ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №3, 2024 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.3-42

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ШИРОКОЙ ПАНЕЛИ С ОДНИМ СВОБОДНЫМ КРАЕМ, НАГРУЖЕННОЙ ПО ДВУМ НАПРАВЛЕНИЯМ: СЖАТОЙ ПО СВЕРХЗВУКОВОМУ ПОТОКУ ГАЗА И РАСТЯНУТОЙ В ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: достаточно широкая прямоугольная пластинка, полубесконечная пластина–полоса, сверхзвуковое обтекание, первоначальные сжимающие силы и силы растяжения, сосредоточенные инерционные массы и моменты, аэроупругая устойчивость, локализованная дивергенция, аналитическое решение

Martirosyan S.R.

On the dynamic stability of a sufficiently wide panel with a free edge, loaded in two directions: compressed in a supersonic gas flow and stretched in the perpendicular direction

Key words: sufficiently wide rectangular plate, semi-infinite plate-strip, initial compressive and tensile forces, concentrated inertial masses and moments, supersonic flow, aeroelastic stability, localized divergence, analytical solution method

In the article, in a linear formulation, we study the influence of the initial stressed state of a sufficiently wide rectangular elastic plate, loaded in two directions: compressed along the supersonic gas flow and stretched in the perpendicular direction, on the stability of the dynamic system “plate-flow” under the assumption that at the free edge plates there are concentrated inertial masses and moments. An analytical solution to the stability problem is found. The possibility of loss of system stability only in the form of localized divergence in the vicinity of the free edge is shown. An accurate assessment of the influence of the ratio of initial compressive and tensile forces on the stability threshold of the “plate-flow” system is given, with the aim of subsequent analysis of the possibility of controlling it.

Ս.Ռ.Մարտիրոսյան

Գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ նախնական սեղմված և միաժամանակ ձգված ուղղահայաց ուղղությամբ մեկ ազատ եզրով բավականի լայն սալի դինամիկ կայունության մի խնդրի մասին

Հիմնաբառեր՝ բավականի լայն ուղղանկյուն սալ, կիսաանվերջ սալ–շերտ, սեղմող և ձգող ուժեր, գերձայնային շրջհոսում, աերոառաձգական կայունություն, կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, տեղայնացված դիվերգենցիա, անալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է նախնական սեղմված գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ և միաժամանակ ձգված ուղղահայաց ուղղությամբ լայն ուղղանկյուն սալի լարվածային վիճակի ազդեցությունը ՛սալ – հոսք՛ գծային դինամիկ համակարգի կայունության շեմի վրա, սալի ազատ եզրին կենտրոնացված իներցիոն զանգվածների և մոմենտների առկայությանը: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: Ցույց է տրված, որ համակարգը կորցնում է միայն ստատիկ կայունությունը՝ տեղայնացված դիվերգենցիայի տեսքով: Գտնված են կրիտիկական արագությունները:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначального напряжённого состояния достаточно широкой прямоугольной упругой пластинки, нагруженной по двум направлениям: сжатой по сверхзвуковому потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении, на порог устойчивости динамической системы «пластинка–поток» в предположении, что на свободном крае пластинки имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты. Найдено аналитическое решение задачи устойчивости. Показана возможность потери устойчивости системы только лишь в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки. Дана точная оценка влиянию соотношения первоначальных сжимающих и растягивающих усилий на порог устойчивости системы «пластинка–поток», с целью последующего анализа возможности управления им.

Введение. Теоретические исследования задач аэроупругой устойчивости позволяют выявить различные виды потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы, обусловленные характером деформаций, а также, позволяют дать оценку влиянию комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им [1–4].

В предлагаемой статье, являющейся продолжением работ [18, 19], исследуется влияние первоначального напряжённого состояния упругой достаточно широкой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями, нагруженной по двум направлениям:сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении, на порог устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости динамической системы «пластинка–поток». Получена формула, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего потока газа.

Исследована граница области устойчивости. Установлено, что невозмущённое состояние равновесия системы «пластинка–поток» при меньших значениях относительной толщины пластинки теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности её свободного края, подобно системе «полубесконечная пластина–полоса – поток»; а при больших значениях относительной толщины пластинки – устойчиво.

Найдены критические скорости локализованной дивергенции в предположении, что в момент «выпучивания» в пластинке возникают только напряжения изгиба. Показана существенная зависимость критической скорости локализованной дивергенции от первоначальных усилий, а также, от коэффициента Пуассона.

Дана точная оценка влиянию комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им.

Результаты работы могут быть использованы при обработке данных экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая достаточно широкая прямоугольная пластинка ($ab^{-1} \geq 2.9$), которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$ [19]. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа принимается плоским и потенциальным.

