ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №4, 2024 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.4-3

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ШТАМПА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ И ПОЛУПЛОСКОСТИ С ЗАРАНЕЕ НЕИЗВЕСТНОЙ ОБЛАСТЬЮ КОНТАКТА ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ ПОКОЯ

Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Григорян А.М.

Ключевые слова: контактная задача, полуплоскость, штамп, трение покоя

Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Grigoryan A.M.

On Contact Interaction of a Stamp of Arbitrary Shape and a Half-Plane with a Previously Unknown Contact Area in the Presence of Static Friction

Key words: contact problem, punch, half plane, static friction

An analytical solution is obtained for the problem of a contact interaction of an absolutely rigid stamp of arbitrary shape with an elastic half-plane with a variable contact area in the presence of static friction. It is assumed that, in addition to the normal total load, the stamp is also affected by a moment under the influence of which the stamp can turned. Simple formulas are derived for determining contact stresses and the relations for determining the angle of rotation of the stamp, the half-length and coordinate of midpoint of contact zone are obtained. As an example, two special cases are considered when the stamp has a parabolic shape and a special asymmetric shape. Calculations are given.

Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Հ.Ա., Գրիգորյան Ա.Մ.

Նախապես անհայտ կոնտակտի տիրույթով ու հանգստի շփման հաշվառմամբ կամայական տեսք ունեցող դրոշմի և կիսահարթության կոնտակտային փոխազդեցության մասին

Հիմնաբառեր՝ կոնտակտային խնդիր, դրոշմ, հանգստի շփում

Ստացված է կամայական տեսք ունեցող բացարձակ կոշտ դրոշմի և առաձգական կիսահարթության նախապես անհայտ կոնտակտի տիրույթով կոնտակտային փոխազդեցության խնդրի անալիտիկ լուծումը հանգստի շփման առկայության դեպքում։ Ենթադրվում է, դրոշմի վրա բացի նորմալ կենտրոնացված բեռից ազդում է նաև մոմենտ, որի ազդեցության տակ դրոշմը կարող է շրջվել։ Դուրս են բերված պարզ բանաձևեր կոնտակտային լարումների որոշման համար և ստացված են առնչություններ, որոնք թույլ են տալիս որոշել դրոշմի պտտման անկյունը, կոնտակտի տիրույթի միջնակետի կոորդինատը ու նրա երկարություն կեսը։ Որպես օրինակ դիտարկված են երկու մասնավոր դեպքեր, երբ դրոշմը ունի պարաբոլի տեսք և երբ այն ունի որոշակի ոչ համաչափ տեսք։ Կատարված են թվային հաշվարկներ։

Получено аналитическое решение задачи о контактном взаимодействии абсолютно жёсткого штампа произвольной формы с упругой полуплоскостью при наличии трения покоя, когда длина области контакта неизвестна. При этом считается, что на штамп, помимо нормальной сосредоточенной нагрузки, действует также момент, под воздействием которого штамп может поворачиваться. Выведены формулы для определения контактных напряжений и получены соотношения, позволяющие определить угол поворота штампа, полудлину и координату срединной точки контактной зоны. В качестве примеров рассмотрены два частных случая задачи, когда штамп имеет параболическую, и некую определенную несимметричную форму. Проведены численные расчёты.

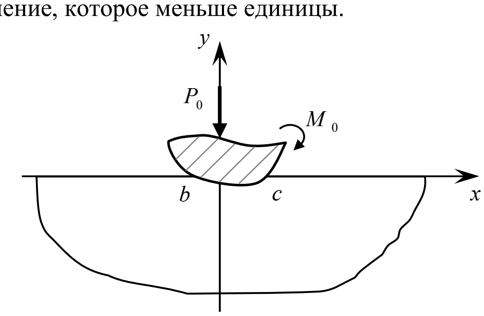
Введение

Известно, что детали различных машин во время их работы в некоторых областях контактируют между собой вследствие чего в этих областях возникают контактные напряжения, которые могут привести к частичному или полному разрушению машин. Поэтому определение закономерностей изменения размеров контактных областей этих деталей и контактных напряжений, действующих в этих областях, одна из важных проблем с точки зрения прочности и долговечности машин. Указанная проблема часто моделируется и сводится к решению контактных задач теории упругости с заранее неизвестной областью контакта, чем и обосновывается актуальность изучения контактных задач с заранее неизвестной областью контакта. Изучение контактных задач теории упругости имеет давнюю историю. Основополагающие результаты, полученные в этой области в течение долгих лет подытожены во многих работах и монографиях [1-6]. Заметим, что контактные задачи с заранее неизвестной областью контакта рассмотрены лишь в случаях гладкого контакта, когда касательные контактные напряжения отсутствуют, и в случае модели контакта с кулоновским трением, когда одно из контактирующих тел медленно движется относительно другого. Недавно, на основе сравнительного анализа моделей контакта со сцеплением и контактной модели Л.А.Галина, нами была предложена модель контакта с учетом трения покоя [7]. На основе этой модели нами были получены точные решения некоторых контактных задач [7,10]. Численный анализ этих решений показывает, что результаты, полученные с использованием этой модели, очень близки к решениям этих же задач, полученным с использованием модели контакта Л.А.Галина, и отличаются тем, что по модели Л.А.Галина касательные напряжения описываются негладкими функциями (имеют разлом), а по предложенной модели они описываются гладкими функциями.

