

**ОПТИМАЛЬНОЕ ПО ЭНЕРГОЗАТРАТАМ УПРАВЛЕНИЕ
ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМ МАНИПУЛЯТОРОМ**

Аветисян В.В.

Ключевые слова: электромеханическая система, оптимальное управление, минимальные энергозатраты

Optimal Control of an Electromechanical Manipulator with Minimal Energy Consumption
Avetisyan V.V.

Key words: electromechanical system, optimal control, minimal energy consumption

For the system modeling the dynamics of a single-link electromechanical manipulator, the problem of constructing a control voltage law is considered. The law is optimal with respect to a functional that accounts for the energy consumption of the motor during the manipulator's transport movement. It is assumed that the control voltage is constrained in magnitude. Using the maximum principle method, optimal controls are found, which ensure the movement of the system from a given initial rest state to an arbitrary terminal rest state in a specified time, while minimizing the given quality functional. On the plane of final times and terminal positions, regions are constructed, such that depending on which region a point belongs to, the system moves from the initial rest state to the terminal state under the derived optimal controls with one or two switching moments or without switching moments. Numerical simulation results of the manipulator's movement under a control regime with two switching moments are presented.

**Էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի օպտիմալ ղեկավարումն ըստ նվազագույն
էներգաձախսերի
Ավետիսյան Վ.Վ.**

Հիմնաբառեր: էլեկտրամեխանիկական համակարգ, օպտիմալ ղեկավարում, նվազագույն էներգաձախսեր

Մեկ օղակով էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի դինամիկան նկարագրող համակարգի համար դիտարկվում է օպտիմալ ղեկավարող լարման ֆունկցիայի կառուցման խնդիրը: Որպես օպտիմալության ցուցանիշ դիտարկվում է ֆունկցիոնալ, որը հաշվի է առնում մանիպուլյատորի տրանսպորտային տեղափոխման ժամանակ էլեկտրաշարժիչի էներգաձախսերը: Ենթադրվում է, որ ղեկավարող լարումը մոդուլով սահմանափակ է: Մաքսիմումի սկզբունքի մեթոդով գտնվել են այն օպտիմալ ղեկավարումները, որոնք ապահովում են համակարգի տեղափոխումը տրված սկզբնական հանգստի վիճակից կամայական վերջնական հանգստի վիճակ տրված ժամանակում՝ դիտարկվող որակի ֆունկցիոնալի մինիմալացմամբ: Վերջնական ժամանակների և դիրքերի հարթության մեջ կառուցվել են տիրույթներ, որոնց յուրաքանչյուր կետ, կախված նրանից թե որ տիրույթին է այն պատկանում, համակարգի տեղափոխումը տրված սկզբնական հանգստի վիճակից տեղի է ունենում կառուցված օպտիմալ ղեկավարումներով՝ մեկ կամ երկու փոխարկման պահերով կամ առանց փոխարկման: Բերված են մանիպուլյատորի շարժման թվային մոդելավորման արդյունքները երկու փոխարկման պահերով օպտիմալ ղեկավարման դեպքում:

Для системы, моделирующей динамику однозвенного электромеханического манипулятора, рассматривается задача построения закона изменения управляющего напряжения, оптимальное по отношению к функционалу, который учитывает энергозатраты электродвигателя за время выполнения манипулятором транспортного перемещения. Предполагается, что управляющее напряжение ограничено по модулю. Методом принципа максимума найдены оптимальные управления, которые обеспечивают перемещение системы из заданного начального состояния покоя в произвольное терминальное состояние покоя за заданное время с минимизацией рассматриваемого функционала качества. На плоскости конечных времен и терминальных положений построены области, в любую точку которых, в зависимости от ее принадлежности той или иной области, перемещение системы из начального состояния покоя происходит при построенных оптимальных управлениях с одним или двумя моментами переключения или без моментов переключения. Приводятся результаты численного моделирования движения манипулятора при режиме управления с двумя моментами переключения.

Введение. Важными эксплуатационными показателями манипуляционных роботов являются время выполнения транспортной операции, потребляемая энергия и точность позиционирования. Эти показатели зависят как от конструктивных характеристик робота, так и от используемых режимов управления. Одним из подходов к рациональному расчету режимов управления является их оптимизация по отношению к одному из перечисленных показателей - критерию функционирования. В ряде случаев целесообразно в качестве оптимизируемого критерия рассматривать функционал, который учитывает энергозатраты двигателя при выполнении манипулятором требуемой транспортной операции. В данной работе рассматривается электромеханическая система второго порядка, которая приближенно описывает динамику отдельного звена руки многозвенного манипулятора, если каждое звено управляется напряжением, подаваемым электродвигателем независимого привода, а динамическое взаимовлияние различных степеней свободы достаточно мало [1]. Для такой модели в [2,3] изучены задачи построения оптимального управляющего напряжения, обеспечивающего перемещение системы из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние покоя с минимизацией энергозатрат в двигателе, но без учета ограничения на напряжение. На основе методики, разработанной в [4], в [5-7] в классе непрерывных функций построены управляющие напряжения, при которых вышеуказанный переход системы происходит за конечное время без нарушения заданного ограничения на напряжение. По виду эти управления совпадают с оптимальным управлением, полученным в [2,3], и реализуются при достаточно большом интервале времени процесса управления. В [8,9] использован метод параметрической оптимизации для построения субоптимального и не ограниченного управления двузвенным манипулятором с учетом типа начальной и конечной конфигураций манипулятора [8], а в [9] - для построения закона движения и нахождения параметров однозвенного манипулятора, выполняющего циклическую транспортную операцию. В качестве критерия оптимальности взят квадратичный по управлению функционал, характеризующий, при определенных предположениях, энергозатраты системы при выполнении транспортной операции. Различным задачам минимизации энергозатрат при выполнении электромеханическим манипулятором

транспортных и поисковых операций посвящены работы [10-12] и [13-15] соответственно.