Пусть край пластинки $x=0$ – свободен, а края $x=a$, $y=0$ и $y=b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x=0$ приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c, интенсивность которых на много превосходит интенсивность распределенной массы пластинки [2, 9, 10].

Будем полагать, что первоначально пластинка подвержена действию сжимающих $N_x = 2h\sigma_x$ и растягивающих $N_y = 2h\sigma_y$ сил, распределённых равномерно по кромкам пластинки $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$ соответственно, являющимися результатом нагрева, или каких – либо других причин; усилия σ_x и σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба $w = w(x, y, t)$ [1, 2,18, 19].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» $\delta p = -a_0\rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [7, 8]. Будем полагать, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$ [1, 2].

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб широкой прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками δp, сжимающими σ_x и σ_y растягивающими усилиями в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами I_c, приложенными вдоль её свободного края $x=0$, в предположении, что усилия σ_x и σ_y малы по сравнению с критическими значениями $(\sigma_x)_{cr.}$ и $\left(\sigma_y\right)_{pr.}$, где $(\sigma_x)_{cr.}$ – критические значения сжимающих усилий, которые могут произвести «выпучивание» упругой поверхности пластинки в отсутствии обтекания [16, 17]; $\left(\sigma_y\right)_{pr.}$ – растягивающие усилия, начиная с которых имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [11].

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в рамках справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» в предположении малости интенсивности $m\,\partial^2 w/\partial t^2$ распределённой массы пластинки m в сравнении с интенсивностями $m_c\,\partial^2 w\big/\partial t^2$ и $I_c\,\partial^2 w\big/\partial t^2$, учитываемых в граничных условиях, будет описываться соотношением [1, 2, 18, 19]:

$$D\Delta^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0\rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,,\ w = w\big(x, y, t\big)\,; \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1, 2, 9,18,19]:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}\,, \tag{1.2}$$

$$D \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + N_x \frac{\partial w}{\partial x} = -m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \ \text{ при } \ x = 0\,;$$

$$w = 0\,,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \ \text{ при } \ x = a \ \text{ и } \ w = 0\,,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \ \text{ при } \ y = 0 \ \text{ и } \ y = b\,; \tag{1.3}$$

ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа – в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.})\,,\ M_0 = \sqrt{2}\,,\ M_{2\cos m.} \approx 33.85\,; \tag{1.4}$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.3) в предположении:

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{cr.}\,,\ \sigma_y < (\sigma_y)_{pr.} \tag{1.5}$$

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы (1.1) – (1.3) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) и (1.3) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале (1.4) при условии (1.5).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.5) будем исследовать в случае достаточно широких прямоугольных пластинок [19]:

$$\gamma = ab^{-1} \in \big[2.9; \infty\big)\,, \tag{1.6}$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b .

Согласно обозначению (1.6) значению $\gamma = \infty$ соответствует полубесконечная пластина–полоса, как один из предельных случаев прямоугольной пластинки.

Заметим, что в работе [15] получено аналитическое решение задачи (1.1) – (1.3) для всех значений $\gamma \in \big[0, \infty\big]$ в отсутствии первоначальных усилий в срединной поверхности пластинки $\big(\sigma_x = \sigma_y = 0\big)$. В работе [17] получено решение задачи (1.1) – (1.5) для всех $\gamma \in \big[0, \infty\big]$ в статической постановке $\big(m_c = 0, I_c = 0\big)$ по методу Эйлера. Показано, что система «пластинка-поток» теряет статическую устойчивость или в виде эйлеровой дивергенции панели, или в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки, в зависимости от её существенных параметров. Исследована граница перехода из области эйлеровой дивергенции панели в область локализованной дивергенции. Найдены критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции. В работах [18] и [19] получено решение задачи (1.1) – (1.5) для $\gamma \le 0.193$ и $\gamma \in (0.193; 2.9)$ соответственно. В работе [20] исследована исходная задача устойчивости, при условии наличия первоначальных сил растяжения $(-N_x)$, направленных по потоку газа. Показано, что невозмущённое состояние равновесия пластинки теряет устойчивость только в виде локализованной дивергенции, подобно полубесконечной пластине–полосе [5, 6, 14]. При этом растягивающие усилия σ_x приводят к существенному повышению устойчивости системы.

