

**ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КРИТИЧЕСКУЮ СКОРОСТЬ
СВЕРХЗВУКОВОГО ФЛАТТЕРА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ**

Микилян М.А., Амбарцумян А.Г., Варданян И.А.

Ключевые слова: Линейный сверхзвуковой флаттер, критическая скорость.

Mikilyan M.A., Hambartsumyan H.H., Vardanyan I.A.
Effect of magnetic field on the critical speed of supersonic flutter of a dielectric plate

Keywords: Linear supersonic flutter, Critical speed.

This paper devotes to the investigation of the critical magnetoaeroelastic behavior of dielectric rectangular isotropic plates, described by constitutive equations. The resulting magnetoaeroelastic stability and dynamic models help determine the total perturbed pressure caused by the free-stream flow of perfectly conducting supersonic gas and the magnetic field, as well as the critical flutter velocity. The analytical description presented here is a generalization of the well-known formula obtained on the basis of the “piston theory” in the classical theory of gas dynamics in the case of magnetohydrodynamic flow around elastic shells. Along with analytical solutions, parametric studies are presented on the influence of the magnetic field on the flutter boundary.

Միկիլյան Մ.Ա., Համբարձումյան Հ.Հ., Վարդանյան Ի.Ա.
Մագնիսական դաշտի ազդեցությունը դիէլեկտրիկ սալի գերձայնային ֆլատերի կրիտիկական արագության վրա

Բանալի բառեր: Գծային գերձայնային ֆլատեր, կրիտիկական արագություն

Աշխատանքը նվիրված է դիէլեկտրիկ ուղղանկյուն իզոտրոպ սալի մագնիսա-աէրո-առաձգական վարքի ուսումնասիրությանը: Կառուցված մագնիսա-աէրո-առաձգական կայունության և դինամիկ մոդելները օգնում են որոշել ընդհանուր աէրոառաձգական ճնշումը, որն առաջանում է իզոտրոպ սալի վրա մագնիսական դաշտի առկայությամբ իդեալական հաղորդիչ գազի գերձայնային հոսանքով շրջոսվելիս, որոշված է նաև ֆլատերի կրիտիկական արագությունը: Այստեղ ներկայացված անալիտիկ ներկայացումը «մխոցային տեսության» հայտնի բանաձևի ընդհանրացումն է, որը ստացվել է մագնիսահիդրոդինամիկական շրջնաման դեպքում գազային դինամիկայի դասական տեսության հիման վրա: Անալիտիկ լուծումների հետ զուգահեռ կատարված են պարամետրական հետազոտություններ՝ պարզաբանելու մագնիսական դաշտի ազդեցությունը ֆլատերի սահմանի վրա:

В данной работе изложены взгляды авторов на критическое магнитоаэроупругое поведение диэлектрических прямоугольных изотропных пластин, описываемое определяющими уравнениями. Полученные в результате магнитоаэроупругая устойчивость и динамические модели помогают определить полное возмущенное давление, вызванное набегающим потоком идеально проводящего сверхзвукового газа и магнитным полем, а также критическую скорость флаттера. Представленное здесь аналитическое описание является обобщением известной формулы, полученной на основе «поршневой теории» в классической теории газодинамики в

случае магнитогидродинамического обтекания упругих оболочек. Наряду с аналитическими решениями приводятся параметрические исследования о влиянии магнитного поля на границу флаттера.

Введение

Магнитная гидродинамика тонких тел в сверхзвуковом потоке в настоящее время представляет большой исследовательский интерес. Во многих областях физики, механики, техники возникает необходимость изучения движения электропроводящих жидкостей и газов. Это характерно для астрофизики [1], высокоскоростной аэродинамики [2,3], при разработке магнитогидродинамических генераторов электрической энергии [4-7], электромагнитных насосов для перекачки жидких металлов [8-10], плазменных ускорителей, управляемых термоядерных реакций [10,11] и т. д.

Поток газа обладает свойством проводника электричества только тогда, когда находится в ионизированном состоянии. Если ионизированный газ поместить в электромагнитное поле, в нем генерируются электрические токи вместе с соответствующей электромагнитной силой, и это действительно влияет на его движение. Известно, что при протекании электрического тока по проводнику создается собственное магнитное поле, изменяющее внешнее (наложенное на проводник) магнитное поле. В данном исследовании важно отметить, что когда таким проводником является жидкий металл или ионизированный газ, не только электромагнитные силы влияют на их движение, но также и движение таких сред влияет на электромагнитное поле. Между электропроводящими жидкостями и газами и электромагнитным полем происходит сложное взаимодействие. Математически это означает, что в рамках континуальной модели возникает сложная задача совместного решения системы уравнений гидроаэромеханики и уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Взаимодействие проводящего газа с упругим тонким телом в присутствии магнитного поля приводит к явлению динамической структурной неустойчивости, известному также как аэромагнитный флаттер. Это явление необходимо изучать и его нельзя игнорировать при проектировании современных технологических устройств.

