, $\nu = 0.3$. Таблица 9.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	3.078	5.044	7.091	9.227	11.414	13.714	16.044
0.5	2.804	4.754	6.792	8.935	11.095	13.383	15.681
1.0	2.537	4.472	6.503	8.587	10.794	13.026	15.355
2.0	–	3.890	6.986	7.984	10.108	12.336	14.617
3.0	–	–	5.299	7.358	9.483	11.658	13.948
3.5	–	–	–	7.039	9.143	11.330	13.585

Значения $V_{crdiv}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ для $\gamma = 0.3$, $\nu = 0.3$. Таблица 10.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	477.114	484.951	492.737	500.496	508.239	515.955	523.640
0.5	477.113	484.950	492.736	500.481	508.195	515.910	523.594
1.0	477.111	484.948	492.734	500.468	508.163	515.865	523.548
2.0	477.107	484.945	492.732	500.445	508.125	515.818	523.468
3.0	477.101	484.942	492.728	500.418	508.104	515.749	523.384
3.5	477.063	484.939	492.726	500.406	508.076	515.725	523.343

Критические скорости эйлеровой дивергенции $V_{crdiv}^{(1)}$ и $V_{crdiv}^{(2)}$ при $\gamma = 0.3$ –монотонно возрастающие функции от параметра β_x^2; монотонно убывающие функции от параметров β_y^2 и коэффициента Пуассона ν: с ростом ν убывают, примерно, 1.14–1.15 раз и 1.065 – 1.73 раза соответственно (табл.. 9 и 10).

Значения $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ для $\gamma = 0.3$, $\nu = 0.3$ и $k_1 \in [0.1;\ 5]$: Таблица 11.

$k_1 = 0.1$ (переход $\mathfrak{I}_1 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{crfl}} \mathfrak{I}_3$)

β_y^2 \ β_x^2	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	110.395	121.936	135.215	151.416	177.083	–	–
0.5	109.993	121.445	134.533	150.442	174.471	–	–
1.0	109.592	120.956	133.882	149.542	172.394	–	–
2.0	108.667	119.984	132.586	147.823	168.864	–	–
3.0	108.001	119.017	131.433	146.186	165.952	–	–
3.5	107.544	118.498	130.792	145.400	164.652	–	–

$k_1 = 0.5$ (переход $\mathfrak{I}_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \mathfrak{I}_{1,2} \xrightarrow{V_{crfl}} \mathfrak{I}_3$)

β_y^2 \ β_x^2	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	93.440	98.463	103.598	108.828	114.139	119.590	125.123
0.5	93.563	98.635	103.766	109.005	114.319	119.751	125.184
1.0	93.777	98.808	103.933	109.156	114.483	119.913	125.454
2.0	94.116	99.146	104.269	109.493	114.817	120.249	125.786
3.0	94.461	99.489	104.612	109.837	115.158	120.589	126.124
3.5	94.635	99.665	104.790	110.010	115.331	120.717	126.304

$k_1 = 1$

β_y^2 \ β_x^2	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	104.242	108.805	113.454	118.129	122.896	127.694	132.543
0.5	104.544	109.111	113.788	118.480	123.225	128.052	132.911
1.0	104.910	109.467	114.109	118.817	123.580	128.397	133.273
2.0	105.511	110.102	114.766	119.493	124.261	129.099	134.008
3.0	106.109	110.722	115.406	120.154	124.942	129.790	134.715
3.5	106.412	111.039	115.738	120.503	125.294	130.142	135.102

$k_1 = 5$

β_y^2 \ β_x^2	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	134.631	139.406	144.196	149.029	153.893	158.733	163.664
0.5	134.997	139.804	144.635	149.518	154.252	159.262	164.184
1.0	135.376	140.215	145.082	149.957	154.841	159.739	164.689
2.0	136.161	141.050	145.965	150.862	155.773	160.732	165.697
3.0	136.955	141.842	146.783	151.742	156.674	161.687	166.705
3.5	137.323	142.266	147.155	152.131	157.127	162.142	167.179

Приведённая критическая скорость флаттера $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ является монотонно возрастающей функцией от параметров β_x^2, β_y^2 и $k_1 \in \left[0.5,10\right]$ (табл. 11).. Можно показать, что $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, в отличие от больших k_1, при малых $k_1 \in \left[0.0687; 0.5\right)$ является медленно убывающей функцией от k_1, а от коэффициента Пуассона ν – медленно возрастающей функцией при всех $k_1 \geq 0.0687$: с ростом ν возрастает на 0.05% – 7%.

