

**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С
КОЛЛИНЕАРНЫМИ ТРЕЩИНАМИ И ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ**

Акопян В.Н., Амирджанян А.А.

Ключевые слова: динамическая смешанная краевая задача, включение, трещина, вынужденные колебания

Hakobyan V.N., Amirjanyan A.A.

Forced vibrations of a semi-infinite plate with collinear cracks and rigid inclusions

Keywords: dynamic mixed boundary value problem, inclusion, crack, forced vibrations

The forced vibrations of an elastic semi-infinite plate containing internal, collinear finite cracks and absolutely rigid inclusions parallel to the boundary are considered. Based on the method of discontinuous solutions of the motion equations of the plane theory of elasticity, a governing system of singular integral equations of the problem is derived. The solution of this system is constructed by the numerical-analytical method of mechanical quadratures. In the case when the semi-infinite plate contains one crack and one inclusion, numerical calculations are carried out and the dependences the main physical and mechanical characteristics of the problem as the intensity factors at the end points of the crack, jumps in contact stresses under the inclusion and the angle of rotation of the rigid inclusion on the frequency of forced vibrations, the depth of the crack and inclusion and the distance between them are determined.

Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Ա.Ա.

Եզրին զուգահեռ համագիծ ճաքեր և ներդրակներ պարունակող կիսանսվերջ սալի ստիպողական տատանումները

Հիմնաբառեր. դինամիկ խառը եզրային խնդիր, ներդրակ, ճաքեր, ստիպողական տատանումներ

Դիտարկված է եզրին զուգահեռ, համագիծ ներքին ճաքեր և բարակ կոշտ ներդրակներ պարունակող առաձգական կիսահարթության ստիպողական տատանումները: Առաձգականության տեսության շարժման հավասարումների խզվող լուծումների մեթոդի օգնությամբ ստացված է խնդրի որոշիչ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգը, որի լուծումները կառուցված են մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի թվային-վերլուծական մեթոդով: Այն դեպքում, երբ կիսահարթությունը պարունակում է մեկ ճաք և մեկ կոշտ ներդրակ, կատարվել են թվային հաշվարկներ և պարզվել են խնդրի գլխավոր ֆիզիկամեխանիկական բնութագրիչների՝ ներդրակի ափերի գործող լարումների թռիչքների, ներդրակի պտտման անկյան և ճաքի ծայրակետերում քայքայող լարումների ինտենսիվության գործակիցների փոփոխության օրինաչափությունները՝ կախված ստիպողական տատանումների հաճախականությունից, եզրագծից ունեցած հեռավորությունից ու ճաքի և ներդրակի հարաբերական դիրքից:

Рассмотрены вынужденные колебания упругой полубесконечной пластины, содержащей внутренние, параллельные к границе коллинеарные конечные трещины и абсолютно жесткие включения. На основе метода разрывных решений уравнений движения плоской теории упругости выведена определяющая система сингулярных интегральных уравнений задачи, решение которой построено численно-аналитическим методом механических квадратур. В случае, когда полубесконечная пластина содержит одну трещину и одно включение проведены численные расчеты и определены закономерности изменения главных физико-механических характеристик задачи, каковыми являются коэффициенты интенсивности в концевых точках трещины, скачки контактных напряжений под включением и угол поворота жесткого включения, в зависимости от частоты вынужденных колебаний, глубины залегания трещины и включения и расстояния между ними.

Введение. Смешанные и контактные задачи теории упругости как в статической, так и динамической постановках всегда были и продолжают оставаться одной из развивающихся и важных, с практической точки зрения, областей математической теории упругости. Разработке многих эффективных методов решения динамических смешанных задач для слоистых сред с межфазными дефектами посвящены монографии [1-3], где подытожены многие основополагающие результаты в этом направлении. Укажем также на монографию [4] и работы [5-12], в которых приведены решения ряда плоских и пространственных динамических контактных и смешанных задач для плоскостей, полуплоскостей и полупространств. Отметим, что в монографии [4] и в работах [13-16] решены различные задачи о динамическом взаимодействии различных концентраторов напряжений типа трещин, тонких включений и штампов, одновременно находящихся в массивных однородных или кусочно-однородных телах. Настоящая работа также относится к указанному классу задач и является весьма важной для различных областей науки и техники.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.