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.5). Сведём задачу устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы (1.1) – (1.5) к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), будем искать в виде гармонических колебаний:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y)\,,\ \mu_n = \pi n b^{-1}, \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое состояние равновесия системы (1.1) – (1.3) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\lambda > 0$) [13]. Критическая скорость V_{cr} потока газа, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\mathrm{Re}\lambda = 0$) [1, 2, 13].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» в виде [17– 19]:

$$r^4 - 2\cdot(1-\beta_x^2)\cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + (1+\beta_y^2) = 0\,, \tag{2.2}$$

где α_n^3 – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3} \in (a_0^2\rho_0 M_0 D^{-1}\mu_n^{-3},\ a_0^2\rho_0 M_{2\cos m.} D^{-1}\mu_n^{-3})\,; \tag{2.3}$$

β_x^2 и β_y^2 – коэффициенты, характеризующие консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2 N_x D^{-1}\mu_n^{-2} = h\sigma_x D^{-1}\mu_n^{-2} < (\beta_x^2)_{cr},\ (\beta_x^2)_{cr} = h(\sigma_x)_{cr.} D^{-1}\mu_n^{-2}\,; \text{ (табл. 1)} \tag{2.4}$$

$$\beta_y^2 = N_y D^{-1}\mu_n^{-2} = 2h\sigma_y D^{-1}\mu_n^{-2} < (\beta_y^2)_{pr.},\ (\beta_y^2)_{pr.} = 2h(\sigma_y)_{pr.} D^{-1}\mu_n^{-2}\,;$$

согласно условиям (1.4) , (1.5).

Корни уравнения (2.2) в соответствии с известным решением Феррари определяются выражениями [17– 19]:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} - 0.5(q-1+\beta_x^2)}\,,\ \ r_1 < 0\,,\ \ r_2 < 0\,; \tag{2.5}$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} + 0.5(q-1+\beta_x^2)} \in W\,. \tag{2.6}$$

Здесь, $q = q\left(V\right) \in R$ – параметр скорости V потока газа – единственный действительный корень кубического уравнения [18, 19}:

$$8\cdot(q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2) - \alpha_n^6 = 0\,. \tag{2.7}$$

С помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), в силу условия (1.4), можно показать, что [18, 19]

$$q = q\left(V\right) \in \left(q_0,\ q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right) \subseteq \left(q\left(a_0 M_0\right), q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right), \tag{2.8}$$

$$q_0 = \left((\beta_x^2-1) + 2\sqrt{(\beta_x^2-1)^2 + 3(1+\beta_y^2)}\right)\Big/3 \ \text{(табл. 2)}. \tag{2.9}$$

При значениях (2.9) характеристическое уравнение (2.2) имеет два отрицательных корня $r_1 < 0$, $r_2 < 0$ и пару $r_{3,4} \in W$ комплексно сопряжённых корней с положительной вещественной частью [17 – 19].

Значения $(\beta_x^2)_{cr} = (\beta_x^2)_{cr}\left(n,\gamma,\nu\right)$ при $n=1$, $\beta_y^2 = 0$, $m_c = 0, I_c = 0$. Таблица 1.

γ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
1.80	1.3670	1.2180	1.1543	1.0541	0.8747
1.96	1.3671	1.2188	1.1550	1.0547	0.8749
$\geq$ 2.90	1.3672	1.2189	1.1550	1.0547	0.8750

Значения $q_0 = q_0\left(\beta_x^2, \beta_y^2\right)$ при $n=1$. Таблица 2.

β_y^2 \ β_x^2	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.0	1.000	1.001	1.005	1.012	1.022	1.035	1.052
0.5	1.230	1.236	1.245	1.256	1.270	1.286	1.305
1.0	1.431	1.440	1.451	1.465	1.481	1.500	1.521
2.0	1.552	1.788	1.803	1.820	1.839	1.861	1.884
3.0	1.878	2.086	2.103	2.123	2.144	2.167	2.191
5.0	2.415	2.591	2.611	2.633	2.656	2.681	2.708

В таблице 1 приведены некоторые критические значения $(\beta_x^2)_{cr} = (\beta_x^2)_{cr}\left(n,\gamma,\nu\right)$ коэффициента напряжения β_x^2– решения дисперсионного уравнения исходной задачи устойчивости в отсутствии обтекания для $\gamma \in \left[2.9,\infty\right)$ и $\gamma = \infty$ [16, 17]:

$$F_1\left(n,\gamma,\nu,\beta_x^2\right)=\sqrt{0.5\beta_x^2}\left(4-2\beta_x^2-\left(1+\nu\right)^2\right)sh\left(2\pi n\gamma\sqrt{1-0.5\beta_x^2}\right)- \qquad (2.10)$$

$$-\sqrt{1-0.5\beta_x^2}\left(2\beta_x^2-\left(1-\nu\right)^2\right)\sin\left(2\pi n\gamma\sqrt{0.5\beta_x^2}\right)=0\,,\ \beta_x^2\in\left(0,2\right);$$

найденные с точностью до порядка 10^{-4} при $n=1$, $\beta_y^2=0$ и $m_c=0, I_c=0$.