В данной работе для модели однозвенного электромеханического манипулятора [1] рассматривается задача построения закона изменения управляющего напряжения, при котором схват манипулятора из заданного начального состояния покоя перемещается в произвольное конечное состояние покоя и функционал, учитывающий тепловые потери в двигателе (энергозатраты) за время выполнения заданного транспортного перемещения, принимает минимальное возможное значение. Предполагается, что управляющее напряжение ограничено по модулю. Наличие ограничения на управление составляет основное отличие рассматриваемой задачи от задач, рассмотренных в [2-12]. Используя методику принципа максимума, в классе кусочно-непрерывных функций построены оптимальные режимы управления с одним или двумя моментами переключений, а также управление без переключений. На плоскости конечных времен и положений системы построены области, в любую точку которых перемещение управляемой системы из начального состояния покоя происходит при соответствующем оптимальном режиме управления.

1. Расчетная модель электромеханической системы и постановка задачи.

Рассмотрим простую модель электромеханического манипулятора, состоящую из электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением, редуктора и руки с грузом (закрепленным в его схвате), вращающейся в горизонтальной плоскости. Такую систему можно трактовать как модель простейшего манипулятора с одной степенью свободы. Движение описанной электромеханической системы определяется уравнениями [1]

$$(I + Jn^2)\ddot{\varphi} = n\mu, \quad (1.1)$$

$$Ri + kn\dot{\varphi} = u, \quad (1.2)$$

$$\mu = ki. \quad (1.3)$$

Здесь φ – угол поворота руки относительно неподвижной оси; I – момент инерции руки (вместе с ведомой шестерней редуктора) относительно оси ее вращения; J – момент инерции якоря электродвигателя (вместе с ведущей шестерней редуктора) относительно оси его вращения; μ – момент (относительно оси вращения якоря) электромагнитных сил, создаваемый двигателем; n – передаточное число редуктора; R – электрическое сопротивление обмотки якоря двигателя; i – ток в цепи якоря; k – постоянная (параметр электродвигателя); u – управляющее электрическое напряжение, подаваемое на вход двигателя.

Уравнение (1.1) описывает динамику механической части системы, уравнение (1.2) описывает баланс электрических напряжений в цепи якоря, а соотношение (1.3) отражает пропорциональность крутящего момента двигателя и тока в цепи его якоря. Уравнение (1.2) справедливо в предположении, что электромагнитная постоянная времени системы много меньше как длительности рабочей операции робота, так и времени выхода электродвигателя на стационарный режим вращения (при постоянном напряжении). В противном случае в левую часть уравнения (1.2) следовало бы добавить слагаемое $L(di/dt)$, где L – индуктивность обмотки якоря. Для большинства промышленных электромеханических роботов отмеченное выше предположение выполняется [1,2].

Исключив переменные μ и i из совокупности уравнений (1.1) - (1.3), движение манипулятора можно описать одним дифференциальным уравнением

$$R(I + Jn^2)\ddot{\phi} + k^2 n^2 \dot{\phi} = knu. \quad (1.4)$$

Рассмотрим задачу оптимального управления системой (1.1) - (1.3) или, что то же, (1.4).

Задача. Найти программный закон изменения управляющего напряжения $u(t)$, обеспечивающий приведение манипулятора (1.4) из заданного начального состояния покоя

$$\phi(0) = \phi^0, \quad \dot{\phi}(0) = 0 \quad (1.5)$$

в произвольное терминальное состояние покоя в конечный момент времени T

$$\phi(T) = \phi^T, \quad \dot{\phi}(T) = 0 \quad (1.6)$$

и минимизирующий функционал

$$Q = R^{-1} \int_0^T (u - k\dot{\phi})^2 dt, \quad (1.7)$$

при условии, что управляющее напряжение по модулю ограничено заданной постоянной U :

$$|u| \leq U. \quad (1.8)$$

Время окончания процесса T задается в ходе решения задачи.

Поясним функционал (1.7). Известно, что количество «джоулева» тепла q , выделяющееся в проводнике в единицу времени, равно $q = i^2 R$, где i - сила тока, R - омическое сопротивление проводника. Выразив i через $u, k, n\dot{\phi}$ из уравнения (1.2), получим следующее выражение для количества тепла, выделяющегося в обмотке ротора электродвигателя: $q = R^{-1} (u - k\dot{\phi})^2$. Интеграл этой функции по времени процесса дает полное выделение тепла в обмотке электродвигателя. Таким образом, приходим к функционалу (1.7), который характеризует энергозатраты (тепловые потери) в электродвигателе.

В (1.4) - (1.8) перейдем к безразмерным единицам (с последующим опусканием штрихов) и обозначениям

$$t' = t/\bar{T}, \quad u' = u/U, \quad k' = kn/(U\bar{T}), \quad R' = RA/(knU\bar{T}^2), \quad (1.9)$$

$$Q' = \bar{T}^2 A^{-1} Q, \quad A = I + Jn^2,$$

где \bar{T} - принятое за единицу измерения характерное время рабочей операции робота, которое будет конкретизировано ниже.

Тогда уравнение (1.4), функционал (1.7) и ограничение (1.8) принимают соответственно вид

$$R\ddot{\phi} + k\dot{\phi} = u, \quad (1.10)$$

$$|u| \leq 1, \quad (1.11)$$

$$Q = (kR)^{-1} \int_0^T (u - k\dot{\varphi})^2 dt. \quad (1.12)$$

После перехода к новым переменным

$$\varphi_1 = \varphi - \varphi_1^0, \quad \varphi_2 = \dot{\varphi}, \quad S = QkR \quad (1.13)$$

Систему (1.10) - (1.12) и краевые условия (1.5), (1.6) можно записать в таком виде

$$\dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = uR^{-1} - kR^{-1}\varphi_2, \quad (1.14)$$

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad (1.15)$$

$$\varphi_1(T) = \varphi_1^T, \quad \varphi_2(T) = 0, \quad (1.16)$$

$$|u| \leq 1, \quad (1.17)$$

$$S = \int_0^T (u - k\dot{\varphi})^2 dt. \quad (1.18)$$

Таким образом, сформулированная выше задача переходит к равносильной задаче (1.14) - (1.18).

Не ограничивая общности, будем полагать, что в (1.16) $\varphi_1^T > 0$.