Аэромагнитный флаттер активно исследуется в наши дни, однако многие важные аспекты этого явления еще предстоит изучить. В данной работе представлено изучение линейного флаттера изотропной диэлектрической пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа в продольном магнитном поле. Предполагается, что текущая жидкость является невязкой, нетеплопроводной и имеет бесконечную проводимость. Впервые представлено аналитическое выражение аэродинамического давления с учетом приложенного магнитного поля. На основе линейной задачи аэромагнитного флаттера получены условия устойчивости и найдена соответствующая граница устойчивости. В результате аналитического описания исследовано влияние магнитного поля на критическую скорость при различных геометрических параметрах и различных параметрах магнитного поля. Исследовано также влияние числа мод на критическую скорость флаттера. Показано, что магнитное поле сужает область устойчивости и уменьшает границу устойчивости установившихся флаттерных колебаний прямоугольной пластины.

1. Модель магнитоаэроупругой устойчивости.

Рассмотрим упругую прямоугольную пластину ($0 < x_1 < a$, $0 < x_2 < b$) постоянной толщины h в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 , при этом срединная поверхность недеформированной пластины совпадает с координатной плоскостью $x_1 0 x_2$. С одной стороны ($x_3 > h/2$) пластину обтекает сверхзвуковой поток идеально проводящего газа с невозмущенной скоростью U , направленной вдоль оси $0x_1$. Пластина колеблется в постоянном магнитном поле с вектором напряженности $\vec{H}_0 (H_{01}, 0, 0)$.

2. Аэродинамическое давление с учетом магнитного поля

При движении проводящей жидкой (или газообразной) сплошной среды в магнитном поле в ней индуцируются электрические токи. На токи в магнитном поле действуют силы, существенно влияющие на движение среды. С другой стороны, эти токи меняют и само магнитное поле, создавая дополнительное электромагнитное поле. Таким образом, возникает сложная картина взаимодействия магнитных и гидромеханических явлений, которая должна рассматриваться на основе совместной системы уравнений электромагнитного поля и уравнений движения жидкости [12]. Не вдаваясь в подробности, приведем здесь основные уравнения магнитной гидродинамики, необходимые при исследовании задачи.

Уравнения поля:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho_e$$

Закон Ома:

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right) + \rho_e \vec{v}. \quad (2)$$

В гидродинамические уравнения входят, прежде всего, скалярное уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (3)$$

и векторное уравнение импульса, которое в случае невязкой жидкости имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{\rho} \rho_e \vec{E}_c + \frac{1}{\rho} \vec{f}. \quad (4)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, $\vec{E}_c = \vec{E} + c^{-1}(\vec{v} \times \vec{H})$ – напряженность электрического поля в собственной системе координат, p – давление в жидкости, \vec{f} – плотность объемных электромагнитных сил, которая имеет вид:

$$\vec{f} = \frac{1}{c}(\vec{J} \times \vec{H}) + \rho_e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right). \quad (5)$$

К этим уравнениям мы должны присоединить также уравнение состояния, которое для политропных сред записывается следующим образом

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\alpha}, \quad (6)$$

где p_0 и ρ_0 – соответственно давление и плотность неподвижного газа (жидкости), α – показатель политропы.

В дальнейшем будем рассматривать невязкую, нетеплопроводную жидкость с бесконечной проводимостью, исключив наряду с вязкостью и теплопроводностью диссипативные эффекты, связанные с электропроводностью, значительно упрощая этим уравнения магнитной гидродинамики. В случае бесконечно проводящей среды из закона Ома (2) следует, что напряженность электрического поля \vec{E}_c в собственной системе координат равна нулю, так как плотность тока проводимости должна быть конечной. Поэтому поле \vec{E} определяется через векторы скорости \vec{v} и напряженности магнитного поля \vec{H} по формуле

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{H}). \quad (7)$$

Согласно уравнению Максвелла для плотности тока \vec{J} имеем:

$$\frac{4\pi}{c} \vec{J} = \text{rot} \vec{H} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \times \vec{H}). \quad (8)$$

В магнитной гидродинамике зачастую пренебрегают током смещения относительно токов проводимости и вместо (8) принимают

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \vec{H}. \quad (9)$$

Плотность заряда ρ_e с использованием (1) и (7) определяется через \vec{v} и \vec{H} по формуле

$$\rho_e = -\frac{1}{4\pi c} \text{div} (\vec{v} \times \vec{H}). \quad (10)$$

Можно заметить из той формулы, что ρ_e в обычных условиях мало, поэтому в уравнениях движения пренебрегают членом $\rho_e \vec{E}$ по сравнению с членом $c^{-1}(\vec{J} \times \vec{H})$.

В силу изложенного для определения напряженности \vec{H} магнитного поля в среде с бесконечной проводимостью из уравнений Максвелла (1) вытекают следующие уравнения:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}), \quad \text{div} \vec{H} = 0, \quad (11)$$

Таким образом, уравнения, описывающие движение идеально проводящей жидкости (или газа) в магнитном поле и поведение магнитного поля при отсутствии диссипативных эффектов, согласно (3)-(11) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\alpha}, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{1}{4\pi\rho} (\text{rot} \vec{H}) \times \vec{H}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}), \quad \text{div} \vec{H} = 0.$$

К системе (12) нужно добавить граничные условия

$$v^k N_k = \left(\frac{\partial u^k}{\partial t} + v_i \nabla_i u^k \right) N_k, \quad (13)$$

где N_k – компоненты вектора внешней нормали к деформированной поверхности тела.