Здесь же, в рамках модели контакта с учетом трения покоя, рассматривается плоская контактная задача о вдавливание абсолютно жёсткого штамп с произвольным основанием в упругую полуплоскость с заранее неизвестной областью контакта.

1.Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть в упругую полуплоскость с коэффициентами Ламе μ и λ, занимающую нижнюю полуплоскость $y \le 0$ в декартовой системе координат Oxy и находящуюся в условиях плоской деформации, вдавливается абсолютно жесткий штамп, основание которого описывается непрерывной гладкой функцией $y = q(x)$ $\left(q(0) = 0\right)$. При этом на штамп кроме сосредоточенной нагрузки P_0, линия действия которой проходит через точку $x = 0$, действует также момент M_0, приводящий к повороту штампа. Будем полагать, что при этом возникает только один участок контакта, где помимо нормальных контактных напряжений $\sigma_y(x,0) = -P(x)$ действуют также касательные напряжения $\tau_{xy}(x,0) = \tau(x)$, которые пропорциональны нормальному контактному давлению $P(x)$, действующему под штампом. При этом будем считать, что коэффициент пропорциональности зависит от разности координат точек соприкасающихся поверхностей и некой точки x_0 контактной зоны. Ввиду сделанных предположений зона контакта штампа с полуплоскостью, в общем случае, будет занимать некую, заранее неизвестную, область (b,c) (Фиг.1). Тогда коэффициент пропорциональности будет даваться формулой $f(x) = f\dfrac{x-x_0}{a}$, где $a = \dfrac{c-b}{2}$ -полудлина контактной зоны, $f(x)$ – коэффициент трения покоя, а f – его максимальное значение, которое меньше единицы.



Фиг.1

Требуется построить замкнутое решение поставленной задачи, получить формулы для определения нормального контактного давления и касательных контактных напряжений под штампом, угла поворота штампа γ, а также для концевых точек контактной зоны b, c и точки x_0.

Поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} v(x,0) = q(x) + \gamma x - \delta; \\ \tau(x) = f\dfrac{x-x_0}{a}P(x). \end{cases} \qquad (b < x < c) \tag{1}$$

где $v(x,y)$- нормальные смещения точек упругой полуплоскости, а δ- жёсткое смещение штампа.

Приступим к решению граничной задачи (1). Для этого используем формулу производной от вертикальных смещений точек контактной зоны полуплоскости на линии $y = 0$, приведенной в [1]. Дифференцируя первое соотношение (1), подставляя в полученное уравнение значение производной от вертикальных смещений и исключив из полученной системы $\tau(x)$, придем к следующему определяющему сингулярному интегральному уравнению второго рода с переменными коэффициентами относительно нормального контактного давления:

$$f\,\frac{x-x_0}{a}P(x)+\frac{\alpha}{\pi}\int_b^c\frac{P(s)\,ds}{s-x}=-q_1'(x)-\gamma_*\qquad(b<x<c)\tag{2}$$

где

$$q_1(x)=\frac{4\mu q(x)}{æ-1};\qquad\gamma_*=\frac{4\mu\gamma}{æ-1};\qquad\alpha=\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}>2,,$$

$æ=3\text{-}4\nu$ - постоянная Мусхелишвили, а ν - коэффициент Пуассона.

Уравнение (2) нужно рассматривать при условии равновесия штампа и непрерывности контактных напряжений в концевых точках зоны контакта, т. е. при условиях:

$$\int_b^c P(x)\,dx=P_0;\quad\int_b^c xP(x)\,dx=M_0;\quad\int_b^c\tau(x)\,dx=0;\quad P(b)=P(c)=0.\tag{3}$$

Заметим, что используя связь касательных напряжений с нормальным контактным давлением, из второго и третьего условий (3) для определения x_0 сразу получим формулу $x_0=M_0/P_0$. Приняв полученное значение для x_0 третье условие (3) будет выполняться автоматически.