2. Нахождение оптимальных режимов управления. Для решения задачи (1.14)–(1.18) будем использовать принцип максимума [16]. Гамильтониан системы (1.14)–(1.18) имеет вид

$$H = -(u - k\varphi_2)^2 + p_1\varphi_2 + p_2(uR^{-1} - kR^{-1}\varphi_2), \quad (2.1)$$

где p_1, p_2 – сопряженные переменные, определяемые из сопряженных уравнений

$$\dot{p}_1 = -\partial H / \partial \varphi_1 = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.2)$$

$$\dot{p}_2 = -\partial H / \partial \varphi_2 = -2ku + 2k^2\varphi_2 - p_1 + kR^{-1}p_2, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Максимизация функции H по управлению u при ограничении (1.17) приводит к решению следующей экстремальной задачи:

$$\bar{H} = -u^2 + 2k\varphi_2u + p_2R^{-1}u \rightarrow \max_{-1 \leq u \leq 1}. \quad (2.3)$$

Максимум в (2.3) без учета ограничения (1.17) определяется из условия $d\bar{H} / du = 0$ и достигается в точке

$$u^*(t) = k\varphi_2(t) + p_2(t)(2R)^{-1}. \quad (2.4)$$

С учетом этого оптимальное управление, доставляющее максимум в (2.3), определяется следующим образом:

$$u^{opt}(t) = \begin{cases} 1, & u^*(t) > 1, \\ u^*(t), & |u^*(t)| \leq 1, \\ -1, & u^*(t) < -1. \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.5)$$

Неизвестные переменные φ_2 и p_2 в (2.4) определяются после разрешения

краевой задачи принципа максимума при управлении (2.4)

$$\dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = R^{-1}u \Big|_{u=u^*} - kR^{-1}\varphi_2, \quad (2.6)$$

$$\dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = -2ku \Big|_{u=u^*} + 2k^2\varphi_2 - p_1 + kR^{-1}p_2 = -p_1. \quad (2.7)$$

Интегрируя (2.6), (2.7) и учитывая краевые условия (1.15), (1.16), получим

$$\varphi_1(t) = (-2T^{-3}t^3 + 3T^{-2}t^2)\varphi_1^T, \quad \varphi_2(t) = (-6T^{-3}t^2 + 6T^{-2}t)\varphi_1^T, \quad (2.8)$$

$$p_1(t) = 12R^2T^{-2}\varphi_1^T, \quad p_2(t) = -24T^{-3}R^2\varphi_1^T t + 12T^{-2}R^2\varphi_1^T. \quad (2.9)$$

Подставив в (2.4) выражения для φ_2 и p_2 из (2.8) и (2.9), найдем

$$\begin{aligned} u^*(t) &= k(-6kT^{-3}\varphi_1^T t^2 + 6T^{-2}\varphi_1^T t) - 12RT^{-1}\varphi_1^T t + 6RT^{-2}\varphi_1^T = \\ &= -6kT^{-3}\varphi_1^T t^2 + 6T^{-2}(k - 2RT)\varphi_1^T t + 6RT^{-2}\varphi_1^T. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что квадратичная функция $u^*(t)$ максимального значения по t достигает в точке $t_* = T/2 - k^{-1}R$:

$$u^*(t_*) = 1.5kT^{-1}\varphi_1^T + 6R^2k^{-1}T^{-3}\varphi_1^T. \quad (2.11)$$

При этом имеются следующие два случая.

А) Пусть $t_* = T/2 - k^{-1}R < 0$, т.е. $0 < T < 2k^{-1}R$.

Тогда функция $u^*(t)$ монотонно убывает на $[0, T]$, принимая на концах этого интервала максимальное $u^*(0) = 6T^{-2}R\varphi_1^T$ и минимальное значения $u^*(T) = -6T^{-2}R\varphi_1^T$. Следовательно,

$$\max_{t \in [0, T]} |u^*(t)| = 6T^{-2}R\varphi_1^T, \quad 0 < T < 2k^{-1}R. \quad (2.12)$$

1) Если в (2.12) $6T^{-2}R\varphi_1^T > 1$, то, в соответствии с (2.5) и учитывая (2.10), для любой точки $(T, \varphi_1^T) \in \Phi_1^{(1)}$,

$$\Phi_1^{(1)} = \{(T, \varphi_1^T) : 0 < T < 2k^{-1}R; T^2(6R)^{-1} < \varphi_1^T < \infty\} \quad (2.13)$$

оптимальное управление, выраженное через моменты переключения, принимает вид

$$u_1^{opt}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < t_1, \\ u^*(t), & t_1 \leq t \leq t_2, \\ -1, & t_2 < t \leq T. \end{cases} \quad (2.14)$$

В (2.14) моменты переключения t_1, t_2 - положительные корни уравнений $u^*(t) = 1$ и $u^*(t) = -1$ соответственно (здесь и в дальнейшем при нахождении моментов переключения, управление $u^*(t)$ задается формулой (2.10)), и имеют вид

$$\begin{aligned} t_1 &= T/2 - R/k + \sqrt{T^2/4 - T^3/(6k\varphi_1^T) + R^2/k^2}, \\ t_2 &= T/2 - R/k + \sqrt{T^2/4 + T^3/(6k\varphi_1^T) + R^2/k^2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

2) Если в (2.12) $6T^{-2}R\varphi_1^T \leq 1$, то для любой точки

$$(T, \varphi_1^T) \in \Phi_3^{(1)}, \quad \Phi_3^{(1)} = \{(T, \varphi_1^T): 0 < T < 2k^{-1}R; 0 < \varphi_1^T \leq T^2(6R)^{-1}\}, \quad (2.16)$$

в соответствии с (2.4), имеем

$$u_3^{opt}(t) = u^*(t), \quad (2.17)$$

где $u^*(t)$ определяется с помощью (2.10).

В) Пусть $0 \leq t_* = T/2 - k^{-1}R < \infty$, т.е. $2k^{-1}R \leq T < \infty$.