Рассмотрим обобщенное плоско-напряженное состояние упругой полуплоскости с коэффициентами Ламе λ_* и μ , которая отнесена к декартовой системе координат Oxy , ось Ox которой параллельна границе полуплоскости и проходит на некоторой глубине h от границы. Пусть на линии $y = 0$ по системе непересекающихся интервалов $L_1 = \bigcup_{k=1}^N (a_k, b_k)$ полуплоскость расслаблена системой параллельных границе трещин конечной длины, а на системе отрезков $L_2 = \bigcup_{k=1}^M (c_k, d_k)$, которые не пересекаются как между собой, так и с отрезками системы L_1 , полуплоскость усилена абсолютно жесткими тонкими включениями. Будем полагать при этом, что полубесконечная пластина деформируется под действием гармонически изменяющихся во времени сосредоточенных сил $P_k e^{i\omega t}$, приложенных к включениям в некоторых точках $x = x_0^{(k)}$ и составляющих с осью Oy углы α_k . Принимается также, что на берега трещин действуют равные по величине и противоположно направленные нормальные нагрузки $-q(x)$, исключаяющие смыкание берегов трещин при деформировании пластины. Исходя из линейности поставленной задачи, как и в [16], представим ее в виде суммы двух задач, в первой из которых берега трещин будем считать свободными от напряжений, а во второй задаче будем считать, что пластина деформируется под воздействием только статических нагрузок, приложенных к берегам трещин. Сначала будем рассматривать только первую, динамическую задачу. Для этого полубесконечную пластину представим как составную, составленную из полосы высоты h и полуплоскости, с линией раздела $y = 0$ и, снабдив индексами 1 и 2 соответственно компоненты напряжений и смещений полосы и полуплоскости, поставленную задачу математически представим в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, h, t) = 0 & (-\infty < x < \infty); \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, h, t) = 0 & (-\infty < x < \infty); \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0, t) = \sigma_y^{(2)}(x, 0, t); \tau_{xy}^{(1)}(x, 0, t) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0, t) & x \notin L_1 \cup L_2; \\ v_1(x, 0, t) = v_2(x, 0, t); u_1(x, 0, t) = u_2(x, 0, t) & x \notin L_1 \cup L_2; \end{cases} \quad (1b)$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0, t) = \sigma_y^{(2)}(x, 0, t) = 0; \tau_{xy}^{(1)}(x, 0, t) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0, t) = 0 & x \in L_1; \\ v_1(x, 0, t) = v_2(x, 0, t) = (v_n + \gamma_n x) e^{i\omega t} & (c_n < x < d_n) \quad (n = 1, N); \\ u_1(x, 0, t) = u_2(x, 0, t) = u_n e^{i\omega t} & (c_n < x < d_n) \quad (n = 1, N). \end{cases} \quad (1c)$$

Здесь, и далее, $\sigma_y^{(j)}(x, y, t)$ ($j = 1, 2$) и $\tau_{xy}^{(j)}(x, y, t)$ ($j = 1, 2$) - нормальные и касательные компоненты напряжений, действующие в полосе и в полуплоскости соответственно, $v_j(x, y, t)$ ($j = 1, 2$) и $u_j(x, y, t)$ ($j = 1, 2$) - нормальные и горизонтальные смещения точек полосы и полуплоскости соответственно, удовлетворяющие уравнениям движения в смещениях, γ_n углы поворотов включений, v_n , u_n ($n = 1, N$) амплитуды нормальных и горизонтальных смещений включений. Учитывая гармонический характер напряженно-деформированного состояния, в (1) по формулам $f(x, y, t) = f(x, y) e^{i\omega t}$ перейдем к амплитудам и введём в рассмотрение амплитуды неизвестных функций разности смещений точек берегов трещин $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и скачков напряжений на длинных сторонах включений $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$:

$$\begin{aligned} v_1(x, 0) - v_2(x, 0) &= \varphi_1(x); \quad u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = \varphi_2(x); \quad (x \in L_1); \\ \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma_y^{(2)}(x, 0) &= \varphi_3(x); \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = \varphi_4(x) \quad (x \in L_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Затем рассмотрим вспомогательную задачу, состоящую из условий (1.1a), (1.1б) и (1.2). Решив указанную вспомогательную задачу, мы построим разрывные решения уравнений движения для полуплоскости с дефектами типа трещин и включений и определим амплитуды компонент напряжений и смещений на линии полуплоскости $y = 0$ через введённые функции скачков. Для этого будем использовать представления для амплитуд смещений и амплитуд напряжений в виде интегралов Фурье, приведенные в [16]. При помощи этих представлений удовлетворим условиям вспомогательной граничной задачи (1.1a), (1.1б) и (1.2). В итоге, для определения неизвестных коэффициентов придем к следующей системе уравнений

$$\begin{cases}
-2ik\chi_1 (B_1^{(1)}(k) - A_1^{(2)}(k)) + (k^2 + \chi_2^2)(C_1^{(1)}(k) - C_1^{(2)}(k)) = \bar{\varphi}_4(k) \\
(k^2 + \chi_2^2)[A_1^{(1)}(k) - A_1^{(2)}(k)] + 2ik\chi_2 [D_1^{(1)}(k) - C_1^{(2)}(k)] = \bar{\varphi}_3(k) \\
-ikA_1^{(1)}(k) + \chi_2 D_1^{(1)}(k) + ikA_1^{(2)}(k) - \chi_2 C_1^{(2)}(k) = \bar{\varphi}_2(k) \\
\chi_1 B_1^{(1)}(k) + ikC_1^{(1)}(k) - \chi_1 A_1^{(2)}(k) - ikC_1^{(2)}(k) = \bar{\varphi}_1(k) \\
(k^2 + \chi_2^2)[A_1^{(1)}(k)ch(\chi_1 h) + B_1^{(1)}(k)sh(\chi_1 h)] + \\
+ 2ik\chi_2 [C_1^{(1)}(k)sh(\chi_2 h) + D_1^{(1)}(k)ch(\chi_2 h)] = 0; \\
-2ik\chi_1 [A_1^{(1)}(k)sh(\chi_1 h) + B_1^{(1)}(k)ch(\chi_1 h)] + \\
+ (k^2 + \chi_2^2)[C_1^{(1)}(k)ch(\chi_2 h) + D_1^{(1)}(k)sh(\chi_2 h)] = 0
\end{cases} \quad (3)$$

где $A_1^{(j)}(k)$, $B_1^{(1)}(k)$, $C_1^{(j)}(k)$ и $D_1^{(1)}(k)$ ($j=1,2$) неизвестные постоянные, подлежащие определению,

$$\chi_m = \sqrt{k^2 - (\omega / c_m)^2} \quad (m=1,2); \quad (j=1,2); \quad c_1^2 = c_2^2 / \theta; \quad \theta = (1-\nu) / 2,$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda_* + 2\mu}{\rho}}; \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \quad \lambda_* = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$\bar{\varphi}_j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(x) e^{ikx} dx \quad (j=1-4).$$

а c_i ($j=1,2$) – скорости распространения упругих волн в полуплоскости. При этом выбраны те ветви функций $\chi_i(k)$ ($i=1,2$), которые обеспечивают затухание волн на бесконечности, т.е. ведут себя как $|k|$ [17].