Чтобы построить решение уравнения (2), в соотношениях (2) и (3) перейдем к новым переменным по формулам $\{s;x\}=\{\tau;t\}+k_0$ и, введя обозначения $P_*(t)=P(t+k_0)$ $q_{1*}'(t)=q_1'(k_0+t)$, запишем их в виде:

$$f_*(t)P_*(t)+\frac{\alpha}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{P_*(\tau)\,d\tau}{\tau-t}=-q_{1*}'(t)-\gamma_*\qquad(|t|<a)\tag{4}$$

$$\int_{-a}^{a}P_*(t)\,dt=P_0\,;\qquad\int_{-a}^{a}tP_*(t)\,dt=k_0'P_0;\qquad P_*(\pm a)=0\,.\tag{5}$$

Здесь

$$f_*(t)=f\,\frac{t+k_0'}{a};\quad k_0=\frac{b+c}{2};\quad a=\frac{c-b}{2};\quad k_0'=x_0-k_0\,.$$

Как и в [7], для решения уравнения (4) введём в рассмотрение аналитическую во всей комплексной плоскости разрезанной вдоль интервала $(-a,a)$ комплексную функцию $\Phi(z)$ по формуле

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{P_*(\tau)\,d\tau}{\tau-z}\tag{6}$$

и, при помощи формул Племеля-Сохоцкого для интегралов типа Коши [3,11], уравнение (4) сведем к следующей задаче Римана с переменным коэффициентом:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g_*(t) \quad \left(|t| < a\right) \quad ; \tag{7}$$

$$\left(G(t) = \frac{f_*(t) - i\alpha}{f_*(t) + i\alpha}; \quad g_*(t) = -\frac{q'_{1*}(t) + \gamma_*}{f_*(t) + i\alpha} \quad \left(|t| < a\right) \right).$$

Здесь верхние знаки $\pm$ над функциями, означают значения комплексной функции соответственно на верхнем и нижнем берегах интервала интегрирования.

Решение уравнения (7), ограниченное на обоих концах контактной зоны, будет даваться формулой[3,11]:

$$\Phi(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_{-a}^{a} \frac{g_*(\tau)\,d\tau}{X_0^+(\tau)(\tau - z)}, \tag{8}$$

где функция $X_0(z)$ решение однородной задачи Римана (7), ограниченное на обоих концах интервала $(-a, a)$ и определяемое формулой

$$X_0(z) = (z + a)e^{\Gamma(z)}; \qquad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{a} \frac{\ln G(\tau)\,d\tau}{\tau - z}.$$

При этом выбрана та ветвь функции $G(t)$, аргумент которой в точке $t = -a$ находится в интервале $(0, 2\pi)$ [7], т.е.

$$\arg G(t) = \pi + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{f_*(t)}{\alpha}.$$

Тогда, учитывая, что $|G(t)| = 1$ и имеют место тождества

$$\cos(\mathrm{arctg}\, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}; \qquad \sin(\mathrm{arctg}\, t) = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}},$$

несложно установить, что

$$X_0^{\pm}(t) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}\left(f_*(t) \mp i\alpha\right)e^{\psi(t)}}{\sqrt{\alpha^2 + f_*^2(t)}}, \tag{9}$$

где

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{arctg}\left(f_*(\tau)/\alpha\right)}{\tau - t}\,d\tau.$$

Используя представление (8), при помощи соотношений Племеля-Сохоцкого, для определения контактного давления получим выражение:

$$P_*(t) = -\frac{\left[q'_{1*}(t)+\gamma_*\right] f\,t/a}{f_*^2(t)+\alpha^2} + \tag{10}$$
$$+\frac{\alpha\omega(t)e^{\psi_1(t,f)}}{\pi\sqrt{\alpha^2+f_*^2(t)}}\int_{-a}^{a}\frac{\left[q'_{1*}(\tau)+\gamma_*\right]e^{-\psi_1(\tau,f)}d\tau}{\omega(\tau)\sqrt{\alpha^2+f_*^2(\tau)}(\tau-t)}.$$

Касательные же контактные напряжения будут даваться по второй из формул (1).

Здесь введены обозначения:

$$\omega(t) = (t+a)^{1/2-\beta(t)}(a-t)^{1/2+\beta(t)}; \qquad \beta(t) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{f_*(t)}{\alpha}\right);$$

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{f_*(\tau)}{\alpha}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{f_*(t)}{\alpha}\right)}{\tau-t}d\tau.$$

Теперь обратимся к определению неизвестных постоянных a, k_0 и γ_*. Для этого сравним поведения функции $\Phi(z)$ на бесконечности по формулам (6) и (8). По формуле (6) при $|z|\to\infty$, используя условия (5), будем иметь:

$$\Phi(z) = -\frac{P_0}{2\pi i z} - \frac{k'_0 P_0}{2\pi i z^2} + O\left(z^{-3}\right),$$

а по формуле (8)

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\left(1-\frac{c_1}{z}-\frac{a^2-c_1^2+2c_2}{2z^2}+\left(\frac{a^2c_1}{2}-\frac{c_1^3}{6}+c_1c_2-c_3\right)\frac{1}{z^3}+O\left(z^{-4}\right)\right)\times$$
$$\times\int_{-a}^{a}\left[1+\frac{\tau}{z}+\frac{\tau^2}{z^2}+....\right]\frac{g_*(\tau)d\tau}{X_0^+(\tau)},$$

где

$$c_j = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}t^{j-1}\operatorname{arctg}\left[f_*(t)/\alpha\right]dt \quad (j=1,2,..)$$