Тогда на интервале $[0, T]$ максимальное значение функции $u^*(t)$ равно $u^*(t_*) = 1.5kT^{-1}\varphi_1^T + 6k^{-1}R^2T^{-3}\varphi_1^T$, а минимальное - $u^*(T) = -6T^{-2}R\varphi_1^T$. При этом $u^*(t_*) = u^*(0) = |u^*(T)|$, когда $2k^{-1}R = T$ и $u^*(t_*) > u^*(0) = |u^*(T)|$, когда $2k^{-1}R < T < \infty$. В обоих случаях

$$\max_{t \in [0, T]} |u^*(t)| = u^*(t_*) = 1.5kT^{-1}\varphi_1^T + 6k^{-1}R^2T^{-3}\varphi_1^T, \quad 2k^{-1}R \leq T < \infty. \quad (2.18)$$

Здесь возможны следующие случаи.

1) Пусть $u^*(t_*) \geq u^*(0) = |u^*(T)| > 1$, т.е. удовлетворяется система неравенств

$$\begin{cases} 1.5kT^{-1}\varphi_1^T + 6k^{-1}R^2T^{-3}\varphi_1^T > 1, \\ 6T^{-2}R\varphi_1^T > 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varphi_1^T > 2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1}, \\ \varphi_1^T > T^2(6R)^{-1}. \end{cases} \quad (2.19)$$

Поскольку для правых частей второй системы (2.19) при всех T , $2k^{-1}R \leq T < \infty$ выполняется соотношение

$$T^2(6R)^{-1} \geq 2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1},$$

то для любой точки $(T, \varphi_1^T) \in \Phi_1^{(2)}$,

$$\Phi_1^{(2)} = \{(T, \varphi_1^T): 2k^{-1}R \leq T < \infty; T^2(6R)^{-1} < \varphi_1^T < \infty\} \quad (2.20)$$

оптимальное программное управление задается с помощью (2.14), (2.15).

2) Пусть $u^*(t_*) > 1$ и $u^*(0) = |u^*(T)| \leq 1$, т.е. точка экстремума функции (2.10), $t_* = T/2 - k^{-1}R > 0$. Указанные условия выполняются при соблюдении следующей системы неравенств

$$\begin{cases} 1.5kT^{-1}\varphi_1^T + 6k^{-1}R^2T^{-3}\varphi_1^T > 1, \\ 6T^{-2}R\varphi_1^T \leq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varphi_1^T > 2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1}, \\ \varphi_1^T \leq T^2(6R)^{-1}. \end{cases}$$

Тогда для любой точки $(T, \varphi_1^T) \in \Phi_2$,

$$\Phi_2 = \left\{ (T, \varphi_1^T) : \begin{array}{l} 2k^{-1}R < T < \infty, \\ 2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1} < \varphi_1^T \leq T^2(6R)^{-1} \end{array} \right\} \quad (2.21)$$

соответствующее оптимальное управление задается в виде

$$u_2^{opt}(t) = \begin{cases} u^*(t), & 0 \leq t < t_1, \\ 1, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ u^*(t), & t_2 < t \leq T. \end{cases} \quad (2.22)$$

Заметим, что если точка (T, φ_1^T) находится на границе области Φ_2 , т.е.

$$(T, \varphi_1^T) \in \{2k^{-1}R \leq T < \infty; \varphi_1^T = T^2(6R)^{-1}\} \subset \Phi_2,$$

то в (2.22) интервал $t_2 < t \leq T$ вырождается в точку: $t_2 = T$.

В (2.22) моменты переключения t_1, t_2 - корни уравнения $u^*(t) = 1$ и имеют вид

$$\begin{aligned} t_1 &= T/2 - R/k - \sqrt{T^2/4 - T^3/(6k\varphi_1^T) + R^2/k^2}, \\ t_2 &= T/2 - R/k + \sqrt{T^2/4 - T^3/(6k\varphi_1^T) + R^2/k^2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Так как $T/2 - R/k > 0$, то оба корня t_1, t_2 действительны и, следовательно, положительны для тех точек $(T, \varphi_1^T) \in \Phi_2$, для которых подкоренная функция $T^2/4 - T^3/(6k\varphi_1^T) + R^2/k^2 \geq 0$ или, что то же самое, выполняется неравенство $2kT^3 - 3k^2\varphi_1^T T^2 - 12\varphi_1^T R^2 \leq 0$, $2k^{-1}R < T < \infty$.

В соответствии с (2.24) решение кубического уравнения $aT^3 + bT^2 + d = 0$,

$$a = 2k > 0, \quad b = -3k^2\varphi_1^T, \quad d = -12R^2\varphi_1^T \quad (2.25)$$

находится с помощью формулы Кардано

$$T^{(2)} = \sqrt[3]{-(q/2) + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-(q/2) - \sqrt{D}} - b/(3a), \quad (2.26)$$

где

$$p = -b^2/(3a^2) = -3k^2(\varphi_1^T)^2/4,$$

$$q = 2b^3/(27a^3) + d/a = -k^3(\varphi_1^T)^3/4 - 6R^2\varphi_1^T/k,$$

$$b/(3a) = -k\varphi_1^T/2,$$

$$D = (p/3)^3 + (q/2)^2 = 3k^2R^2(\varphi_1^T)^4/4 + 9R^4(\varphi_1^T)^2/k^2 > 0.$$

Из (2.26) следует, что $T^{(2)}$ - единственный действительный положительный корень уравнения (2.25). Таким образом, неравенство (2.24) выполняется для тех точек $(T, \varphi_1^T) \in \Phi_2$, для которых $T \in (2k^{-1}R, T^{(2)})$. Этот интервал непустой, т.е.

$2k^{-1}R < T^{(2)}$. Действительно, из геометрии области Φ_2 следует, что любому значению φ_1^T , удовлетворяющему неравенству

$$2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1} < \varphi_1^T \leq T^2(6R)^{-1}, \quad (2.27)$$

соответствует любое T из интервала

$$A = [T^{(1)}, T^{(2)}], \quad (2.28)$$

где

$$T^{(1)} = \sqrt{6R\varphi_1^T} \quad (2.29)$$

- решение уравнения $T^2 = 6R\varphi_1^T$, а $T^{(2)}$ - решение кубического уравнения (2.25), определяемое формулой (2.26).