Решим систему (5) и определим неизвестные постоянные через образы Фурье скачков напряжений на берегах включений и компоненты дислокаций смещений на трещинах. После чего определим напряжения на берегах трещин и производные от смещений на длинных сторонах включений через неизвестные функции скачков напряжений и дислокации смещений. Получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_y^{(2)}(x,0)}{\mu} = & -\frac{1}{2}\varphi_3(x) + \frac{1-\theta}{\pi} \int_{L_1} \frac{\varphi_1(s) ds}{s-x} + \frac{\theta}{2\pi\mu} \int_{L_2} \frac{\varphi_4(s) ds}{s-x} + \\
& + \sum_{i=1}^2 \int_{L_1} \mathcal{Q}_{1,i}(x-s)\varphi_i(s) ds + \frac{1}{\mu} \sum_{i=3}^4 \int_{L_2} \mathcal{Q}_{1,i}(x-s)\varphi_i(s) ds \quad (-\infty < x < \infty)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xy}^{(2)}(x, 0)}{\mu} &= -\frac{1}{2}\varphi_4(x) + \frac{1-\theta}{\pi} \int_{L_1} \frac{\varphi_2(s) ds}{s-x} - \frac{\theta}{2\pi\mu} \int_{L_2} \frac{\varphi_3(s) ds}{s-x} + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{L_1} \mathcal{Q}_{2,i}(x-s)\varphi_i(s) ds + \frac{1}{\mu} \sum_{i=3}^4 \int_{L_2} \mathcal{Q}_{2,i}(x-s)\varphi_i(s) ds; \quad (-\infty < x < \infty) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} v_2'(x, 0) &= -\frac{1}{2}\varphi_1(x) - \frac{\theta}{\pi} \int_{L_1} \frac{\varphi_2(s) ds}{s-x} - \frac{1+\theta}{4\pi} \int_{L_2} \frac{\varphi_3(s) ds}{s-x} + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{L_1} \mathcal{Q}_{3,i}(x-s)\varphi_i(s) ds + \frac{1}{\mu} \sum_{i=3}^4 \int_{L_2} \mathcal{Q}_{3,i}(x-s)\varphi_i(s) ds; \quad (-\infty < x < \infty) \\ u_2'(x, 0) &= -\frac{1}{2}\varphi_2(x) + \frac{\theta}{2\pi} \int_{L_1} \frac{\varphi_1(s) ds}{s-x} - \frac{1+\theta}{4\pi} \int_{L_2} \frac{\varphi_4(s) ds}{s-x} + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{L_1} \mathcal{Q}_{4,i}(x-s)\varphi_1(s) ds + \frac{1}{\mu} \sum_{i=3}^4 \int_{L_2} \mathcal{Q}_{4,i}(x-s)\varphi_3(s) ds \quad (-\infty < x < \infty). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{1,1}(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{-R_2^+ (\beta^2 e^{-2\alpha_1 hk} + \alpha_1 \alpha_2 e^{-2\alpha_2 hk}) + 4\alpha_1 \alpha_2 \beta^2 e^{-hk(\alpha_1 + \alpha_2)} + (R_2^-)^2}{\alpha_1 \eta R_2^-} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\theta}{2} \right\} \sin kx dk; \\ \mathcal{Q}_{1,2}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{2\beta R_2^+ (e^{-\alpha_1 hk} - e^{-\alpha_2 hk})^2}{\eta R_2^-} \right\} \cos kx dk; \\ \mathcal{Q}_{1,3}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} - \frac{4\beta R_1^+ e^{-hk(\alpha_1 + \alpha_2)} - 2R_2^+ (\beta e^{-2\alpha_1 hk} + e^{-2\alpha_2 hk}) + \eta R_2^-}{2\eta R_2^-} \right\} \cos kx dk; \\ \mathcal{Q}_{1,4}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{R_2^+ (\beta e^{-2\alpha_1 hk} + \alpha_1 \alpha_2 e^{-2\alpha_2 hk}) - 2\alpha_1 \alpha_2 \beta (\beta + 1) e^{-hk(\alpha_1 + \alpha_2)} - R_1^- R_2^-}{\alpha_1 \eta R_2^-} + \frac{\theta}{2} \right\} \sin kx dk \\ \mathcal{Q}_{3,1} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{-4\beta R_1^+ e^{-hk(\alpha_1 + \alpha_2)} + 2R_2^+ (\beta e^{-2\alpha_1 hk} + e^{-2\alpha_2 hk}) + \eta R_2^-}{\eta R_2^-} \right\} \cos kx dk; \end{aligned}$$

$$Q_{3,2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{-R_2^+ (\beta e^{-2\alpha_2 hk} + \alpha_1 \alpha_2 e^{-2\alpha_1 hk}) + 2\alpha_1 \alpha_2 \beta (\beta + 1) e^{-hk(\alpha_1 + \alpha_2)} + R_1^- R_2^-}{\alpha_2 \eta R_2^-} - \frac{\theta}{2} \right\} \sin kx dk;$$