Сравнивая эти два представления, для определения указанных постоянных, получим систему уравнений:

$$\int_{-a}^{a}\frac{g_*(\tau)d\tau}{X_0^+(\tau)} = 0; \quad \int_{-a}^{a}\frac{\tau g_*(\tau)d\tau}{X_0^+(\tau)} = P_0; \quad \int_{-a}^{a}\frac{\tau^2 g_*(\tau)d\tau}{X_0^+(\tau)} = k'_0P_0 + c_1P_0 \tag{11}$$

Подставляя значения функций $X_0^+(t)$ и $g_*(t)$ в систему (11) придем к следующей системе трансцендентных уравнений:

$$\int_{-a}^{a} \frac{\left[q_{1*}'(\tau)+\gamma_*\right]e^{-\psi(\tau)}\,d\tau}{\sqrt{\alpha^2+f_*^2(\tau)}\sqrt{a^2-\tau^2}}=0;$$

$$\int_{-a}^{a} \frac{\tau\left[q_{1*}'(\tau)+\gamma_*\right]e^{-\psi(\tau)}\,d\tau}{\sqrt{\alpha^2+f_*^2(\tau)}\sqrt{a^2-\tau^2}}=P_0; \tag{12}$$

$$\int_{-a}^{a} \frac{\tau^2\left[q_{1*}'(\tau)+\gamma_*\right]e^{-\psi(\tau)}\,d\tau}{\sqrt{\alpha^2+f_*^2(\tau)}\sqrt{a^2-\tau^2}}=\left(k_0'+c_1\right)P_0.$$

Отметим, что в случаях, когда функция $q'(z)$ многочлен порядка m как представление контактного давления, так и систему уравнений (11) или (12) можно упростить, так как в этом случае удается вычислить интегралы, входящие в эти формулы. Действительно, рассмотрим интеграл

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}\frac{\left[q_{1*}'(t)+\gamma_*\right]dt}{\mathrm{X}_0(t)(t-z)},$$

где контур Λ содержит интервал $(-a,a)$. Пусть при больших значениях $|t|$ имеет место соотношение:

$$\frac{q_{1*}'(t)+\gamma_*}{\mathrm{X}_0(t)}=Q_{m-1}(z)+\frac{a_{-1}}{t}+\frac{a_{-2}}{t^2}+\frac{a_{-3}}{t^3}+O\left(t^{-3}\right)$$
$$\left(Q_{m-1}(x)=a_{m-1}t^{m-1}+..+a_1t+a_0\right). \tag{13}$$

Тогда, так как функция $X_0(z)$ аналитическая вне Λ, то справедливо соотношение [3]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}\frac{\left[q_{1*}'(\xi)+\gamma_*\right]d\xi}{X_0(\xi)(\xi-z)}=\frac{q_{1*}'(z)+\gamma_*}{X_0(z)}-Q_{m-1}(z).$$

Далее, стягивая в этой формуле Λ к разрезу $(-a;a)$ и учитывая, что функция $\mathrm{X}_0(z)$ является решением однородной задачи Римана, а также используя равенство

$$q_{1*}'(t)\left[1-G(t)\right]=\frac{2i\alpha q_{1*}'(t)}{f\,t/a+i\alpha}=-2i\alpha g_*(t),$$

найдем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{g_*(\xi)\,d\xi}{X_0^+(\xi)(\xi-z)}=-\frac{1}{2i\alpha}\left[\frac{q_1'(z)+\gamma_*}{X_0(z)}-Q_{m-1}(z)\right].$$

Откуда, по формулам Племеля-Сохоцкого, получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{g_*(\xi)\,d\xi}{X_0^+(\xi)(\xi-t)}=\frac{f_*(t)\,g_*(t)}{2i\alpha X_0^+(t)}+\frac{Q_{m-1}(t)}{2i\alpha}\quad(-a<t<a).$$

Подставляя полученное значение интегрального члена в (9), после некоторых выкладок, для контактного давления получим следующую простую формулу:

$$P_*(t)=\frac{Q_{m-1}(t)\,e^{\psi_1(t)}\omega(t)}{\sqrt{\alpha^2+(f\,t/a)^2}}. \qquad (14)$$

Теперь упростим систему (11). С этой целью вычислим интегралы, входящие в эту систему. С учетом того, что из (13) будем иметь

$$\frac{t^j\left[q'_{1*}(t)+\gamma_*\right]}{\mathrm{X}_0(t)}=t^jQ_{m-1}(z)+a_{-1}t^{j-1}+a_{-2}t^{j-2}+a_{-3}t^{j-3}+O\left(t^{j-3}\right);\ (j=1,2,3),$$

как и выше, получим

$$\int_{-a}^{a}\frac{\xi^j g_*(\xi)\,d\xi}{X_0^+(\xi)(\xi-t)}=-\frac{\pi f_*(t)\,t^j g_*(t)}{\alpha X_0^+(t)}+\frac{\pi t^j}{\alpha}\left\{Q_{m-1}(t)+\sum_{k=1}^{j}\frac{a_{-k}}{t^k}\right\}\quad(j=1,2,3).$$