Из данных таблицы 2 очевидно, что $q_0=q_0\left(\beta_x^2,\beta_y^2\right)$ – монотонно возрастающая функция от коэффициентов напряжений β_x^2 и β_y^2, определяемых выражениями (2.4).

Таблица 3.

β_x^2	0	0.1	0.2	≥ 0.3
γ_{gr}	1.96	2.4	2.8	2.9

Как показано в работах [17 и 19], начиная с значения $\gamma_{gr}=\gamma_{gr}\left(\beta_x^2,\beta_y^2,\nu\right)$ (табл.3), зависящего от параметра β_y^2 и коэффициента Пуассона ν исчезающе мало, для всех $\gamma\in\left[\gamma_{gr.},\infty\right)$, в частности, для всех $\gamma\in\left[2.9,\infty\right)\subset\left[\gamma_{gr.},\infty\right)$, зависящих от параметров β_x^2,β_y^2 и ν исчезающе мало, невозмущённое состояние равновесия динамической системы теряет только статическую устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x=0$ пластинки, подобно системе с полубесконечной пластиной–полосой $\left(\gamma=\infty\right)$: эйлерова и неэйлерова дивергенция панели, а также, панельный флаттер отсутствуют.

Из данных таблицы 3 очевидно, что граница $\gamma_{gr}=\gamma_{gr}\left(\beta_x^2,\beta_y^2,\nu\right)\approx\gamma_{gr}\left(\beta_x^2\right)$ между подобластями эйлеровой дивергенции панели и локализованной дивергенции, с ростом β_x^2 смещается в направлении больших значений параметра γ, что приводит к сужению подобласти локализованной дивергенции – к снижению устойчивости системы. А, начиная с значения $\gamma=\gamma_{gr.}\approx 2.9$, можно принять её неподвижной: для всех $\gamma\in\left[2.9,\infty\right)$ невозмущённое состояние равновесия системы теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки при всех значениях параметров β_x^2,β_y^2 и ν.

А тогда, в соответствии с условием затухания колебаний на краю $x=a$ пластинки, в силу схожести поведения возмущённого движения системы «пластинка–поток» для всех $\gamma\in\left[2.9,\infty\right)$ и $\gamma=\infty$, общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда [5, 6 , 14, 17, 19]:

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2}C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y)\,,\ \ \gamma\in\left[2.9,\infty\right]; \qquad (2.11)$$

где r_k, $k=1,2$ определены выражениями (2.5).

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.7), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q)=2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2)}\cdot\pi^3n^3D(a_0\rho_0b^3)^{-1},\gamma\in\left[2.9,\infty\right]; \qquad (2.12)$$

позволяющую по известному значению параметра $q=q\left(n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2,\nu\right)$ определить приведённую скорость потока газа $V\left(q\right)\cdot D^{-1}(a_0\rho_0b^3)$.

Так как невозмущённое состояние равновесия системы в случае достаточно широких пластинок $\gamma\in\left[2.9,\infty\right]$ устойчиво вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.4) [16, 17, 19], то очевидно, что

$$V\left(q\right)\in\left(V\left(q_0\right),\, a_0\, M_{2cos\,m.}\right)\subset\left(a_0M_0,\, a_0\, M_{2cos\,m.}\right). \qquad (2.13)$$

Согласно формуле цилиндрической жёсткости $D=E\cdot(2h)^3\Big/\left(12\left(1-\nu^2\right)\right)$ отсюда следует [16–19]:

$$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0b^3)\in(V(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0b^3),a_0M_{2\cos m}\Psi)\subset\left(a_0M_0,\,a_0M_{2\cos m.}\right)\Psi,$$

$$\Psi=12(1-\nu^2)a_0\rho_0E^{-1}(2hb^{-1})^{-3},\ \gamma\in\left[2.9,\infty\right]. \qquad (2.14)$$

Подставляя значения коэффициента Пуассона ν и относительной толщины пластинки $2hb^{-1}\in\left[0.006,\ 0.015\right]$ в выражения (2.14), получаем интервалы $d\left(\nu,2hb^{-1}\right)=(a_0M_0,\,a_0M_{2\cos m})\Psi$ допустимых значений приведённой скорости потока $V\left(q\right)D^{-1}\left(a_0\rho_0b^3\right)$, представленные для стальных пластинок в таблице 4.

Таблица 4.