$$Q_{3,3} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{R_2^+ (\alpha_1 \alpha_2 e^{-2\alpha_1 hk} + e^{-2\alpha_2 hk}) - 4\alpha_1 \alpha_2 \beta e^{-hk(\alpha_1 + \alpha_2)} - R_0^- R_2^-}{\alpha_2 \eta R_2^-} + \frac{1 + \theta}{2} \right\} \sin kx dk;$$

$$Q_{3,4} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{R_2^+ (e^{-2\alpha_1 hk} + e^{-2\alpha_2 hk}) - 2\beta R_0^+ e^{-hk(\alpha_1 + \alpha_2)}}{2\eta R_2^-} \right\} \cos kx dk;$$

$$Q_{1,1}(x) = Q_{22}(x); Q_{1,2}(x) = -Q_{2,1}(x); Q_{1,3}(x) = Q_{2,4}(x); Q_{1,4}(x) = -Q_{2,3}(x);$$

$$Q_{3,1} = Q_{4,2}(x); Q_{3,2} = -Q_{4,1}(x); Q_{3,3} = Q_{44}(x); Q_{3,4} = Q_{44}(x); \eta = (\omega / k c_2)^2;$$

$$\beta = 1 - \eta / 2; \alpha_1 = \sqrt{1 - \theta \eta}; \alpha_2 = \sqrt{1 - \eta}; R_i^{\pm} = \beta^i \pm \alpha_1 \alpha_2 \quad (i = 0, 1, 2).$$

Далее, при помощи представлений (4) и (5), удовлетворим условиям на дефектах (1с), предварительно продифференцировав последние два из них. В итоге, учитывая, что $\varphi_j(x) = 0$ ($j = 1, 2$) на включениях и $\varphi_j(x) = 0$ ($j = 3, 4$) на трещинах равны нулю, для определения компонентов дислокации смещений на трещинах и скачков напряжений на длинных сторонах включений придем к следующей системе сингулярных интегральных уравнений первого рода:

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \theta}{\pi} \int_{L_1} \frac{\varphi_1(s) ds}{s - x} + \frac{\theta}{2\pi\mu} \int_{L_2} \frac{\varphi_4(s) ds}{s - x} + \sum_{i=1}^2 \int_{L_1} Q_{1,i}(x - s) \varphi_i(s) ds + \\ & + \frac{1}{\mu} \sum_{i=3}^4 \int_{L_2} Q_{1,i}(x - s) \varphi_i(s) ds = 0 \quad (x \in L_1) \\ & \frac{1 - \theta}{\pi} \int_{L_1} \frac{\varphi_2(s) ds}{s - x} - \frac{\theta}{2\pi\mu} \int_{L_2} \frac{\varphi_3(s) ds}{s - x} + \sum_{i=1}^2 \int_{L_1} Q_{2,i}(x - s) \varphi_i(s) ds + \\ & + \frac{1}{\mu} \sum_{i=3}^4 \int_{L_2} Q_{2,i}(x - s) \varphi_i(s) ds = 0; \quad (x \in L_1) \\ & -\frac{\theta}{\pi} \int_{L_1} \frac{\varphi_2(s) ds}{s - x} - \frac{1 + \theta}{4\pi\mu} \int_{L_2} \frac{\varphi_3(s) ds}{s - x} + \sum_{i=1}^2 \int_{L_1} Q_{3,i}(x - s) \varphi_i(s) ds + \\ & + \frac{1}{\mu} \sum_{i=3}^4 \int_{L_2} Q_{3,i}(x - s) \varphi_i(s) ds = \gamma_n \quad (c_n < x < d_n; n = 1 - M) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\theta}{2\pi} \int_{L_1} \frac{\varphi_1(s) ds}{s-x} - \frac{1+\theta}{4\pi\mu} \int_{L_2} \frac{\varphi_4(s) ds}{s-x} + \sum_{i=1}^2 \int_{L_1} Q_{4,i}(x-s) \varphi_i(s) ds + \frac{1}{\mu} \sum_{i=3}^4 \int_{L_2} Q_{4,i}(x-s) \varphi_i(s) ds = 0 \quad (x \in L_2)$$

Систему (6) будем рассматривать при условиях непрерывности смещений в концевых точках трещин

$$\int_{a_k}^{b_k} \varphi_j(x) dx = 0 \quad (j=1,2; k=1-N) \quad (7)$$

и условиях равновесия включений, которые, без учета их масс, можно написать следующим образом:

$$\int_{c_k}^{d_k} \varphi_3(x) dx = P_k \cos \alpha; \quad \int_{c_k}^{d_k} \varphi_4(x) dx = P_k \sin \alpha; \quad (8)$$

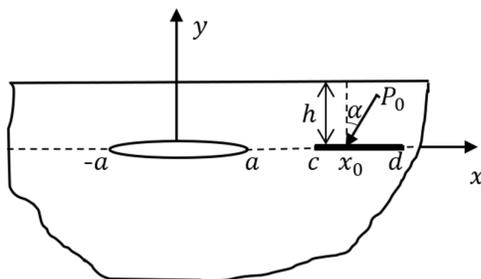
$$\int_{c_k}^{d_k} x \varphi_3(x) dx = x_0^{(k)} P_k \cos \alpha_k \quad (k=1-M.)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений (6) при условиях (7) и (8). Что же касается второй, статической задачи, то ее определяющую систему уравнений можно получить из системы (6), приняв в ней $\omega = 0$ и приравняв правую часть первого уравнения (6) к $-q(x)$. При этом условия (7) не изменяются, а в условиях (8) правые части нужно приравнять к нулю.