Отсюда, принимая $t=0$, найдем:

$$\int_{-a}^{a}\frac{\xi^{j-1}g_*(\xi)\,d\xi}{X_0^+(\xi)}=\frac{\pi a_{-j}}{\alpha}\quad(j=1,2,3)$$

Подставляя полученные значения интегралов в (11), придем к системе уравнений:

$$\begin{cases}a_{-1}=0;\\ a_{-2}=\alpha P_0/\pi\\ a_{-3}=\alpha P_0\left(k'_0+c_1\right)/\pi\end{cases} \qquad (15)$$

2. Некоторые частные случаи

В качестве первого примера рассмотрим случай, когда основание штампа описывается функцией $q(x)=Bx^2$. В указанном случае будем иметь:

$$q'_{1*}=2B(t+k_0);\ Q_{m-1}(t)=Q_0(t)=2AB;\ B_0=2k_0+\frac{\gamma}{B};\ A=\frac{4\mu}{æ-1};$$

$$a_{-1}=AB(B_0+2c_1);\ a_{-2}=AB\left(a^2+c_1(B_0+c_1)+2c_2\right);$$

$$a_{-3}=AB\left(3a^2(B_0+2c_1)+3B_0\left(c_1^2+2c_2\right)+2\left(c_1^3+6c_1c_2+6c_3\right)\right)/6$$

и, следовательно, система (15) примет вид:

$$\begin{cases} B_0 + 2c_1 = 0 \\ \left(a^2 + c_1\left(B_0 + c_1\right) + 2c_2\right) = \alpha P_0 / AB\pi \\ \left(3a^2\left(B_0 + 2c_1\right) + 3B_0\left(c_1^2 + 2c_2\right) + 2\left(c_1^3 + 6c_1c_2 + 6c_3\right)\right) = 6\alpha P_0\left(k_0' + c_1\right) / AB\pi \end{cases}$$

которая, после некоторых упрощений, запишется следующим образом:

$$\begin{cases} 2k_0 + \gamma / B = -2c_1 \\ \left(a^2 - c_1^2 + 2c_2\right) = \alpha P_0 / AB\pi \\ 3c_3 - c_1^3 = 3\alpha P_0\left(k_0' + c_1\right) / 2\pi AB \end{cases} \tag{16}$$

Численный анализ показывает, что система трансцендентных уравнений (16) имеет решение только в случае, когда точка x_0 совпадает со срединой точкой контактной зоны k_0, т.е. когда $k_0' = 0$, и следовательно, $c_1 = c_3 = 0,\ f_*(x) = fx / a$. Тогда система (16) упрощается и после некоторых преобразовании ее можно написать в следующем виде:

$$\begin{cases} 2Bk_0 + \gamma = 0 \\ a^2\left(1 + 2c_2^*\right) = \alpha P_0 / AB\pi \\ x_0 - k_0 = 0; \end{cases}$$

$$c_2^* = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \xi \operatorname{arctg}\left[f\xi / \alpha\right] d\xi = \frac{1}{\pi}\left[\left(1 + \alpha^2 / f^2\right)\operatorname{arctg}\left(f / \alpha\right) - \alpha / f\right].$$

Откуда найдем:

$$k_0 = x_0 = M_0 / P_0; \quad \gamma / B = -2x_0 = -2M_0 / P_0;$$

$$a = \sqrt{\frac{\alpha P_0}{AB\pi\left(1 + 2c_2^*\right)}} = \sqrt{\frac{2\left(1 - \nu^2\right)P_0}{\pi BE\left(1 + 2c_2^*\right)}},$$

где E - модуль упругости материала полуплоскости.

При этом нормальное давление будет даваться формулой:

$$P\left(x\right) = \frac{2ABe^{\psi_1\left(x - k_0\right)}\omega\left(x - k_0\right)}{\sqrt{\alpha^2 + \left(f\left(x - k_0\right) / a\right)^2}} = \frac{2\alpha P_0 e^{\psi_1\left(x - k_0\right)}\omega\left(x - k_0\right)}{a^2\left(1 + 2c_2^*\right)\pi\sqrt{\alpha^2 + \left(f\left(x - k_0\right) / a\right)^2}}. \tag{17}$$

В случае же гладкого контакта, когда $f = 0$, значения величин k_0, x_0 и γ те же самые, что и наверху, $c_j = 0\ \left(j = 1, 2, ..\right)$, а для безразмерной величины $a_* = Ba$ получим формулу:

$$a_* = \sqrt{\frac{\alpha B P_0}{\pi A}} = \sqrt{\frac{2\left(1-\nu^2\right)P_0^{(1)}}{\pi}} \quad \left(P_0^{(1)} = \frac{BP_0}{E}\right).$$

Нормальное давление под штампа в рассматриваемом случае примет вид:

$$P(x) = \frac{2AB}{\alpha}\omega\left(x-k_0\right) = \frac{2P_0}{\pi a^2}\sqrt{(x-b)(c-x)}.$$