Поскольку в (2.27)

$$\lim_{T \rightarrow 2k^{-1}R} 2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1} = \lim_{T \rightarrow 2k^{-1}R} T^2(6R)^{-1} = 2k^{-2}R/3,$$

то при $T \rightarrow 2k^{-1}R$ отрезок $[2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1}, T^2(6R)^{-1}]$ стягивается в точку $\varphi_1^T = 2k^{-2}R/3$, а интервал (2.28), соответственно, в точку $T^{(1)} = T^{(2)} = 2k^{-1}R$.

Таким образом, для любого φ_1^T (2.27) выполняется соотношение

$$2k^{-1}R < T^{(1)} < T^{(2)}. \quad (2.30)$$

3) Пусть $1 \geq u^*(t_*) > u^*(0) = |u^*(T)|$, т.е.

$$\begin{cases} 1.5kT^{-1}\varphi_1^T + 6k^{-1}R^2T^{-3}\varphi_1^T \leq 1, \\ 6T^{-2}R\varphi_1^T < 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varphi_1^T \leq 2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1}, \\ \varphi_1^T < T^2(6R)^{-1}. \end{cases}$$

Тогда для любой точки $(T, \varphi_1^T) \in \Phi_3^{(2)}$,

$$\Phi_3^{(2)} = \{(T, \varphi_1^T) : 2k^{-1}R \leq T < \infty; 0 < \varphi_1^T \leq 2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1}\} \quad (2.31)$$

оптимальное управление имеет вид (2.17).

Подытожим полученные результаты.

Введем обозначения:

$$\Phi_1 = \Phi_1^{(1)} \cup \Phi_1^{(2)} = \{(T, \varphi_1^T) : 0 < T < \infty; T^2(6R)^{-1} < \varphi_1^T < \infty\}, \quad (2.32)$$

$$\Phi_3 = \Phi_3^{(1)} \cup \Phi_3^{(2)} = \{(T, \varphi_1^T) : 0 < T < \infty; 0 < \varphi_1^T \leq F(T)\}, \quad (2.33)$$

где

$$F(T) = \begin{cases} T^2(6R)^{-1}, & 0 < T < 2k^{-1}R, \\ 2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1}, & 2k^{-1}R \leq T < \infty. \end{cases}$$

Тогда, в зависимости от принадлежности точки (T, φ_1^T) той или иной области

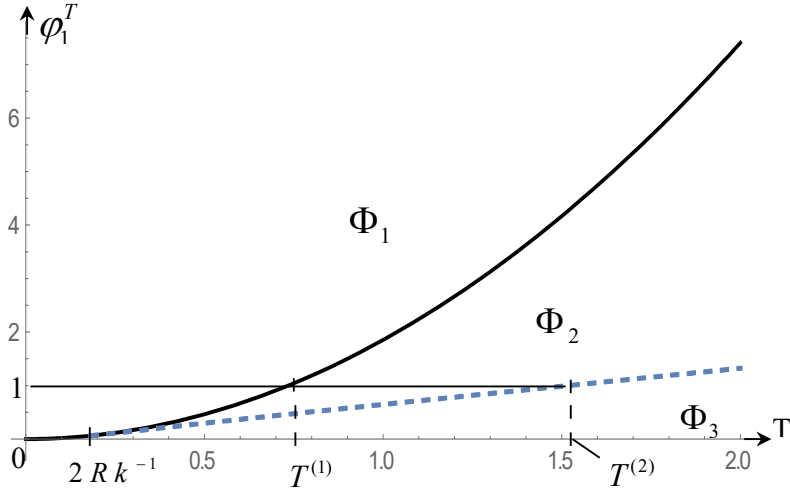


Рис. 1

Φ_i , $i = 1, 2, 3$, ((2.21), (2.32), (2.33)) (рис. 1), оптимальный режим управления определяется следующим образом:

$$u^{opt}(t) = \begin{cases} u_1^{opt}(t), & (T, \varphi_1^T) \in \Phi_1, \\ u_2^{opt}(t), & (T, \varphi_1^T) \in \Phi_2, \\ u_3^{opt}(t), & (T, \varphi_1^T) \in \Phi_3, \end{cases} \quad (2.34)$$

где $u_i^{opt}(t)$, $i = 1, 2, 3$, задаются с помощью формул (2.14), (2.17), (2.22).

3. Алгоритм построения оптимального программного управления и соответствующей фазовой траектории. Не ограничивая общности, рассмотрим случай, когда $(T, \varphi_1^T) \in \Phi_2$. Тогда в задаче (1.14) - (1.18), согласно (2.34), следует использовать режим управления $u^{opt}(t) = u_2^{opt}(t)$ (2.22). Перейдем к построению оптимального программного режима управления (2.22) в явном виде и соответствующей фазовой траектории на плоскости (φ_1, φ_2) .

Зафиксируем любое значение терминального положения φ_1^T (2.27). Этому значению, согласно конструкции области Φ_2 (2.21), соответствует любое T из интервала (2.28). Выберем некоторое $T^* \in \text{int } A$, $A = [T^{(1)}, T^{(2)}]$ и проинтегрируем систему (1.14) с начальными условиями (1.15) при непрерывном управлении $u^*(t, T) \Big|_{T=T^*}$ (2.10) на интервале $0 \leq t \leq t_1$, где $t = t_1$ вычисляется по

формуле (2.23) при $T = T^*$. В области Φ_2 ограничение на управление (1.17) на интервале $0 \leq t \leq t_1$ не нарушается по построению и решение системы (1.14) определяется с помощью (2.8) при $T = T^*$.