В дальнейшем, для простоты, будем рассматривать случай, когда полуплоскость содержит только одну трещину и одно включение и берега трещины свободны от напряжений.

2. Вынужденные колебания полубесконечной пластины с одной трещиной и одним коллинеарным включением

Рассмотрим случай, когда полуплоскость на некоторой глубине h от границы содержит одну трещину на интервале $L_1 = (-a, a)$ и одно включение на интервале $L_2 = (c, d)$, $(a < c)$ и деформируется под воздействием гармонически изменяющейся во времени сосредоточенной силы $P_0 e^{i\omega t}$, приложенной к включению в некоторой точке $x = x_0$ и составляющей с осью Oy угол α (Фиг.1).



Фиг.1

В указанном случае система (6) и условия (7) и (8) примут вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{1-\theta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi_1(s) ds}{s-x} + \frac{\theta}{2\pi\mu} \int_c^d \frac{\varphi_4(s) ds}{s-x} + \sum_{i=1}^2 \int_{-a}^a Q_{1,i}(x-s) \varphi_i(s) ds + \\
& + \frac{1}{\mu} \sum_{i=3}^4 \int_c^d Q_{1,i}(x-s) \varphi_i(s) ds = 0 \quad (-a < x < a) \\
& \frac{1-\theta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi_2(s) ds}{s-x} - \frac{\theta}{2\pi\mu} \int_c^d \frac{\varphi_3(s) ds}{s-x} + \sum_{i=1}^2 \int_{-a}^a Q_{2,i}(x-s) \varphi_i(s) ds + \\
& + \frac{1}{\mu} \sum_{i=3}^4 \int_c^d Q_{2,i}(x-s) \varphi_i(s) ds = 0; \quad (-a < x < a) \\
& - \frac{\theta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi_2(s) ds}{s-x} - \frac{1+\theta}{4\pi\mu} \int_c^d \frac{\varphi_3(s) ds}{s-x} + \sum_{i=1}^2 \int_{-a}^a Q_{3,i}(x-s) \varphi_i(s) ds + \\
& + \frac{1}{\mu} \sum_{i=3}^4 \int_c^d Q_{3,i}(x-s) \varphi_i(s) ds = \gamma \quad (c < x < d) \\
& \frac{\theta}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi_1(s) ds}{s-x} - \frac{1+\theta}{4\pi\mu} \int_c^d \frac{\varphi_4(s) ds}{s-x} + \sum_{i=1}^2 \int_{-a}^a Q_{4,i}(x-s) \varphi_i(s) ds \\
& + \frac{1}{\mu} \sum_{i=3}^4 \int_c^d Q_{4,i}(x-s) \varphi_i(s) ds = 0 \quad (c < x < d) \\
& \int_{-a}^a \varphi_j(x) dx = 0 \quad (j=1,2); \quad \int_c^d \varphi_3(x) dx = P_0 \cos \alpha; \\
& \int_c^d \varphi_4(x) dx = P_0 \sin \alpha; \quad \int_c^d x \varphi_3(x) dx = x_0 P_0 \cos \alpha.
\end{aligned} \tag{9}$$

Решение системы (9) будем строить численно аналитическим методом механических квадратур [18]. Для этого при помощи замены переменных $x = a\eta$, в первых двух уравнениях (9) и $x = c_0 + d_0\eta$, $c_0 = (c+d)/2$, $d_0 = (d-c)/2$ в последних двух уравнениях (9), перейдем на интервал $(-1,1)$ и введя обозначения

$$\psi_j(\eta) = \varphi_j(a\eta) \quad (j=1,2); \quad \psi_j(\eta) = \varphi_j(c_0 + d_0\eta)/\mu \quad (j=3,4),$$

придем к системе

$$\frac{q_j}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j(\xi) d\xi}{\xi - \eta} + \sum_{i=1}^4 \int_{-1}^1 Q_{1,i}^*(\eta, \xi) \psi_i(\xi) d\xi = f_j(\eta) \quad (j=1,4), \quad (11)$$

где введены обозначения:

$$Q_{1,i}^*(\eta, \xi) = aQ_{1,i}(a(\eta - \xi)) \quad (j=1,2); \quad Q_{1,3}^*(\eta, \xi) = d_0Q_{1,3}(a\eta - d_0\xi - c_0);$$

$$Q_{1,4}^*(\eta, \xi) = \frac{\theta d_0}{2\pi(c_0 + d_0\xi - a\eta)} + d_0Q_{1,4}(a\eta - d_0\xi a - c_0);$$

$$Q_{2,i}^*(\eta, \xi) = aQ_{2,i}(a(\eta - \xi)) \quad (i=1,2); \quad Q_{2,4}^*(\eta, \xi) = d_0Q_{2,4}(a\eta - d_0\xi - c_0);$$

$$Q_{2,3}^*(\eta, \xi) = -\frac{\theta\mu_*d_0}{2\pi(c_0 + d_0\xi - a\eta)} + \mu_*d_0Q_{2,3}(a\eta - d_0\xi - c_0);$$

$$Q_{3,1}^*(\eta, \xi) = aQ_{3,1}(d_0\xi - a\eta + c_0); \quad Q_{3,i}^*(\eta, \xi) = \mu_*d_0Q_{3,i}(d_0(\eta - \xi)) \quad (j=1,2);$$

$$Q_{3,2}^*(\eta, \xi) = aQ_{3,2}(d_0\eta - a\xi + c_0) - \frac{\theta}{2\pi(\xi - d_0^*\eta - c_0^*)};$$