Так как мы предполагаем, что движение возмущенного газа одномерно (все величины зависят только от координаты x_3 и времени t) уравнения магнитной гидродинамики имеют следующий вид [12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3} = 0, \quad p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\alpha}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{1}{4\pi\rho} \left(H_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + H_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right) = 0, \\ \frac{\partial H_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3} (H_1 v_3 - H_3 v_1) = 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3} (H_2 v_3 - H_3 v_2) = 0, \\ \frac{\partial H_3}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H_3}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из последних двух уравнений системы (14) и из выражения невозмущенного магнитного поля следует, что

$$H_3 = 0. \quad (15)$$

Мы ищем такие решения системы (14), для которых все величины являются функциями только плотности $\rho(x_3, t)$, т. е.:

$$Q(x_3, t) = Q(\rho) \quad (16)$$

где Q - любая из компонент векторов ν и \vec{H} , а также давления p . Этим решениям соответствуют движения, которые называются простыми волнами или волнами Римана.

В силу (16) систему уравнений (14) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(v_3 + \rho \frac{dv_3}{d\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x_3} &= 0, \quad \frac{dp}{d\rho} = a_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\alpha-1}, \\ \frac{dH_1}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d(H_1 v_3)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{dH_2}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d(H_2 v_3)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{dv_3}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[v_3 \frac{dv_3}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} + \frac{1}{4\pi\rho} \left(H_1 \frac{dH_1}{d\rho} + H_2 \frac{dH_2}{d\rho} \right) \right] &= 0, \\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \right) \frac{dv_1}{d\rho} &= 0, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \right) \frac{dv_2}{d\rho} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

где $a_0^2 = \alpha p_0 / \rho_0$ – скорость звука в невозмущенном потоке.

Из первого уравнения системы (17) в силу условия $dv_3/d\rho \neq 0$ следует, что $\partial \rho / \partial t + v_3 \partial \rho / \partial x_3 \neq 0$. Тогда из последних уравнений системы (17) в силу того, что вектор скорости невозмущенного потока $\nu_*(U, 0, 0)$ параллелен оси Ox_1 , имеем

$$v_1 = U, \quad v_2 = 0. \tag{18}$$

Очевидно, что остальные уравнения системы (17) согласовываются между собой при выполнении равенств:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dH_1}{d\rho} = H_1, \quad \rho \frac{dH_2}{d\rho} = H_2, \\ \rho \left(\frac{dv_3}{d\rho} \right)^2 = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} + \frac{1}{8\pi\rho} \frac{d(H_1^2 + H_2^2)}{d\rho}. \end{aligned} \tag{19}$$

При интегрировании первых двух уравнений системы (19) и учитывая, что в невозмущенном состоянии $H_1 = H_{01}$, $H_2 = H_{02}$, получим

$$H_1 = H_{01} \frac{\rho}{\rho_0}, \quad H_2 = H_{02} \frac{\rho}{\rho_0}. \tag{20}$$

Подставляя (20) и значение $dp/d\rho$ из (17) в последнее уравнение системы (19), для определения v_3 получим следующее нелинейное уравнение:

$$\left(\frac{dv_3}{d\rho}\right)^2 = \frac{a_0^2}{\rho^2} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\alpha-1} + \lambda^2 \frac{\rho}{\rho_0} \right], \quad (21)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{V_A^2}{a_0^2}, \quad V_A^2 = \frac{H_{01}^2 + H_{02}^2}{4\pi\rho_0},$$

V_A – величина, численно равная скорости распространения электромагнитных волн Альфвена.

Далее решаем уравнение (21) относительно v_3 , удовлетворяя условию непроницаемости

$$v_3 = v_3^0 = \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x_1} \quad \text{для } x_3 = h, \quad (22)$$

которое получается из (7.2.5) (где v_3^0 – нормальная составляющая скорости частиц газа на поверхности пластины, w – прогиб пластины) и находим ρ как функцию от возмущений обтекаемой поверхности. Подставляя найденное значение ρ в уравнение состояния газа $p = p_0 \left(\rho/\rho_0\right)^\alpha$, можем определить аэродинамическое давление в зависимости от нормальных скоростей точек поверхности пластины. В частности, при $\lambda = 0$ (то есть при отсутствии магнитного поля) из (21) получаем известную формулу [13]

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\alpha - 1}{2} \frac{v_3^0}{a_0}\right)^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}. \quad (23)$$

Полученное выражение для давления будем использовать при решении задачи устойчивости как в линейной, так и в нелинейной постановке на основе линеаризованных уравнений устойчивости или уравнений гибких пластин, не содержащих членов с прогибом и их производных в степени выше третьей. Поэтому решение уравнения (21) ищем, разлагая его в ряд и ограничиваясь членами не выше третьей степени. В результате получим

$$\begin{aligned} v_3 = & \frac{a_0 \sqrt{1+\lambda^2}}{\alpha} \frac{p'}{p_0} - \frac{a_0}{4\alpha^2} \frac{1+\alpha+(2\alpha-1)\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} \left(\frac{p'}{p_0}\right)^2 + \\ & + \frac{a_0}{12\alpha^2 \sqrt{1+\lambda^2}} \{(\alpha+1)(2\alpha+1) + (3\alpha-1)(2\alpha-1)\lambda^2 - \\ & - \frac{[\alpha+1+(2\alpha-1)\lambda^2]^2}{2(1+\lambda^2)}\} \left(\frac{p'}{p_0}\right)^3 + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

где $p' = p - p_0 = -\delta p$ – возмущение давления.