При $t = t_1$ из (2.8) получим конечное состояние $(\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)})$ на интервале $[0, t_1]$:

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(1)} &= \varphi_1(t_1) = \left(-2T^{-3}t_1^3 + 3T^{-2}t_1^2\right)\Big|_{T=T^*} \varphi_1^T, \\ \varphi_2^{(1)} &= \varphi_2(t_1) = \left(-6T^{-3}t_1^2 + 6T^{-2}t_1\right)\Big|_{T=T^*} \varphi_1^T.\end{aligned}\quad (3.1)$$

(3.1) служит начальным состоянием для системы (1.14) на втором интервале $[t_1, t_2]$, где t_2 определяется формулой (2.23) при $T = T^*$. Интегрируя систему (1.14), (3.1) при управлении $u^{opt} = 1$ (2.22), получим

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= k^{-1}(t - t_1) + Rk^{-1}(k^{-1} - \varphi_2^{(1)})[\exp(-kR^{-1}(t - t_1)) - 1] + \varphi_1^{(1)}, \\ \varphi_2(t) &= k^{-1} - (k^{-1} - \varphi_2^{(1)})\exp(-kR^{-1}(t - t_1)).\end{aligned}\quad (3.2)$$

Из (3.2) получим конечное состояние $(\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)})$ в момент $t = t_2$

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(2)} &= \varphi_1(t_2) = k^{-1}(t_2 - t_1) + Rk^{-1}(k^{-1} - \varphi_2^{(1)})[\exp(-kR^{-1}(t_2 - t_1)) - 1] + \varphi_1^{(1)}, \\ \varphi_2^{(2)} &= \varphi_2(t_2) = k^{-1} - (k^{-1} - \varphi_2^{(1)})\exp(-kR^{-1}(t_2 - t_1)).\end{aligned}\quad (3.3)$$

Состояние (3.3) служит начальным для системы (1.14) на третьем интервале $[t_2, T]$, где T пока не задано.

Интегрируя уравнения движения (1.14) совместно с сопряженными уравнениями (2.7) при управлении $u^*(t)$ (2.4) на интервале $t_2 \leq t \leq T$ и учитывая краевые условия (1.16), (3.3), получим

$$\varphi_1(t) = -\alpha(t - t_2)^3 + \beta(t - t_2)^2 + \varphi_2^{(2)}(t - t_2) + \varphi_1^{(2)}, \quad (3.4)$$

$$\varphi_2(t) = -3\alpha(t - t_2)^2 + 2\beta(t - t_2) + \varphi_2^{(2)}, \quad (3.5)$$

$$u^*(t) = k\varphi_2(t) - 6R\alpha(t - t_2) + 2R\beta, \quad (3.6)$$

где

$$\alpha = \left[2(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - \varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right](T - t_2)^{-3}, \quad (3.7)$$

$$\beta = \left[3(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - 2\varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right](T - t_2)^{-2}.$$

Функцию (3.6), с учетом выражений (3.5), (3.7), представим в виде

$$\begin{aligned}u^*(t) &= -3k \left[2(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - \varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right](T - t_2)^{-3}(t - t_2)^2 \\ &+ 2 \left\{ k \left[3(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - 2\varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right](T - t_2)^{-2} - \right. \\ &\left. - 3R \left[2(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - \varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right](T - t_2)^{-3} \right\} (t - t_2) + \\ &+ k\varphi_2^{(2)} + 2R \left[3(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - 2\varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right](T - t_2)^{-2}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

В (3.8) все величины $t_i(T^*)$, $\varphi_i^{(j)}(T^*)$, $i, j = 1, 2$, $T^* \in [T^{(1)}, T^{(2)}]$, кроме T , известны.

Таким образом, управление (3.9) при любом T , $T > t_2$ переводит систему (1.14) из состояния (3.3) в терминальное состояние покоя (1.16). Однако это управление, вообще говоря, не удовлетворяет ограничению

$$|u^*(t)| \leq 1, \quad t_2 \leq t \leq T. \quad (3.9)$$

Покажем, что выбором времени T можно учесть ограничение (3.9). Для этого заметим, что функция (3.8) достигает экстремального значения по t в точке

$$t_* = t_2 + \beta(3\alpha)^{-1} - k^{-1}R. \quad (3.10)$$

Достаточно потребовать, чтобы $t_* < t_2$. Тогда на $[t_2, T]$ функция (3.8), в зависимости от знака α , является убывающей или возрастающей. В обоих случаях на левом и правом концах интервала $[t_2, T]$ она принимает, соответственно, значения

$$u(t_2) = k\varphi_2^{(2)} + 2R[3(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - 2\varphi_2^{(2)}(T - t_2)](T - t_2)^{-2} \quad (3.11)$$

$$u(T) = 2R(T - t_2)^{-2}[-3(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) + \varphi_2^{(2)}(T - t_2)]. \quad (3.12)$$

Не ограничивая общности, предположим, что $\alpha > 0$. В этом случае на интервале $[t_2, T]$ функция (3.8) является убывающей.

Из (2.23) следует, что $t_2 < T$ для всех $T \in [2k^{-1}R, T^{(2)})$. Однако, поскольку выполняется соотношение (2.30), то $t_2 < T$ для всех $T \in [T^{(1)}, T^{(2)})$.

Выберем время T из интервала

$$B_1 = (T^*, T^{(2)}) \subset [T^{(1)}, T^{(2)}] \quad (3.13)$$

так, чтобы не нарушались неравенства

$$\text{а) } \beta(3\alpha)^{-1} - k^{-1}R \leq 0, \quad \text{б) } u(t_2) \leq 1, \quad \text{в) } u(T) \geq -1,$$

или, учитывая (3.7) и (3.8), соответственно, неравенства

$$\text{а) } \frac{[3(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - 2\varphi_2^{(2)}(T - t_2)](T - t_2)}{3[2(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - \varphi_2^{(2)}(T - t_2)]} - k^{-1}R \leq 0, \quad (3.14)$$

$$\text{б) } k\varphi_2^{(2)} + 2R[3(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - 2\varphi_2^{(2)}(T - t_2)](T - t_2)^{-2} \leq 1, \quad (3.15)$$

$$\text{в) } 2R(T - t_2)^{-2}[-3(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) + \varphi_2^{(2)}(T - t_2)] \geq -1, \quad (3.16)$$