$$Q_{4,1}^*(\eta, \xi) = aQ_{4,1}(d_0\eta - a\xi + c_0) + \frac{a\theta}{2\pi(a\xi - d_0\eta - c_0)};$$

$$Q_{4,2}^*(\eta, \xi) = aQ_{4,2}(d_0\eta - a\xi + c_0); \quad Q_{4,i}^*(\eta, \xi) = d_0Q_{4,i}(d_0(\eta - \xi)) \quad (j=3,4);$$

$$q_1 = q_2 = 1 - \theta; \quad q_3 = q_4 = -(1 + \theta); \quad d_0^* = d_0/a; \quad c_0^* = c_0/a; \quad x_0^* = x_0/a;$$

$$P_0^* = P_0/\mu a; \quad f_j(\eta) = 0 \quad (j=1,2,4); \quad f_3(\eta) = \gamma.$$

Условия (10), при этом, примут вид:

$$\int_{-1}^1 \psi_j(\xi) d\xi = 0 \quad (j=1,2); \quad \int_{-1}^1 \psi_3(\xi) d\xi = \frac{P_0^* \cos \alpha}{d_0^*};$$

$$\int_{-1}^1 \psi_4(\xi) d\xi = \frac{P_0^* \sin \alpha}{d_0^*}; \quad \int_{-1}^1 \xi \psi_3(\xi) d\xi = \frac{(x_0^* - c_0^*) P_0^* \cos \alpha}{(d_0^*)^2}. \quad (12)$$

Очевидно, что искомые функции в конечных точках интервала интегрирования имеют обычную корневую особенность. Поэтому их представим в виде:

$$\psi_i(\eta) = \frac{\psi_i^*(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} \quad (i=1,4), \quad (13)$$

где $\psi_i^*(\eta)$ ($i=1,4$)- регулярные, гладкие и ограниченные на замкнутом интервале $[-1,1]$ функции.

Далее, подставляя значение функций $\psi_i(\eta)$ ($i=1,4$) из (13) в систему (11) и условия (12), по обычной процедуре [18], для определения значений функций $\psi_i^*(\eta)$ ($i=1,4$) в точках коллокации ξ_i ($i=1,2,\dots,n$) придём к системе алгебраических уравнений. После определения решения полученной системы функции $\psi_i^*(\xi_j)$ ($i=1,4; j=1,n$), по формулам

$$\psi_j(\eta) = \frac{1}{n\sqrt{1-\eta^2}} \sum_{i=1}^n \frac{\psi_i^*(\xi_i) T_n(\eta)}{(\eta-\xi_i) U_{n-1}(\xi_i)}, \quad (14)$$

где $\xi_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}$ - корни полинома Чебышева первого рода $T_n(x)$, можно

восстановить функции $\psi_i(t)$ ($i=1,4$) и определить все необходимые физико-механические величины, представляющие интерес. В частности, безразмерное раскрытие трещины определится по формуле :

$$v_*(\eta) = v(a\eta)/a = \int_{-1}^{\eta} \psi_1(\xi) d\xi. \quad (15)$$

Для определения модулей динамических коэффициентов интенсивности в конечных точках трещины используем формулы для модулей напряжений (4), рассматривая их вне трещины и включения, которые в новых обозначениях можно записать в виде:

$$\sigma_*(\eta) = \frac{\sigma_y^{(2)}(a\eta, 0)}{\mu} = \frac{(1-\theta)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_1(\xi) d\xi}{\xi-\eta} + F_1(\eta) \quad (|\eta| > 1) \quad (16)$$

$$\tau_*(\eta) = \frac{\tau_{xy}^{(2)}(a\eta, 0)}{\mu} = \frac{1-\theta}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_2(\xi) d\xi}{\xi-\eta} + F_2(\eta) \quad (|\eta| > 1)$$

где функции $F_j(\eta)$ ($j=1,2$) ограничены на концах трещины $\eta = \pm 1$.

Подставляя в (16) значения функций $\psi_j(\eta)$ ($j=1,2$) из (14) и учитывая значение интеграла [19]

$$\int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{a^2-s^2}(s-x)} = -\frac{\pi \operatorname{sign} x}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (|x| > a)$$

для приведенных компонентов разрушающих напряжений получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_*(\eta) &= -\frac{(1-\theta)\text{sign}(\eta)\psi_1(\pm 1)}{\sqrt{\eta^2-1}} + F_1(\eta) \quad (|\eta| > 1, j=1,2) \\ \tau_*(\eta) &= -\frac{(1-\theta)\text{sign}(\eta)\psi_2(\pm 1)}{\sqrt{\eta^2-1}} + F_2(\eta) \quad (|\eta| > 1, j=1,2),\end{aligned}\tag{17}$$

Отсюда, для определения коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений получим формулы:

$$\begin{aligned}K_I(\pm 1) &= 2\pi \lim_{t \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{|\eta \mp 1|} \sigma_*(\eta) = \mp \sqrt{2} (1-\theta) \psi_1(\pm 1); \\ K_{II}(\pm 1) &= 2\pi \lim_{t \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{|\eta \mp 1|} \tau_*(\eta) = \mp \sqrt{2} (1-\theta) \psi_2(\pm 1).\end{aligned}\tag{18}$$