Из (24) тем же способом можно найти обратную функцию, которая в пределах принятой точности имеет следующий вид

$$p = p_0 \left\{ 1 + \frac{\varkappa}{\sqrt{1+\lambda^2}} \frac{v_3}{a_0} + \frac{\varkappa [1 + \varkappa + (2\varkappa - 1)\lambda^2]}{4(1+\lambda^2)^2} \left(\frac{v_3}{a_0} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\varkappa [1 + \varkappa + 6(\varkappa - 1)\lambda^2 + (\varkappa - 1)(2\varkappa - 1)\lambda^4]}{12(1+\lambda^2)^3 \sqrt{1+\lambda^2}} \left(\frac{v_3}{a_0} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (25)$$

При отсутствии магнитного поля ($\lambda = 0$) из (25) получаем:

$$p = p_0 \left[1 + \varkappa \frac{v_3}{a_0} + \frac{\varkappa(1+\varkappa)}{4} \left(\frac{v_3}{a_0} \right)^2 + \frac{\varkappa(1+\varkappa)}{12} \left(\frac{v_3}{a_0} \right)^3 + \dots \right],$$

Данное выражение совпадает с разложением выражения (23) в ряд и успешно применяется при исследовании вопросов нелинейного флаттера пластин и оболочек в отсутствие магнитного поля [14-16].

Определим теперь поверхностное давление, обусловленное скачком компонент электродинамического тензора напряжений Максвелла на поверхности $x_3 = h$ пластины. Оно, согласно поверхностному условию непрерывности тензора напряжений, выражается следующей формулой

$$q = T_{33}^{(e)+} - T_{33}^+ \quad (26)$$

где $T_{33}^{(e)+}$ и T_{33}^+ – значения при $x_3 = h$ компонент максвелловского тензора напряжений в газе и в пластине соответственно,

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{H} \vec{H} \right).$$

Подставляя (15) и (20) в (26), получим

$$q = \frac{H_{01}^2 + H_{02}^2}{8\pi} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right]. \quad (27)$$

Используя уравнения состояния и формулу (25), определяем величину ρ/ρ_0 , и из (27) находим следующее выражение для q :

$$q = -\varkappa p_0 \lambda^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \left(\frac{v_3}{a_0} \right) + \frac{5 - \varkappa + 3\lambda^2}{4(1+\lambda^2)^2} \left(\frac{v_3}{a_0} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{(2\varkappa + 3)\lambda^4 + (10 - \varkappa^2)\lambda^2 + \varkappa^2 - 2\varkappa + 9}{12(1+\lambda^2)^3 \sqrt{1+\lambda^2}} \left(\frac{v_3}{a_0} \right)^3 + \dots \right\}. \quad (28)$$

Таким образом, с помощью плоских сечений мы получаем окончательные формулы (25) и (28), определяющие действующие на пластину силы, обусловленные обтекающим потоком и магнитным полем.

Подставляя (22) в (25) и (28), получаем формулу полного возмущенного давления, возникающего из-за набегающего потока идеально проводящего газа и магнитного поля в случае одностороннего обтекания:

$$\begin{aligned}
 Z = q + \delta p = & -\alpha p_0 \sqrt{1 + \lambda^2} \left\{ \frac{1}{a_0} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \right. \\
 & + \frac{\alpha + 1 + (\alpha + 4)\lambda^2 + 3\lambda^4}{4(1 + \lambda^2)^2 \sqrt{1 + \lambda^2}} \frac{1}{a_0^2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \\
 & + \left[\alpha + 1 + (\alpha + 1)(\alpha + 3)\lambda^2 + (\alpha^2 - 3\alpha + 11)\lambda^4 + \right. \\
 & \left. \left. + (2\alpha + 3)\lambda^6 \right] \frac{1}{12(1 + \lambda^2)^4} \frac{1}{a_0^3} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^3 \right\}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Из выражения (29) в первом приближении получаем следующую формулу [13,17-18]:

$$Z = -\frac{\alpha p_0}{a_0} \sqrt{1 + \lambda^2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x_1} \right), \tag{30}$$

являющуюся обобщением известной формулы для давления [13], полученной на основе поршневой теории классической газодинамики, в случае магнитогидродинамического обтекания тонких тел.

Теперь мы можем перейти к постановке двухмерной задачи магнитоаэроупругой устойчивости пластины.