Решение неравенства (3.14) относительно T представляется в виде

$$T \in B_2 = (0, T^-] \cup [T^+, \infty), \quad (3.17)$$

$$T^- = t_2 + 3[\gamma + k^{-1}R]/4 - \sqrt{D}, \quad T^+ = t_2 + 3[\gamma + k^{-1}R]/4 + \sqrt{D},$$

$$\gamma = (\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) / \varphi_2^{(2)} > 0,$$

где дискриминант

$$\bar{D} = 9[\gamma + k^{-1}R]^2 / 16 - 3k^{-1}R\gamma \geq 0,$$

когда

$$\gamma \in (0, \gamma_1] \cup [\gamma_2, \infty), \quad \gamma_1 = R / 3k > 0, \quad \gamma_2 = 3R / k > 0.$$

Решение неравенства (3.15) следующее:

$$T \in B_3 = [T', \infty), \quad (3.18)$$

$$T' = t_2 - 2R\varphi_2^{(2)}(1 - k\varphi_2^{(2)})^{-1} + \sqrt{D'},$$

$$D' = [2R\varphi_2^{(2)}(1 - k\varphi_2^{(2)})^{-1}]^2 + 6R(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)})(1 - k\varphi_2^{(2)})^{-1} > 0,$$

$$\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)} > 0, \quad 1 - k\varphi_2^{(2)} > 0,$$

а решение неравенства (3.16) определяется так

$$T \in B_4 = [T'', \infty), \quad (3.19)$$

$$T'' = t_2 - R\varphi_2^{(2)} + \sqrt{D''}, \quad D'' = (R\varphi_2^{(2)})^2 + 6R(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) > 0.$$

Таким образом, в соответствии с включениями (3.13), (3.17)-(3.19), неравенства (3.14)-(3.16) выполняются для всех T из интервала

$$B = \bigcap_{i=1}^4 B_i. \quad (3.20)$$

Как показывают расчеты для конкретных числовых параметров задачи, интервал (3.20) непустой.

Приведем численный пример реализации предложенного алгоритма построения оптимального управления. Примем, что электромеханический манипулятор характеризуется следующими размерными параметрами [1,2], фигурирующими в (1.1)-(1.3), (1.7), (1.8):

$$I = 5.9 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J = 2.45 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad n = 163, \quad (3.21)$$

$$R = 3.6 \text{ Ом}, \quad k = 0.233 \text{ Н} \cdot \text{м/А}, \quad j = 5.7 \text{ А}, \quad U = 110 \text{ В}.$$

При переходе к безразмерным переменным (1.3) за единицу измерения времени примем величину $\bar{T} = nkU^{-1} \approx 0.345 \text{ с}$, равную времени поворота руки на угол в один радиан при движении руки манипулятора со стационарной угловой скоростью $\dot{\varphi} = (nk)^{-1}U \approx 2.9 \text{ с}^{-1}$. Безразмерные параметры уравнения (1.10) следующие:

$$R \approx 0.09, \quad k \approx 1. \quad (3.22)$$

При нулевом начальном значении угла поворота руки манипулятора, равном $\varphi_1^0 = 0$ рад (1.5), зададим конечное значение угла поворота (1.6), равное

$$\varphi_1^T = 1 \text{ рад}, \quad (3.23)$$

которое удовлетворяет неравенству (2.27) при значениях (3.22).

Выбор конечного времени T , а также построение оптимального режима управления (2.22) и соответствующей оптимальной траектории на фазовой плоскости системы (1.14) осуществляется по следующему алгоритму:

- 1) определяем диапазон изменения времени T (2.28): $A = [0.735, 1.520]$;
- 2) фиксируем некоторое значение, например, $T^* = 1$ из интервала $\text{int } A$;
- 3) определяем интервалы (3.13), (3.17) - (3.19):
 $B_1 = (1, 1.520]$, $B_2 = (0, 0.912] \cup [1.243, \infty)$, $B_3 = [1.312, \infty)$,
 $B_4 = [1.173, \infty)$ и интервал (3.20): $B = [1.312; 1.520]$, для любой точки которого выполняются неравенства (3.14) - (3.16);
- 4) выбираем конечное время процесса, например, $T = 1.51$ из интервала B ;
- 5) для выбранного T строим оптимальный режим управления (2.22), в котором моменты переключения $t_1 = 0.108$ и $t_2 = 0.712$ вычисляются по формулам (2.23), и соответствующая оптимальная фазовая траектория - по формулам (2.8) на интервале $0 \leq t \leq 0.108$, по формулам (3.2) на интервале $0.108 \leq t \leq 0.712$ и по формулам (3.4), (3.5) на интервале $0.712 \leq t \leq 1.51$.

На рис. 2 и рис. 3 представлены графики функции $u_2^{opt}(t)$ и соответствующей фазовой траектории на плоскости (φ_1, φ_2) . Минимальное значение тепловыделения в двигателе при построенном режиме управления на интервале $[0, 1.51]$ подсчитывается по формуле (1.8): $Q = 0.48$.

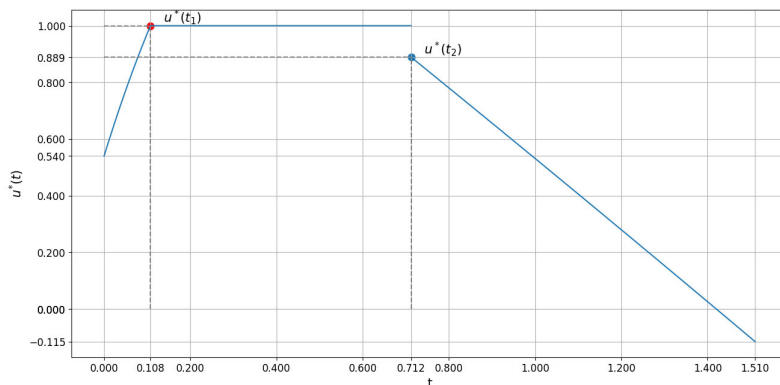


Рис. 2

В исходных размерных переменных (1.9), (1.12) моменты переключения, конечное время и минимальное тепловыделение имеют следующие значения: $t_1 = 0.04$ с, $t_2 = 0.24$ с, $T = 0.52$ с, $Q = 49.64$ Дж. Так как полное тепловыделение в обмотке ротора электродвигателя за 0.52 с составляет 49.64 Дж, то

средняя мощность тепловыделения равна $q_{cp} = 95.5 \text{ Вт}$. Для сравнения отметим, что максимально допустимая мощность тепловыделения для электродвигателя с параметрами (3.1) составляет $q_{\text{макс.}} = 117 \text{ Вт}$. Следовательно, за время 0.52 с тепловые потери в обмотке ротора двигателя будут значительно больше и составят $Q_{\text{макс.}} = 60.84 \text{ Дж}$.