$2hb^{-1}$ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.8,1311.7)	(52.0,1245.2)	(50.5,1209.0)	(47.7,1141.6)	(41.6,996.3)
0.007	(34.5, 811.1)	(32.7, 769.4)	(32.0, 753.4)	(30.0, 705.3)	(26.2,615.5)
0.008	(23.1, 544.3)	(22.0, 516.4)	(21.5, 505.6)	(20.1, 473.3)	(17.6,413.1)
0.009	(16.2, 381.8)	(15.4, 362.1)	(15.1, 354.6)	(14.1, 332.0)	(12.3, 289.7)
0.010	(11.8, 283.5)	(11.2, 269.1)	(10.9, 261.3)	(10.3, 246.7)	(9.0, 215.3)
0.011	(8.9, 209.4)	(8.4, 198.7)	(8.1, 190.4)	(7.74, 182.1)	(6.75,158.9)
0.012	(6.85, 164.0)	(6.5, 155.7)	(6.3, 151.2)	(5.96, 142.7)	(5.2, 124.6)
0.013	(5.39, 126.9)	(5.11,120.34)	(5.0,117.84)	(4.69,110.32)	(4.09, 96.3)
0.014	(4.3, 101.5)	(4.09, 96.24)	(4.0, 94.24)	(3.75, 88.22)	(3.27, 77.0)
0.015	(3.5, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23,77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

3. Достаточный признак потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы (1.1) – (1.5) для $\gamma \in \left[2.9, \infty\right]$.

Подставляя общее решение дифференциального уравнения (1.1) в виде (2.11) в граничные условия (1.2), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений приводит к характеристическому определителю – биквадратному уравнению относительно собственного значения λ:

$$\tilde{F}\left(\lambda\right) = \chi_n \delta_n \tilde{A}_0 \lambda^4 + \left(\chi_n \tilde{A}_1 + \delta_n \tilde{A}_2\right)\lambda^2 + \tilde{A}_3 = 0\ ,\ \ \gamma = \infty\,, \tag{3.1}$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}\,,\ \ \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1},\ \delta_n > 0\ ,\ \chi_n > 0\,; \tag{3.2}$$

δ_n и χ_n – приведённые значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края пластинки;

$$\tilde{A}_0 = 1\ ,\ \tilde{A}_1 = \sqrt{2\left(q+1-\beta_x^2\right)}\cdot\left(q-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right),\ \tilde{A}_2 = \sqrt{2\left(q+1-\beta_x^2\right)}\ , \tag{3.3}$$

$$\tilde{A}_3 = \left(q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2 - 2\left(q+1\right)\nu - \left(1-\nu\right)^2 - 2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right).(3.4)\ .$$

Отсюда очевидно, что

$$\tilde{A}_0 > 0, \tilde{A}_1 > 0, \tilde{A}_2 > 0 \tag{3.5}$$

при всех $\beta_x^2 \in \left[0, \left(\beta_x^2\right)_{cr}\right)$(табл. 1), $\beta_y^2 < \left(\beta_y^2\right)_{pr.}$, $q \in \left(q_{0,}\ q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$(табл. 2).

Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1} = I_c\left(\pi n\right)^2 \cdot \left(m_c b^2\right)^{-1},\ k_n > 0\,, \tag{3.6}$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.5), перепишется в виде

$$\lambda^4 + (k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)\chi_n^{-1}\tilde{A}_0^{-1}\lambda^2 + \chi_n^{-1}\delta_n^{-1}\tilde{A}_0^{-1}\tilde{A}_3 = 0\,,\ (k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) > 0\,. \tag{3.7}$$

Легко показать, что дискриминант уравнения (3.7)

$$\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}\left(q, n, \nu, \beta_x^2, k_n\right) = \left(k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2\right)^2 - 4k_n \tilde{A}_0 \tilde{A}_3 > 0 \tag{3.8}$$

при всех $q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$, $\beta_x^2 \in \left[0, \left(\beta_x^2\right)_{cr}\right), n, \nu$ и $k_n > 0$.

В самом деле, подставляя в формулу (3.8) выражения (3.3) и (3.4), после несложных преобразований получаем

$$\tilde{\Delta} = 2\left(q+1-\beta_x^2\right)\left(k_n\left(q-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)-1\right)^2 + 4k_n\left(2\left(q+1\right)\nu + \left(1-\nu\right)^2\right) > 0\,.$$

Соответственно, для всех $\gamma \in \left[2.9, \infty\right]$ анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» будет сводиться к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.7) при условии (3.8), определяющих собственные движения системы в пространстве «существенных» параметров $\Im = \left\{ q(V), n, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n \right\}$. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

4. **Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости.** Здесь, также, как и в работах [18 и 19], введём в рассмотрение в пространстве параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\Im_0\left(k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 > 0,\ \tilde{A}_3 > 0,\ \tilde{\Delta} > 0 \right)$ и области неустойчивости: $\Im_1\left(\tilde{A}_3 < 0,\ \tilde{\Delta} > 0 \right)$, $\Im_2\left(k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 < 0,\ \tilde{A}_3 > 0,\ \tilde{\Delta} > 0 \right)$ и $\Im_3\left(\tilde{A}_3 > 0,\ \tilde{\Delta} < 0 \right)$.