3. Нелинейная задача магнитоаэроупругой устойчивости

Для исследования магнитоаэроупругой устойчивости рассматриваемой пластины мы принимаем следующие предположения:

а) Гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях [19]

$$u_1(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t) - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1},$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3, t) = v(x_1, x_2, t) - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2},$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3, t) = w(x_1, x_2, t)$$

б) нормальные перемещения гибкой пластины сравнимы с толщиной пластины [20]; в) для расчета аэродинамического давления будет использована формула (29).

На основе этих предположений нелинейные аэроупругие основные уравнения принимают следующий вид [14-16,18]:

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 F + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} D \Delta^2 w - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\ + \left(\rho_0 h \varepsilon + \frac{\alpha p_\infty}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha p_\infty \sqrt{1 + \lambda^2} \left[M \frac{\partial w}{\partial x_1} + \right. \\ + \frac{\alpha + 1 + (\alpha + 4)\lambda^2 + 3\lambda^4}{4(1 + \lambda^2)^2 \sqrt{1 + \lambda^2}} M^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \\ + \left. \left[\alpha + 1 + (\alpha + 1)(\alpha + 3)\lambda^2 + (\alpha^2 - 3\alpha + 11)\lambda^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + (2\alpha + 3)\lambda^6 \right] / 12(1 + \lambda^2)^4 M^3 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^3 \right] = 0, \quad (32) \end{aligned}$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad M = \frac{U}{a_0},$$

и $w(x_1, x_2, t)$ - прогиб пластины вне плоскости, M - число Маха при невозмущенном потоке, ρ_0 - плотность материала пластины, ε - коэффициент линейного затухания и $F = F(x_1, x_2, t)$ - функция напряжений.

Для исследования вопросов устойчивости рассматриваемой системы нужно к системе уравнений (31) и (32) присоединить граничные условия. Мы рассмотрим случай свободного опирания краев прямоугольной пластины, подразумевающий свободное перемещение пластины в плоскости ($0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$). Следовательно, согласно [17], рассматриваются следующие граничные условия:

при $x_1 = 0$, $x_1 = a$

$$w = 0, \quad M_{11} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = 0, \quad (33)$$

$$T_{11}^0 = 0, \quad T_{12}^0 = 0 \quad (34)$$

при $x_2 = 0$, $x_2 = b$

$$w = 0, \quad M_{22} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = 0, \quad (35)$$

$$T_{22}^0 = 0, T_{21}^0 = 0 \quad (36)$$

где $T_{11}^0, T_{22}^0, T_{12}^0$ – усредненные значения силы на краях пластины.

4. Линейный анализ

Приближенное решение уравнения (32), удовлетворяющее условиям (33) и (35), будем искать в виде [17]

$$w(x_1, x_2, t) = \left(\sum_{i=1}^n f_i(t) \sin \lambda_i x_1 \right) \sin \mu_m x_2; \quad \lambda_i = i\pi/a, \quad \mu_m = m\pi/b, \quad (37)$$

Подставив (36) в (31), получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно функции F , которое решаем методом неопределенных коэффициентов и находим функцию напряжений, которую подставляем в уравнение (32). Далее, с помощью метода Бубнова-Галеркина, в случае двухчленной аппроксимации относительно неизвестных функций $z_1 = f_1(t)/h, z_2 = f_2(t)/h$ получаем следующую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений [14-16]:

В случае двухчленной аппроксимации ($n = 2$)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dz_1}{d\tau} + z_1 - \frac{2}{3} \sqrt{1 + \lambda^2} k v z_2 &= 0 \\ \frac{d^2 z_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dz_2}{d\tau} + \gamma_2^2 z_2 + \frac{2}{3} \sqrt{1 + \lambda^2} k v z_2 &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь, наряду с безразмерным временем $\tau = \omega_1 t$, введены обозначения

$$k = \frac{4\alpha p}{\rho_0 \omega_1^2 h^2}, \quad \omega_i^2 = \frac{D}{\rho h} (\lambda_i^2 + \mu_m^2), \quad \gamma_i = \frac{\omega_i}{\omega_1}.$$

$$v = M \frac{h}{a}, \quad \chi = \frac{\varepsilon}{\omega_1} + p_\infty \alpha \sqrt{1 + \lambda^2},$$

v – приведенный параметр скорости, χ – приведенный параметр демпфирования, ω_i – частоты малых собственных колебаний оболочки, определяемые формулами.

В случае четырехчленной аппроксимации ($n = 4$)

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dz_1}{d\tau} + z_1 - \frac{2}{3} k\nu \sqrt{1+\lambda^2} z_2 - \frac{4}{15} k\nu \sqrt{1+\lambda^2} z_4 &= 0, \\
\frac{d^2 z_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dz_2}{d\tau} + \gamma_2^2 z_2 + \frac{2}{3} k\nu \sqrt{1+\lambda^2} z_1 - \frac{6}{5} k\nu \sqrt{1+\lambda^2} z_3 &= 0, \\
\frac{d^2 z_3}{d\tau^2} + \chi \frac{dz_3}{d\tau} + \gamma_3^2 z_3 + \frac{6}{5} k\nu \sqrt{1+\lambda^2} z_2 - \frac{12}{7} k\nu \sqrt{1+\lambda^2} z_4 &= 0, \\
\frac{d^2 z_4}{d\tau^2} + \chi \frac{dz_4}{d\tau} + \gamma_4^2 z_4 + \frac{4}{15} k\nu \sqrt{1+\lambda^2} z_1 + \frac{12}{7} k\nu \sqrt{1+\lambda^2} z_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

Таким образом мы свели задачу устойчивости гидроупругой системы в первом приближении к изучению поведения решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (31)-(32) в зависимости от величины скорости обтекающего потока газа (от величины параметра ν).