Из сопоставления данных таблиц 2, 3, 5 и 9 следует, что для достаточно удлинённых стальных пластинок, в частности, для $\gamma = 0.1$ и $\gamma = 0.3$, при относительной толщине $2ha^{-1} > 0.01$ и $2ha^{-1} > 0.009$ соответственно, система «пластинка–поток» становится устойчивой вблизи $a_0\sqrt{2}$ при всех значениях остальных параметров.

Итак, первоначальное напряжённое состояние достаточно удлинённой пластинки, нагруженной по двум направлениям: растягивающими силами N_x по потоку газа и сжимающими – N_y в перпендикулярном направлении к потоку, в целом, приводит к повышению устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы “пластинка–поток”. Можно утверждать, что в данной постановке основополагающее действие на устойчивость системы оказывают растягивающие силы N_x, повышая её. Между тем, в сравнении с результатами работы [17], влияние сжимающих сил N_y на устойчивость невозмущённого состояния равновесия системы незначимо, ограничивается, всего лишь, незначительным изменением численных значений критических скоростей потока.

6. Основные результаты и заключение. В работе получено аналитическое решение задачи динамической устойчивости невозмущённого состояния равновесия упругой достаточно удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота, в предположении, что пластинка первоначально нагружена по двум направлениям:

растягивающими силами, направленными по потоку газа и сжимающими силами, направленными перпендикулярно к потоку.

Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка–поток» на область устойчивости и на области неустойчивости: эйлеровой и не эйлеровой дивергенции панели и панельного флаттера.

Получена формула зависимости скорости потока газа от «существенных» параметров системы «пластинка–поток», позволяющая найти критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера.

Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Определены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости. Определена относительная толщина пластинки, обеспечивающая её прочность по критерию устойчивости колебаний.

Здесь, также, как и в статье [17], оказалось, что первоначальные силы растяжения N_x, направленные по потоку, существенно влияют не только на величину критической скорости потока, но и на границу области устойчивости, в отличие от сжимающих сил N_y, направленных в перпендикулярном направлении к скорости потока газа, оказывающим влияние только на её величину.

Установлено, что при меньших значениях интенсивности приложенных инерционных моментов поворота потеря устойчивости наступает при меньшей скорости потока, но это не эйлерова потеря устойчивости, а переход системы от покоя к движению – к автоколебаниям.

Показано, что, в целом, имеет место повышение устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы: влияние сжимающих сил на устойчивость системы в данной постановке незначимо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел.– М: Наука. 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968.
6. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
7. Ashley G.H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician//J. Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N 12. P. 1109–1118.
8. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
9. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
10. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.–Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
11. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.

12. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
13. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции сжатой панели при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2017, т. 70, № 4, с. 12-34.
14. M.V.Belubekyan, S.R.Martirosyan. Supersonic flutter of a compressed elongated plate in the presence of concetrated inertial masses and moments.// Изв. НАН Армении. Механика. 2020. Т.73, № 4, с. 58–74.
15. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа // Изв. НАН Армении, Механика. 2022. Т.75 (3), с. 64–82. DOI: 10.54503/0002-3051-2022.75.3 - 64.
16. Martirosyan S.R. Supersonic divergence of a panel with a free edge initially loaded in two directions tensile and compressive forces // 2022. Journal of Physics: Conference Series 2231 012030. IP address 93.187.163.146. DOI: 10.1088/1742–6596/2231/1/012030.
17. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлинённой панели со свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2024. Т.77 (1), с.40-55. DOI:10.54503/0002-3051-2024.77.1- 40.

Сведения об авторе:
Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 11.11.2024