Если же на штамп действует только вдавливающая нормальная нагрузка P_0, т.е. $M_0 = 0$, то будем иметь $k_0 = x_0 = \gamma = 0$, $b = -a, c = a$ и следовательно

$$P(x) = \frac{2P_0}{\pi a^2}\sqrt{a^2 - x^2} \ .$$

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда основание штампа имеет несимметричную форму. Для этого в соотношениях (4) и (5) перейдем к безразмерной координате, разделив исходную координату на единицу измерения длины. При этом все обозначения сохраняются с той лишь разницей, что P_0 в этом случае будет иметь размерность силы, деленной на квадрат единицы длины. Пусть основание штампа дается функцией $q(x) = Ax^2\left(x^2 + x + 1\right)$. При этом, для простоты сразу будем рассматривать случай, когда момент действующий на штамп такой, что точка x_0 совпадает со срединой точкой контактной зоны k_0, т.е. когда $M_0 = k_0 P_0$. В этом случае $q_1'(x) = A_1 x\left(4x^2 + 3x + 2\right)$, где $A_1 = 4\mu A / (æ - 1)$. Тогда функция $q_{1*}'(t)$ будет даваться формулой $q_{1*}'(t) = A_1\left(t + k_0\right)\left(4\left(t + k_0\right)^2 + 3\left(t + k_0\right) + 2\right)$. Так как в рассматриваемом случае функция $q_{1*}'(t)$ голоморфная и на бесконечности имеет полюс третьего порядка, то интегралы, входящие в условия (11), можно вычислить. Действительно, легко установить, что при $|t| \to \infty$ справедливы соотношения:

$$\frac{\left[q_{1*}'(t) + \gamma_*\right]}{\mathrm{X}_0(t)} = A_1\left[Q_2(t) + \frac{a_{-1}}{t} + \frac{a_{-2}}{t^2} + \frac{a_{-3}}{t^3} + O\left(t^{-4}\right)\right] \quad ,$$

где

$$\begin{aligned}
&Q_2(t) = Q_{m-1}(t) = \left(4t^2 + a_2 t + a_1 + 4c_2 + 2a^2\right); a_0 = \left(4k_0^3 + 3k_0^2 + 2k_0 + \gamma\right); \\
&a_1 = \left(12k_0^2 + 6k_0 + 2\right);\ a_2 = \left(12k_0 + 3\right);\ a_{-1} = \left[a_0 + a_2\left(c_2 + \mathrm{a}^2/2\right)\right]; \\
&a_{-2} = \left(2c_2^2 + 2c_2 a^2 + a_1 c_2 + 3a^4/2 + a_1 a^2/2 + 4c_4\right); \\
&a_{-3} = \left(3a^4 a_2 + 8a_0 c_2 + 4a^2\left(a_0 + a_2 c_2\right) + 4a_2\left(c_2^2 + 2c_4\right)\right)/8.
\end{aligned} \qquad (19)$$

Тогда, при помощи соотношений (19) удовлетворив условиям (15), для определения величин a, k_0 и γ придем к системе уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_2\left(c_2^* + 1/2\right)a^2 = 0; \\ D_0 a^4 + a_1\left(c_2^* + 1/2\right)a^2 = P_0^* \\ a_2 D_0 a^4 + 4a_0\left(c_2^* + 1/2\right)a^2 = 0, \end{cases} \tag{20}$$

где введены обозначения

$$c_j = a^j c_j^*;\quad c_4^* = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \xi^3 \operatorname{arctg}\frac{f\xi}{\alpha}d\xi = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha^4}{f^4}\right)\operatorname{arctg}\frac{f}{\alpha} + \frac{\alpha^3}{2f^3} - \frac{\alpha}{6f}\right];$$

$$P_0^* = \frac{\alpha P_0}{\pi A_1} = \frac{2\left(1-\nu^2\right)P_0^{(2)}}{\pi};\quad P_0^{(2)} = \frac{P_0}{AE};\quad D_0 = 3/2 + 2\left(c_2^*\right)^2 + 4c_4^* + 2c_2^*.$$

а c_2^*-имеет то же самое значение, что и выше.

Из первого и последнего уравнений системы (20) удалив a_0 получим:

$$a_2 a^4\left(1/2 + 4c_4^* - 2c_2^* - 4\left(c_2^*\right)^2\right) = 0\,. \tag{21}$$

Отсюда, учитывая, что второе и третье множители в (21) не равны нулю, найдем $a_2 = 0$ или $k_0 = -0.25$. Тогда из первого уравнения (20) для угла поворота штампа получим значение $\gamma = -4k_0^3 - 3k_0^2 - 2k_0 = 3/8$. При этом для определения полудлины контактной зоны a из второго уравнения (20) получим следующее биквадратное уравнение:

$$D_0 a^4 + \frac{5}{4}\left(c_2^* + 1/2\right)a^2 - P_0^* = 0\,,$$

положительное решение которого дается формулой:

$$a = \sqrt{\frac{-5\left(c_2^* + 1/2\right) + \sqrt{25\left(c_2^* + 1/2\right)^2 + 64 D_0 P_0^*}}{8D_0}}\,. \tag{22}$$