5. Решение линейной задачи. Условия устойчивости и граница устойчивости.

Представляя решение системы уравнений (38) и (39) в следующем виде

$$z_i = y_i e^{p\tau} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{40}$$

для системы (38) получаем следующее характеристическое уравнение относительно λ :

$$p^4 + 2\chi p^3 + (\gamma_2^2 + 1 + \chi^2) p^2 + \chi(\gamma_2^2 + 1) p + \gamma_2^2 + \frac{4}{9} k^2 \nu^2 (1 + \lambda^2) = 0. \tag{41}$$

Невозмущенная форма пластины устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения отрицательны. Таким образом условия устойчивости, согласно теореме Гурвица [20], запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
\chi > 0, \quad \chi(1 + \gamma_2^2) > 0, \\
(\gamma_2^2 - 1)^2 + 2\chi^2(1 + \gamma_2^2) - \frac{16}{9} k^2 \nu^2 (1 + \lambda^2) > 0.
\end{aligned} \tag{42}$$

Первые два неравенства, требующие, чтобы внутреннее и аэродинамическое затухание были положительными, выполняются всегда. Третье неравенство означает, что в случае малых значений ν все характеристические показатели λ лежат в левой полуплоскости комплексного переменного, и тривиальное решение $w \equiv 0$ асимптотически устойчиво относительно малых возмущений. Значение параметра $\nu = \nu_{cr}$, при котором два характеристических показателя становятся чисто мнимыми, а остальные по-прежнему лежат в левой полуплоскости, является критическим и соответствует критической скорости панельного флаттера в линейной постановке этой задачи. Согласно этому, из третьего неравенства получается следующая формула определения критической скорости флаттера в случае выбранной формы потери устойчивости пластины:

$$v_{cr} = \frac{3}{4} \frac{\gamma_2^2 - 1}{k\sqrt{1 + \lambda^2}} \sqrt{1 + \frac{2\chi^2(\gamma_2^2 + 1)}{(\gamma_2^2 - 1)^2}} \quad (43)$$

Принимая $v = v_{cr}$, из характеристического уравнения найдем следующее значение θ_{cr} частоты колебания оболочки при линейном флаттере ($p_{cr} = \pm i\theta_{cr}$)

$$\theta_{cr}^2 = \frac{1}{2}(\gamma_2^2 + 1). \quad (44)$$

Формулы, аналогичные (43) и (44), получены многими авторами и являются первыми приближениями для v_{cr} и θ_{cr} .

Неравенства (42) дают возможность построить области устойчивости на плоскости (v, λ) .

Аналогично вышеописанному процессу, подставляя (40) в систему (39), получаем характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} & p^8 + 4\chi p^7 + p^6(1 + 6\chi^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2) + \chi p^5(4\chi^2 + 3(1 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2)) + \\ & + p^4[\chi^2(3 + \chi^2) + (1 + 3\chi^2)(\gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2) + \gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_2^2\gamma_4^2 + \gamma_3^2\gamma_4^2] + \\ & + p^3\chi[\chi^2 + (2 + \chi^2)(\gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2) + 2(\gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_2^2\gamma_4^2 + \gamma_3^2\gamma_4^2)] + \\ & + p^2[\chi^2(\gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2) + (1 + \chi^2)(\gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_2^2\gamma_4^2 + \gamma_3^2\gamma_4^2) + \gamma_2^2\gamma_3^2\gamma_4^2] + \\ & + p\chi[\gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_2^2\gamma_4^2 + \gamma_3^2\gamma_4^2 + \gamma_2^2\gamma_3^2\gamma_4^2] + \gamma_2^2\gamma_3^2\gamma_4^2 + \\ & + \left(\frac{2}{105}\sqrt{1 + \lambda^2}kv\right)^2 [p(p + \chi)(12069 + 13490p(p + \chi) + \\ & + 8296\gamma_2^2 + 1421\gamma_3^2 + 5194\gamma_4^2 + \left(\frac{384}{5}\sqrt{1 + \lambda^2}kv\right)^2] = 0. \end{aligned}$$

В этом случае, также на основе теоремы Гурвица, получены соответствующие условия устойчивости. Эти выражения довольно громоздки и здесь мы их не приводим. Условия устойчивости в обоих случаях решаются численно для определения критического значения параметра скорости v и соответствующей границы. Используются следующие параметры для материала Зеродур [21]: $E = 9.03 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\mu = 0.24$, $\rho = 2.53 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $h/a = 1/100$ и численные решения изображены на рис. 2.