Напишем также формулы для определения контактных напряжений на длинных сторонах включений. Для этого опять используем формулы (4) на включениях, которые при помощи функций $\psi_j(\eta)$ ($j=1,4$) записываются так:

$$\begin{aligned}\frac{a\sigma_y^{(j)}(a\eta, 0)}{P_0} &= (-1)^{j+1} \frac{1}{2} \psi_3(\eta) + \frac{1-\theta}{\pi\mu_*} \int_{-1}^1 \frac{\psi_1(\xi) d\xi}{\xi - d_0^* \eta - c_0^*} + \frac{\theta}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_4(\xi) d\xi}{\xi - \eta} + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \frac{a}{\mu_*} \int_{-1}^1 \mathcal{Q}_{1,i}(d_0 \eta - a\xi + c_0) \psi_i(\xi) d\xi + \sum_{i=3}^4 d_0 \int_{-1}^1 \mathcal{Q}_{1,i}(d_0(\eta - \xi)) \psi_i(\xi) d\xi \\ \frac{a\tau_{xy}^{(j)}(c_0 + d_0 \eta, 0)}{P_0} &= (-1)^{j+1} \frac{1}{2} \psi_4(\eta) + \frac{1-\theta}{\pi\mu_*} \int_{-1}^1 \frac{\psi_2(\xi) d\xi}{\xi - d_0^* \eta - c_0^*} - \frac{\theta}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_3(\xi) d\xi}{\xi - \eta} + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \frac{a}{\mu_*} \int_{-1}^1 \mathcal{Q}_{2,i}(a(d_0^* \eta - \xi + c_0^*)) \psi_i(\xi) d\xi + \sum_{i=3}^4 d_0 \int_{-1}^1 \mathcal{Q}_{2,i}(d_0(\xi - \eta)) \varphi_i(s) ds;\end{aligned}\tag{19}$$

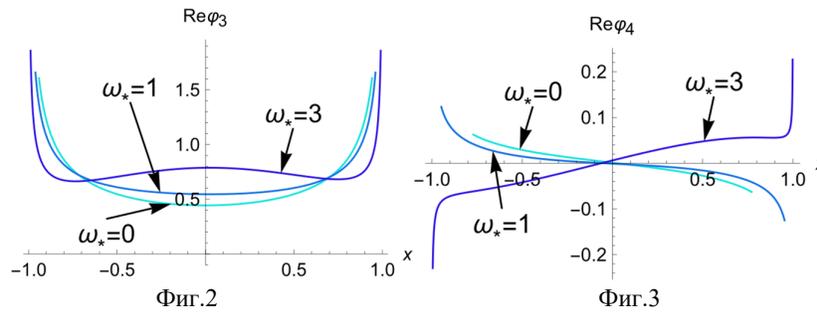
$$(|\eta| < 1; j=1,2)$$

3. Численные расчеты

В случае, когда полуплоскость содержит одну трещину и одно включение проведены численные расчеты и выявлены закономерности изменения действительных частей скачков амплитуд приведенных нормальных и касательных контактных напряжений, действующих на длинные стороны включения, $\text{Re} \psi_j(x)$ ($j=3,4$), модуля угла поворота включения $\gamma_* = |\gamma|$ и безразмерных динамических коэффициентов интенсивности $|K_I^*(\pm 1)|$ и $|K_{II}^*(\pm 1)|$, в зависимости от приведенной частоты вынужденных колебаний $\omega_* = \omega / ac_2$, расстояния между включением и трещиной, описываемого приведенным параметром $k_0 = c_0 / a$, и от

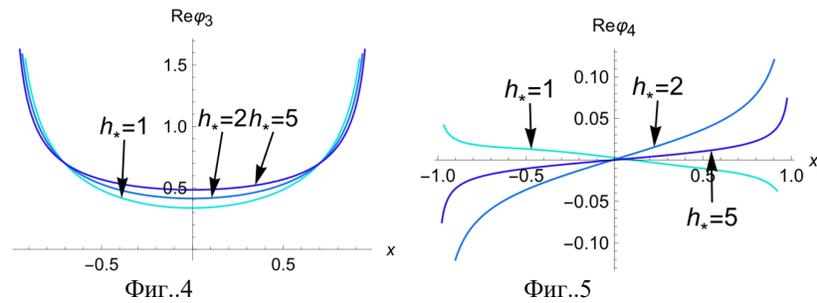
приведенной глубины залегания трещины и включения $h_* = h/a$ в моменты времени $t_k = 2\pi k / \omega$ ($k = 1, 2, \dots$). При этом считается, что включение, как и трещина, имеет ширину $2a$, сосредоточенная нагрузка приложена в точке с приведенной координатой k_0 , т.е. в центре включения, $q(x) = 0$, $\nu = 0.3$, $P_0^* = P / \mu a = 0.5$.

На Фиг.2 и 3 соответственно приведены графики действительных частей амплитуд скачков нормальных и касательных контактных напряжений на длинных сторонах включения в зависимости от приведенной частоты вынужденных колебаний ω_* , когда $\alpha = 0$ и $h_* = 2$,



Из них видно, что действительная часть скачка нормальных контактных напряжений при увеличении приведенной частоты колебаний в средней части включения увеличивается. Скачок касательных напряжений при этом сначала меняет знак, а затем по абсолютной величине увеличивается.

На Фиг. 4 и 5 приведены графики действительных частей амплитуд контактных напряжений в зависимости от приведенной глубины залегания трещины h_* , когда $k_0 = 3, \omega_* = 0.3$.



Из них явствует, что амплитуды скачков нормальных контактных напряжений с увеличением глубины залегания трещины в центральной части включения также увеличиваются, стремясь к определенному предельному распределению, соответствующему случаю, когда трещина и включение находятся в бесконечной

пластине. Скачок касательных напряжений, при этом сначала меняет направление и далее также стремится к указанному предельному распределению.