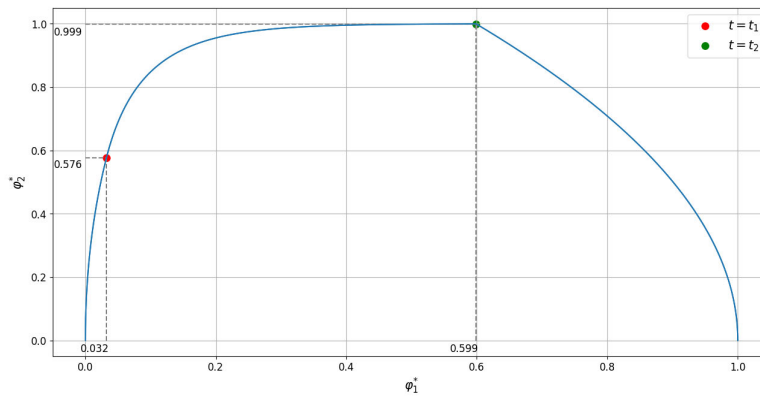


Рис. 3

Таким образом, применение оптимального режима управления уменьшает рабочую мощность двигателя до уровня, который значительно ниже максимальной мощности рассматриваемого электромеханического манипулятора (3.1), что позволяет сократить тепловые потери и избежать перегрева. Это особенно важно в условиях непрерывной или длительной работы двигателя при выполнении манипулятором транспортных операций, когда из-за теплового повреждения двигатель может выйти из строя.

Заключение. В статье с использованием метода принципа максимума построено оптимальное управление, которое обеспечивает перемещение системы, моделирующей динамику однозвенного манипулятора, из заданного состояния покоя в произвольное терминальное состояние покоя за конечное время и минимизирует функционал, учитывающий тепловые потери в электродвигателе манипулятора. На плоскости конечных времен и положений системы построены области, в любую точку которых, в зависимости от ее принадлежности той или иной области, перемещение управляемой системы в терминальное состояние покоя происходит в оптимальном режиме управления различной структуры: с одним, двумя переключениями или без переключений. По изложенному алгоритму проведено численное моделирование движения электромеханического манипулятора при оптимальном режиме управления с двумя переключениями и вычислено соответствующее минимальное значение тепловых потерь в электродвигателе. Расчетами установлено, что построенный режим управления позволяет заметно уменьшить энергозатраты двигателя по сравнению с существующими показателями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chernousko F. L., Bolotnik N. N., Gradetsky V. G. . Manipulation Robots: Dynamics, Control and Optimization. — Boca Raton: CRC Press, 1994. 268 p.
2. Аветисян В.В., Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Оптимальное управление электроприводами промышленных роботов. – М.: ИПМ АН СССР. 1986, 71с.
3. Avetisyan V.V., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Optimization of control modes of manipulation robots with regard of the energy consumption // Soviet J. Comput. Syst. Sci. 1987. Vol. 25. No. 3. P. 100-107.
4. Chernousko F. L., Ananievski I. M., Reshmin S. A. Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. — 396 p.
5. Аветисян В.В. Управление электромеханическим манипулятором при ограничениях на напряжение и ток // Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т. 55. № 1. С. 68-74.
6. Аветисян А.С., Аветисян В.В. О построении ограниченного управления электромеханической системой // Докл. НАН РА. 2017. Т. 117. № 1. С. 121-131.
7. Avetisyan V.V. Control of a second-order electromechanical system under mixed constraints. // Mechanics - Proceedings of NAS PA. 2023. Vol. 76. Issue 2. P. 32-43.
8. Demydyuk M.V., Hoshovs'ka N.V. Parametric Optimization of the Transport Operations of a Two-Link manipulator // J. Math. Sci. 2019. Vol. 238. No. 2. P. 174-188.
9. Demydyuk M.V., Demydyuk P.M., Shyrko M. I. Parametric optimization of the cyclic pick-and-place operations of a single-link manipulator with active and passive actuators // Prykladni Problemy Mekhaniky i Matematyk. 2023(21). P. 64-71.
10. Oršanský P., Ftorek B., Vittek J. Energy optimal trajectories for electro-mechanical systems // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 776 (2020) 012113
11. Galicki M. Energy optimal control of mobile manipulators subject to compensation of external disturbance forces // J. Mech. Mach. Theory. 2022, Vol. 167. P. 63-65.
12. Abdullah Mohammed, Bernard Schmidt, Lihui Wang, Liang Gao. Minimizing Energy Consumption for Robot Arm Movement // 8th International Conference on Digital Enterprise Technology - Procedia CIRP 25 (2014). P. 400-405.
13. Аветисян В.В., Мартиросян С.Р. Управление гарантированным поиском подвижного объекта при минимальных световых энергозатратах // Изв. НАН РА. Механика. 2007. Т. 60, № 2. С. 100-109.
14. Avetisyan V.V., Martirosyan, S.R. Guaranteed Search for a Target Object by an Electromechanical System with Minimal Light Power Costs // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2009. Vol. 48. No. 5. P. 814-826.
15. Avetisyan V.V. Controlled dynamic search for a mobile object with minimum cost of light energy // Automation and Remote Control. 2020. Vol. 81. Issue 4, pp. 624–631.
16. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. 393с.

Сведения об авторе:

Аветисян Ваган Вардгесович – в.н.с. Института механики НАН РА, д.ф.м.н., профессор, Тел.: +374 94 449560, **E-mail:** vanavet@yahoo.com

Поступила в редакцию 29. 09. 2024