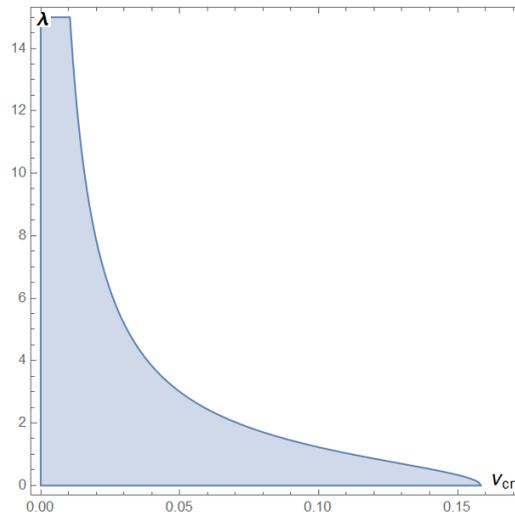


Рис. 2. Область устойчивости и граница устойчивости при $n = 4$.

Для остальных значений n характер области устойчивости не меняется, отличаясь от приведенного на рис.2 только количественно. На основе уравнения (43) и полученных условий устойчивости (для нескольких n) значения критической скорости v_{cr} посчитаны и представлены в Таблице 1, наглядно показывая, что критическая скорость для выбранных значений λ пропорциональна $\sim 1/\lambda$

Таблица 1. Значения приведенной критической скорости при $h/a=1/100$, $b/a=3$

λ	$n=2$	$n=4$	$n=6$
0	0.138981	0.158394	0.159627
10	0.0138441	0.0157608	0.0158834
50	0.00237919	0.00316724	0.0031919
100	0.00138976	0.00158386	0.00159619

Результаты, представленные в таблице 1 и на рис. 2, показывают, что: а) в присутствии магнитного поля критическая скорость уменьшается, б) магнитное поле сужает область устойчивости и существенно снижает границу устойчивости установившихся флаттерных колебаний прямоугольной пластины.

Для наглядности приведем некоторые значения из таблицы 1 в системе отсчета SI. Например, если $v_{cr} = 0.0138441$, то соответствующее значение скорости обтекающего потока равно $U_{cr} = 1669.6$ км/ч.

На рис. 3 показано, как изменяется критическая скорость в зависимости от числа m окружных волн также при фиксированных $h/a=1/100$ и нескольких значениях b/a . Чем больше число окружных волн, тем больше значение критической скорости флаттерных колебаний магнитоаэроупругой системы.

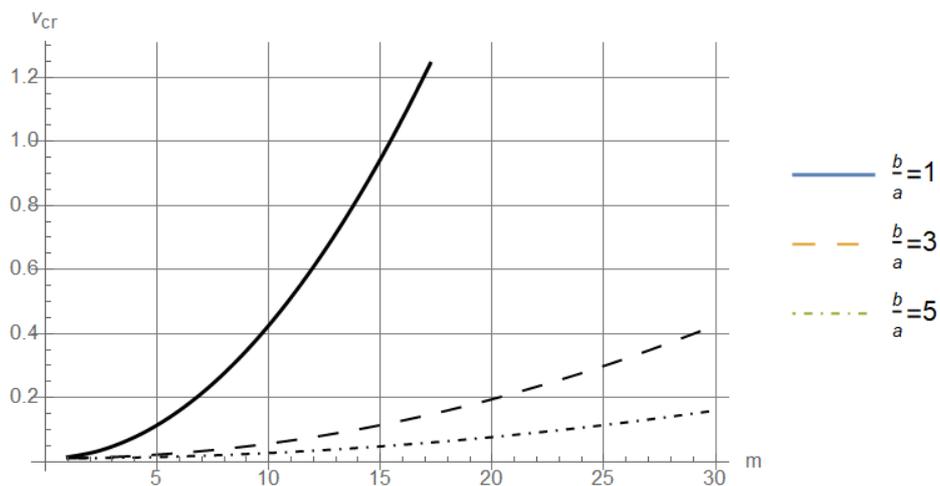


Рис. 3. Зависимость приведенной критической скорости потока от числа m окружных волн $h/a = 1/100$ и при разных значениях параметра b/a .

Перейдем к исследованию зависимости критической скорости флаттера от соотношения сторон исследуемой пластины при $\lambda = 10$. Результаты представлены на рис. 4. Показано, что при заданной относительной толщине h/a пластины, чем выше значение b/a пластины, тем меньше значение критической скорости флаттера.