где $\tilde{A}_i$, i=1,2,3, k_n и $\tilde{\Delta}$ – определены выражениями (3.5), (3.6) и (3.8).

Отсюда очевидно, что границей области устойчивости $\Im_0$ системы для всех $\gamma \in [2.9, \infty]$ является гиперповерхность $\tilde{A}_3 = 0$, которая, в соответствии с выражением (3.4), описывается соотношением

$$\left(q + 1 - \sqrt{q^2 - 1 - \beta_y^2} \right)^2 - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2 - 2\beta_x^2 \left(q - \sqrt{q^2 - 1 - \beta_y^2} \right) = 0\,. \quad (4.1)$$

На гиперповерхности (4.1) определитель (3.7) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2: уравнение (4.1), определяет границу «апериодической устойчивости», при переходе через которую невозмущённое состояние равновесия динамической системы (1.1) – (1.5) при скоростях потока газа $V \ge V_{locdiv} = V\left(q_{locdiv} \right)$ для всех $\gamma \in [2.9, \infty]$ теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки.

Критические скорости $V_{loc.div.} = V_{loc.div.}\left(n, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2 \right)$ потока газа разграничивают область устойчивости $\Im_0$ и область локализованной дивергенции $\Im_{locdiv}$ [19]. При скоростях $V \ge V_{loc.div}$ потока происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера невозмущённого состояния равновесия системы от устойчивости к статической неустойчивости в виде локализованной дивергенции: прогибы пластинки локализованы в окрестности её свободного края $x = 0$. Граница «апериодической устойчивости» (4.1) является «безопасной» в смысле Н.Н. Баутина [12]: малое превышение критической скорости локализованной дивергенции соответствует малым дивергентным деформациям, локализованным в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки.

А также, из уравнения (4.1) очевидно, что его решение $q_{loc.div.} \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m} \right) \right)$ не зависит от параметра $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$. Соответственно, приведённые значения критической скорости локализованной дивергенции $V_{locdiv.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3 \right)$, определяемые подстановкой единственного корня $q_{loc.div.} \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ уравнения (4.1) в формулу (2.12), также не зависят от $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$, а зависят лишь от параметров n, ν, β_x^2 и β_y^2. Из независимости функции $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ от параметра $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$ следует, что коэффициенты χ_n и δ_n, характеризующие сосредоточенные инерционные моменты поворота I_c и массы m_c соответственно, влияют лишь только на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности её свободного края $x = 0$ [15, 20].

Следует отметить, что уравнение (4.1) тождественно дисперсионному уравнению, полученному в работе [17] при исследовании исходной задачи в статической постановке по методу Эйлера.

Таким образом, невозмущённое состояние равновесия динамической системы (1.1) – (1.5) в случае достаточно широких прямоугольных пластинок $\gamma \in [2.9, \infty]$ теряет только лишь статическую устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки, в отличие от удлинённых прямоугольных пластинок [18] и пластинок умеренных размеров [19].

5. Численные результаты. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2)\} \in \Im$, параметризованных в пространстве $\Im$ надлежащим образом.

В этом случае так же, как и в работах [14, 15, 20], критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$ является возрастающей функцией от числа полуволн n: её наименьшему значению соответствует $n = 1$.

Результаты численных исследований показали, что невозмущённое состояние равновесия системы является устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.4) при всех допустимых значениях её «существенных» параметров, в частности, для стальных пластинок относительной толщины $2h^{-1}b \in (0.006,\ 0.015]$.

Подставляя решение $q_{loc.div.} \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ уравнения (4.1) в формулу (2.12), получаем значения приведённой критической скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$, представленные для некоторых допустимых значений параметров системы β_x^2, β_y^2 и ν в таблице 5 при $n = 1$.

Из данных таблицы 5 следует, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ является монотонно убывающей функцией от коэффициента напряжения β_x^2 и от коэффициента Пуассона ν, а от β_y^2 – возрастающей функцией: на промежутке $\beta_x^2 \in [0, 0.6]$ убывает, примерно, в 1.6

– 3.3 раза, а в пластинах из материалов с большим значением ν – примерно, в 3 – 6.4 раза; на промежутке $\beta_y^2 \in [0,5]$ возрастает, примерно, 3.9 – 9.5 раз.

Значения $V_{locdiv} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ при $n = 1$, $\nu = 0.125; 0.25; 0.3; 0.375; 0.5.$ Таблица 5.