Отметим, что в случае гладкого контакта полудлина контактной зоны будет даваться формулой:

$$a = \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{25 + 384 P_0^*}}{24}}$$

Для приведенного нормального контактного давления по формуле (14), учитывая второе соотношение (20) и переходя к первоначальным переменным, получим

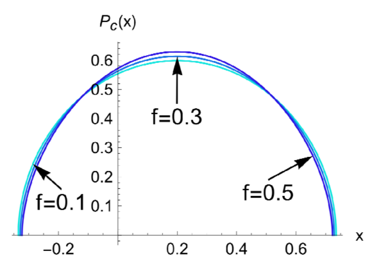
$$P(x)=\frac{A_1 Q_2\left(x-k_0\right) e^{\psi_1\left(x-k_0\right)} \omega\left(x-k_0\right)}{\sqrt{\alpha^2+\left(f\left(x-k_0\right)/a\right)^2}}=$$

$$=\frac{\alpha P_0\left(4\left(x-k_0\right)^2+a_1+4a^2c_1^*+2a^2\right) e^{\psi_1\left(x-k_0\right)}\left(x-b\right)^{1/2-\beta\left(x-k_0\right)}\left(c-x\right)^{1/2+\beta\left(x-k_0\right)}}{\pi a^2\left[D_0 a^2+a_1\left(c_2^*+1/2\right)\right]\sqrt{\alpha^2+\left(f\left(x-k_0\right)/a\right)^2}}.$$

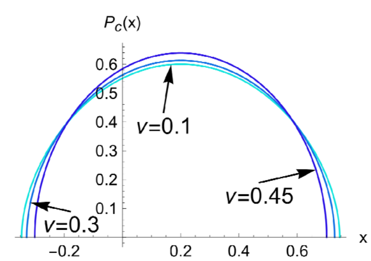
Численные расчеты

Проведены численные расчеты как для параболического штампа, так и для штампа несимметричной формы.

В случае параболического штампа изучены изменения безразмерного контактного давления $P_c\left(x\right)=P\left(x\right)/BE$ для различных значений коэффициента трения, когда $\nu=0.3$, $P_0^{(1)}=0.5$ и для различных значений коэффициента Пуассона, когда $f=0.3$, $P_0^{(1)}=0.5$.



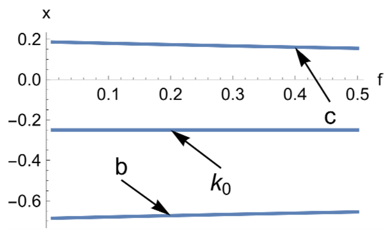
Фиг.2a Распределение контактного давления $P_c\left(x\right)$ при различных f.



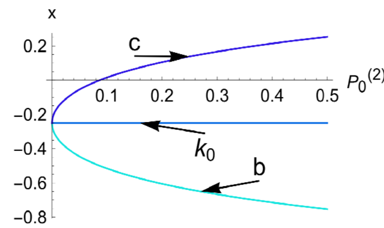
Фиг.2b Распределение контактного давления $P_c\left(x\right)$ при различных ν.

Полученные численные результаты приведены на фиг.2. Из них видно, что как полудлина контактной зоны, так и нормальное контактное давление мало зависят от коэффициента трения. При увеличении же коэффициента Пуассона полудлина контактной зоны уменьшается, а контактное давление в средней части контактной зоны увеличивается.

В случае же несимметричной, выше приведенной, формы штампа выяснены закономерности изменения координат конечных точек контактной зоны и контактных напряжений в зависимости от коэффициента трения f и значения параметра $P_0^{(2)}$, соответственно в случаях когда $P_0^{(2)}=0,5,\ \nu=0.3$ и $f=0.3, \nu=0,3$. Полученные численные результаты приведены на Фиг.3. Они показывают, что при постоянном значении $P_0^{(2)}$ и ν, координаты конечных точек



Фиг.3a Изменение координаты конечных и средней точек контактной зоны b,c и k_0 в зависимости от f

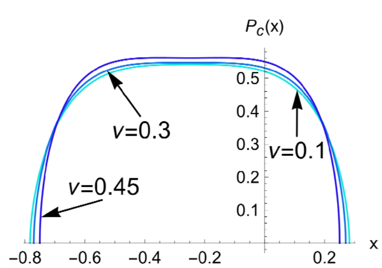


Фиг.3b Изменение координаты конечных и средней точек контактной зоны b,c и k_0 в зависимости от $P_0^{(2)}$

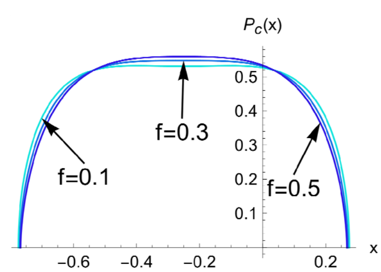
контактной зоны при возрастания f по абсолютной величине уменьшаются, т.е. уменьшается длина контактной зоны (Фиг.3a)

При увеличении же параметра $P_0^{(2)}$, как и следовало ожидать, размеры контактной зоны также увеличиваются (Фиг.3b).