В таблицах 1 и 2 соответственно приведены значения абсолютной величины угла поворота включения в зависимости от приведенной частоты вынужденных колебаний ω_* , когда $h_* = 2$, $k_0 = 3$ и в зависимости от расстояния включения от трещины k_0 , когда $h_* = 2$, $\omega_* = 0.5$.

Таблица 1. Модули угла поворота включений γ_* в зависимости от ω_*

ω_*	0	0.3	0.5	1	2	3
γ_*	0.0050	0.0095	0.0099	0.0102	0.0054	0.0122

Таблица 2. Модули угла поворота включений γ_* в зависимости от k_0

k_0	2.25	3	5	7	10	20
γ_*	0.0211	0.0099	0.0056	0.0028	0.0023	0.0018

Они показывают, что при увеличении частоты вынужденных колебаний изменение абсолютной величины угла поворота включений γ_* носит волнообразный характер (таб.1). При увеличении же расстояния между трещиной и включением, как и следовало ожидать, абсолютная величина угла поворота включений уменьшаясь стремится к нулю (таб.2).

В таблице 3 приведены значения модулей приведенных динамических коэффициентов интенсивности в концевых точках трещины в зависимости от приведенной частоты вынужденных колебаний ω_* , когда $h_* = 2$, $k_0 = 3$.

Таблица 3. Модули динамических коэффициентов интенсивности

ω_*	0.3	0.5	1	2	5
$ K_I(1) $	0.0437	0.1025	0.0325	0.0117	0.0305
$ K_I(-1) $	0.0732	0.0995	0.0644	0.0091	0.0537
$ K_{II}(1) $	0.0506	0.0124	0.0592	0.0804	0.0373
$ K_{II}(-1) $	0.0733	0.0995	0.0644	0.0090	0.0537

Из них видно, что при увеличении частоты вынужденных колебаний изменение абсолютных величин динамических коэффициентов интенсивности, также, как и угла поворота включений γ_* , носит волнообразный характер (таб.3).

Заключение

Таким образом изучены вынужденные колебания упругой полубесконечной пластины с параллельной к границе системой коллинеарных трещин и абсолютно жестких, тонких включений, деформируемой под действием периодически изменяющейся во времени сосредоточенной нагрузки, приложенной к включениям. В случае, когда имеется только одна трещина и одно тонкое включение проведены численные расчеты и выявлены закономерности изменения действительных частей скачков контактных напряжений, действующих на длинных сторонах включения, абсолютной величины угла поворота включения и абсолютных величин динамических коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины в зависимости от частоты вынужденных колебаний, приведенной глубины залегания концентраторов напряжения, а также от расстояния между трещиной и включением. Показано, что при увеличении частоты вынужденных колебаний изменение абсолютных величин как динамических коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины, так и угла поворота включения носят волнообразный характер.

Исследование выполнено при финансовой поддержке КН МОН РА в рамках научного проекта 21Т-2С257

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович Н.Н., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
2. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984.
3. Абрамян Б.Л. Пространственные задачи теории упругости // НАН РА Ереван, 1998, 274с.
4. Nakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies, Advanced Structured Materials, Volume 181, Springer 2022, 397p.
5. Бабешко В.А. К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // ДАН СССР. 1989. Т.207. No2. С.324–327.
6. Бабешко В.А. Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. No3. С.5–9
7. Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р.Т. К решению задачи о виб-рации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // Докл. РАН. 2002. Т.382. No5. С.625–628.
8. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т.68. Вып.3. С.500–507.
9. Буряк В.Г. Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости. МТТ, Изв.АН СССР, 1972, №6, с. 155-159.
10. Григорян Э.Х. О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими накладками. МТТ, Изв.АН СССР, 1972, №5, с. 101-116.

11. Зильберглейт А.С., Златина И.Н. Динамическая контактная задача для полуплоскости и полупространства. Изв. АН АрмССР, 1978, т.31, №3, с. 18-30.
12. Brock, L.M., Georgiadis, H.G., 1994. Dynamic frictional indentation of an elastic half-plane by a rigid punch. J. Elasticity 35, 223-249.
13. Накобян В.Н., Сахакян А.В., Саргсян А.Н. The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading. Труды V Межд. конф. “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”, Горис, 1-7 октября, 2005.р.56-60.
14. Акопян Л.В., Амирджян А.А., Саакян А.В. Влияние колеблющегося на границе упругой полуплоскости жесткого штампа на напряженное состояние вокруг внутреннего жесткого тонкого включения, Труды XX -ой межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов наДону, 18-21 июня 2020, ст. 29-33.
15. Акопян В.Н., Амирджян А.А., Акопян Л.В. Вынужденные сдвиговые колебания штампа на границе составного полупространства с межфазными дефектами. Известия НАН РА, Механика, т.72, № 2, 2019г, с. 6-23.
16. Акопян В.Н., Амирджян А.А. Вынужденные колебания полубесконечной пластины с системой параллельных к границе коллинеарных трещин // Известия НАН РА, Механика, т.77, № 2, 2024г, с. 12-24.
17. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа.- Н: Мир, 1962. 279ст.
18. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
19. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды.- М.: Наука, 1981.- 738с. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and series.// Moscow. Nauka. 1981. 738p. (in Russian)

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук., проф., гл.н.с. Института механики НАН РА, тел.: (37491) 350222, e-mail: vhakobyan@sci.am

Амирджян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук., в.н.с. Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: amirjanvan@gmail.com

Поступила в редакцию 08.10.2024