β_y^2 \ β_x^2	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
	296.256	272.431	248.446	223.925	199.756	175.549	150.734
	169.912	151.675	137.923	124.337	108.793	94.415	80.069
0.0	143.922	130.123	117.083	103.705	90.398	77.218	64.299
	114.697	103.307	91.706	80.068	68.296	57.271	46.075
	79.677	70.235	60.772	50.813	42.075	32.826	–
	398.015	367.372	336.738	304.434	274.533	243.736	212.339
	230.546	211.702	192.420	173.603	154.319	135.202	116.170
0.5	196.570	178.425	162.591	145.685	129.062	112.042	95.770
	157.617	143.722	129.176	114.981	99.887	86.143	71.524
	113.240	117.821	89.528	77.348	66.314	54.767	43.026
	489.147	455.001	418.960	381.167	343.575	307.970	272.550
	288.543	264.696	241.160	219.110	197'308	174.524	151.879
1.0	246.022	225.670	206.007	185.783	165.935	145.413	126.845
	199.402	182.385	165.194	148.036	130.841	114.576	98.347
	146.541	131.947	116.508	103.911	89.534	76.244	63.214
	582.775	541.211	497.766	456.987	413.415	372.579	330.113
	342.934	316.504	290.408	263.380	239.143	212.666	186.371
1.5	293.345	270.624	247.364	224.308	202.433	179.901	157.901
	239.628	220.182	200.840	180.764	161.750	142.930	123.338
	177.343	161.324	145.803	129.540	113.598	98.516	83.191
	668.793	622.466	575.582	528.761	481.255	434.194	382.745
	394.762	365.817	336.706	308.465	279.508	251.281	222.919
2.0	339.548	313.698	288.367	261.422	238.092	213.056	188.340
	278.047	256.166	234.680	213.005	191.905	170.480	149.446
	206.721	190.144	172.345	154.406	137.150	120.187	103.379
	837.017	780.495	724.155	667.784	610.560	553.060	498.919
	496.528	461.219	427.456	393.811	359.168	325.977	292.805
3.0	428.478	397.956	367.735	337.790	312.625	278.578	249.186
	351.735	327.227	301.447	275.789	250.200	226.058	200.955
	267.045	246.461	225.550	204.921	184.312	164.136	144.216
	1149.753	1077.651	1005.085	932.786	860.492	787.959	716.482
	689.702	645.346	602.115	557.867	515.594	472.275	429.366
5.0	596.008	557.678	521.240	482.099	444.800	407.779	370.374
	495.494	463.859	430.893	398.730	367.017	335.080	303.456
	382.409	355.484	328.580	302.947	277.896	252.023	226.543

При этом, «падение» критического значения коэффициента напряжения $\left(\beta_x^2\right)_{cr}$ вследствие обтекания равно, примерно, 1.6 – 2 раза (табл. 1 и 5): с ростом β_y^2 влияние параметра β_x^2 ослабевает. А из сопоставления данных таблиц 4 и 5 следует, что невозмущённое состояние равновесия системы в случае пластинок относительной толщины $2hb^{-1} \geq 0.012$, когда $\beta_y^2 \geq 1.5$ – устойчиво при всех допустимых значениях остальных параметров.

Соответственно, цепочки переходов состояний системы будут вида [18, 19]:

$\Im_0 \xrightarrow{V_{loc.div}} \Im_{locdiv}$, когда $\beta_y^2 < 1.5$ для всех $2h^{-1}b$ и $\beta_y^2 \geq 1.5$, $2h^{-1}b < 0.012$; (5.1)

$\Im_0$ для $2h^{-1}b \geq 0.012$, когда $\beta_y^2 \geq 1.5$.

Для всех $\gamma \geq 2.9$ при определённом соотношении сжимающих сил N_x и сил растяжения N_y, имеет место эффект их «взаимокомпенсации»: $V_{locdiv}D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ одна и та же, что и при их отсутствии ($N_x = N_y = 0$) (табл.6).

Таблица 6.

β_{xc}^2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
β_{yc}^2	0.063	0.134	0.210	0.301	0.380	0.476

При $\beta_x^2 > \beta_{xc}^2$ и $\beta_y^2 < \beta_{yc}^2$ преимущественное влияние оказывают сжимающие силы N_x, с ростом которых устойчивость системы понижается, и наоборот, при $\beta_x^2 < \beta_{xc}^2$ и $\beta_y^2 > \beta_{yc}^2$ – силы растяжения N_y, приводящие к повышению устойчивости системы.

Из анализа данных таблиц 5 и 6 легко показать, что начиная с $\beta_y^2 \approx 1.26$ имеет место повышение устойчивости системы примерно в 1.1 – 4.14 раза, в сравнении с широкой панелью с ненагруженными краями ($N_x = N_y = 0$).

Заметим, что первоначальные силы растяжения $\left(-N_x\right)$ достаточно широкой пластинки, направленные по потоку газа, приводят к повышению устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы примерно в 1.75 – 3 раза в сравнении с широкой панелью с ненагруженными краями [20].