На Фиг.4 приведены графики безразмерного контактного давления $P_c(x) = P(x)/AE$ в зависимости от коэффициентов Пуассона и трения соответственно в случаях, когда $P_0^{(2)} = 0.5,\ f = 0.3$ и $P_0^{(2)} = 0.5,\ \nu = 0.3$.

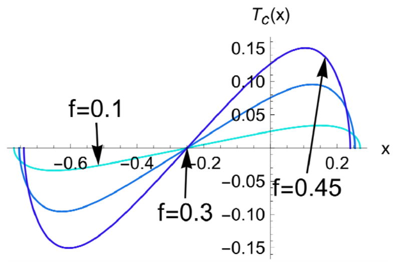


Фиг.4a Распределение контактного давления $P_c(x)$ при различных ν.

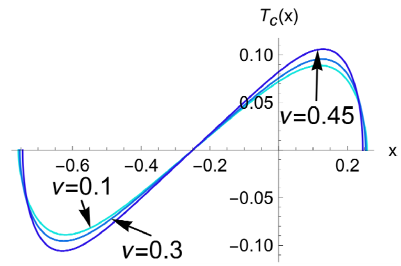


Фиг.4b Распределение контактного давления $P_c(x)$ при различных f.

Из приведенных графиков явствует, что при увеличении как коэффициента Пуассона, так и коэффициента трения зона контакта уменьшается, а контактное давление увеличивается, не нарушая равновесие штампа.



Фиг. 5a Распределение касательных контактных напряжений $T_c\left(x\right)$ при разных значениях f.



Фиг. 5b Распределение касательных контактных напряжений $T_c\left(x\right)$ при разных значениях ν.

На фиг. 5 приведены графики безразмерных касательных напряжений $T_c\left(x\right)=\tau\left(x\right)/E$ в зависимости от коэффициента трения в случае, когда $P_0^{(2)}=0.5,\ \nu=0.3$, и от коэффициента Пуассона, когда $P_0^{(2)}=0.5,\ f=0.3$. Они показывают, что при увеличении коэффициента трения касательные напряжения увеличиваются, а изменение коэффициента Пуассона мало влияет на касательные напряжения.

Заключение

Таким образом, методом сингулярных интегральных уравнений построено замкнутое решение задачи о контактном взаимодействии абсолютно жесткого штампа произвольной формы с упругой полуплоскостью с заранее неизвестной зоной контакта при наличии трения покоя. В общем случае получены формулы для контактных напряжений и уравнения для определения размеров контактной зоны и угла поворота штампа. Показано, что в случае, когда форма основания штампа дается полиномиальной функцией, то формулы, полученные для контактных напряжений, можно упростить и записать в простой форме. Рассмотрены два частных случая задачи, когда основание штампа имеет форму параболы и когда оно имеет несимметричную форму. Для указанных частных случаев проведены численные расчеты и определены закономерности изменения полудлины контактной зоны и контактных напряжений в зависимости от коэффициентов трения и Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.- М.:Наука, 1980.- 304с.
2. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. - М.-Л.: Гостехтеориздат, 1947 - 270с.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.-М.: Наука, 1966.-708с.
4. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно деформируемого основания. Киев-Одесса, «Вища Школа», 1982, 168 ст.

5. Острик В.И., Улитко А.Ф. Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. Киев, Наукова Думка, 2006, 328с.
6. Hakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies. Advanced Structured Materials, Volume 181, Springer 2022, 397p.
7. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Об одной модели трения применительно к контактным задачам теории упругости. // Известия НАН РА, Механика, т.76, № 2, 2023г, с. 20-31.
8. Hakobyan V.N., Dashtoyan L.L., Amirjanyan H.A. On an indentation of a circular cylindrical punch into an elastic half-space under friction// Z Angew Math Mech., Volume104, Issue 5, May 2024, https://doi.org/10.1002/zamm.202300743
9. Hakobyan V.N. , Dashtoyan L.L., and Hakobyan L.V. On two contact problems for a half-plane with static friction // 2024 J. Phys.: Conf. Ser., vol. 2817, 012004, DOI 10.1088/1742-6596/2817/1/012004.
10. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Grigoryan A.M. On the contact of an absolutely rigid stamp with a half-plane taking into account static friction // 2024 J. Phys.: Conf. Ser., vol. 2817, 012004, DOI 10.1088/1742-6596/2817/1/012005.
11. Гахов Ф.Д. Краевые задачи.- М.: Наука, 1977.- 640с.

Сведения об авторах:
Акопян Ваграм – д.ф.-м.н., проф., гл. науч. сотр., vhakobyan@sci.am
Амирджанян Арутюн – к.ф.-м.н., вед. науч. сотр., amirjanyan@gmail.com
Григорян Арам – к.ф.-м.н., науч. сотр., grigoryan.aram4@gmail.com

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 13.12.2024