6. Основные результаты и заключение.

В работе исследуется влияние первоначальных сжимающих сил N_x и сил растяжения N_y, направленных, соответственно, по сверхзвуковому потоку газа и в перпендикулярном направлении, на порог устойчивости невозмущённого состояния равновесия линейной динамической системы «пластинка–поток» на примере достаточно широких прямоугольных пластинок и «полубесконечной пластины–полосы» $\gamma \in \left[2.9, \infty\right]$, в предположении наличия сосредоточенных инерционных масс и моментов поворота на их свободном краю, с целью последующего анализа возможности управления им.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка–поток».

Получены явное выражение дисперсионного уравнения, характеризующего достаточные признаки потери устойчивости и формула, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего потока газа.

С помощью графоаналитических и численных методов анализа произведено разбиение многопараметрического пространства состояний системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Показано, что граница области устойчивости определяется только гиперповерхностью, характеризующей потерю «апериодической устойчивости» в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки, что свидетельствует о «безопасности» границы в смысле Баутина Н.Н. [12]. Отсюда, очевидно, следует, что в исходной задаче, как и в [15, 17, 20], критическая скорость локализованной дивергенции не зависит от параметра отношения коэффициентов, характеризующих сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c. Сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота влияют только на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности её свободного края $x = 0$ [15, 20].

Найдены критические скорости локализованной дивергенции, в предположении, что в пластинке в момент «выпучивания» возникают только напряжения изгиба. Показано, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции является монотонно убывающей функцией от коэффициента сжимающих сил β_x^2 и от коэффициента Пуассона ν, а от коэффициента сил растяжения β_y^2 – монотонно возрастающей функцией: силы сжатия N_x приводят к понижению устойчивости системы, а силы растяжения N_y – наоборот, к повышению устойчивости системы. Определены взаимокомпенсирующие значения коэффициентов напряжений β_x^2 и β_y^2, при которых соответствующие первоначальные силы N_x и N_y не влияют на порог устойчивости системы.

Установлено, что начиная с значения $\beta_y^2 \approx 1.26$ силы растяжения N_y полностью компенсируют влияние сжимающих сил N_x при всех значениях коэффициента Пуассона ν: имеет место повышение устойчивости системы. А также, для всех достаточно широких стальных пластинок относительной толщины $2hb^{-1} \geq 0.012$, когда $\beta_y^2 \geq 1.5$, невозмущённое состояние равновесия системы устойчиво во всём интервале сверхзвуковых скоростей.

Как оказалось, первоначальные силы N_x, направленные по потоку, существенно влияют не только на величину критической скорости, но и на границу области устойчивости, в отличие от сил N_y, направленных в перпендикулярном направлении к скорости потока газа, оказывающим влияние только на величину критической скорости.

Сравнительный анализ результатов данной работы и работ [15, 17, 20] позволяет установить границы применимости метода Эйлера, наряду с применением динамического метода. Сопоставление результатов решения задачи устойчивости динамических систем «пластинка–поток» в случае достаточно широких пластинок и полубесконечной пластины–полосы, полученных применением обоих методов, указывает на их хорошее совпадение. Поэтому, при решении подобных задач применение метода Эйлера, как наиболее удобного и простого, вполне оправдано.

Изложенный в данной работе графоаналитический метод исследования может быть применён для получения аналитического решения широкого класса задач устойчивости упругих систем, в частности, при комбинированном нагружении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел.– М: Наука. 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа // Акустический журнал. 1960. Т. 6. . № 1. С. 124–126.
6. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 38– 46.
7. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
8. Ashley G H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N12. P. 1109–1118.
9. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
10. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука. 1979. 384 с.
11. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
12. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
13. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.– Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
14. *Belubekyan M.V., Martirosyan S.R*. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip, Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65(1). С. 29–34.
15. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.

16. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, сжатой по направлению потока газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 4, с.44–68.
17. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковая дивергенция панели с одним свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в направлении, перпендикулярном скорости потока газа // Труды VIII международной научной конференции "Актуальные проблемы механики сплошной среды"; 1-5 октября, Цахкадзор–2023 (Армения), с. 176–180.
18. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлинённой панели со свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2024. Т.77 (1), с. 40-55.
19. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер прямоугольной пластинки умеренных размеров со свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2024. Т.77 (2), с.
20. Мартиросян С.Р. Об устойчивости широкой панели со свободным краем, растянутой по сверхзвуковому потоку газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов // Изв. НАН Армении, Механика. 2023. Т.76 (1), с. 37–55. DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.1-37.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения, (+374 10) 524890.
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 22.08.2024