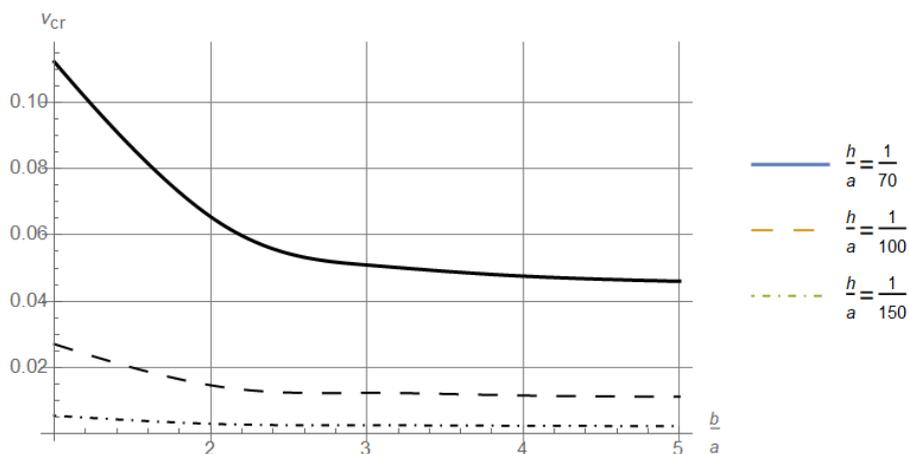


Рис. 4. Приведенная критическая скорость флаттера как функция относительно соотношения сторон b/a при разных значениях h/a пластины

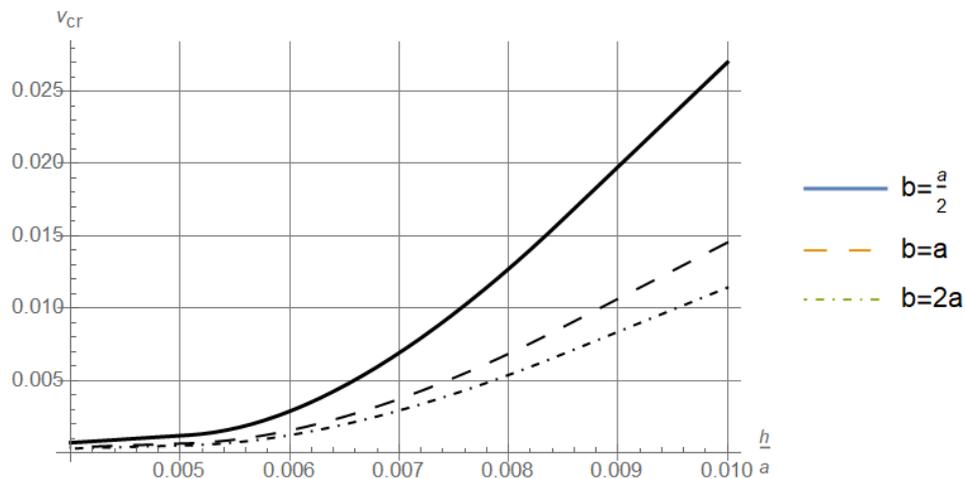


Рис. 5. Приведенная критическая скорость флаттера как функция относительно толщины h/a .

Зависимость критической скорости флаттера от относительной толщины пластины исследована численно, результаты представлены на рис. 5 для $\lambda = 10$. Результаты показывают, что чем тоньше пластина, тем меньше значение критической скорости флаттера, то есть панель становится нестабильной на более низких скоростях, когда подвергается воздействию магнитного поля.

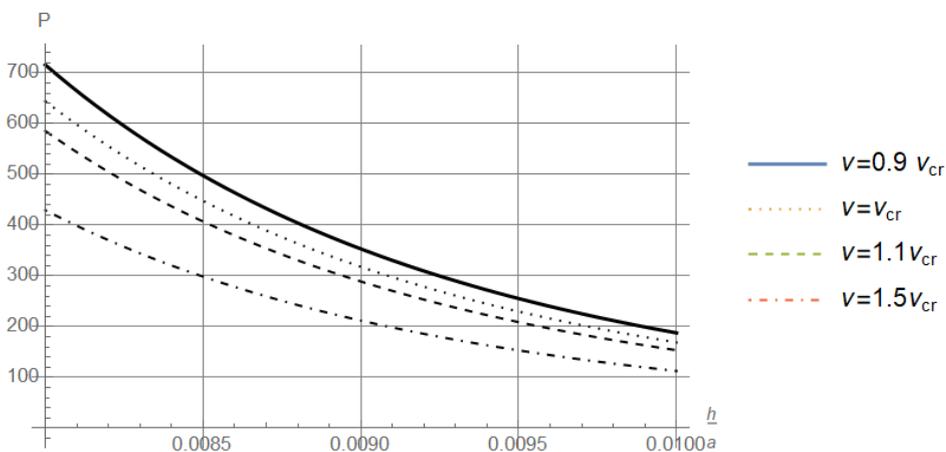


Рис. 6. Зависимость аэродинамического давления от относительной толщины h/a при $\lambda = 100$, $b = a$.

Изменение динамического давления $P = p_{\infty} a^3 / MD$ в зависимости от относительной толщины пластины представлено на рис. 6 для нескольких значений

скорости потока и при $m = 2$. На рис. 6 показано, что более тонкая пластина подвергается воздействию более высоких значений аэродинамического давления. При этом величина аэродинамического давления обратно пропорциональна скорости потока, а величина аэродинамического давления (определяемого при определенных геометрических параметрах и фиксированной скорости потока) с учетом магнитного поля примерно в λ раз больше соответствующего значения аэродинамического давления, определяемого с помощью классической формулы.

Зависимость динамического давления от соотношения сторон пластины представлена на рис. 7 для разных значений скорости потока и при $m = 2$

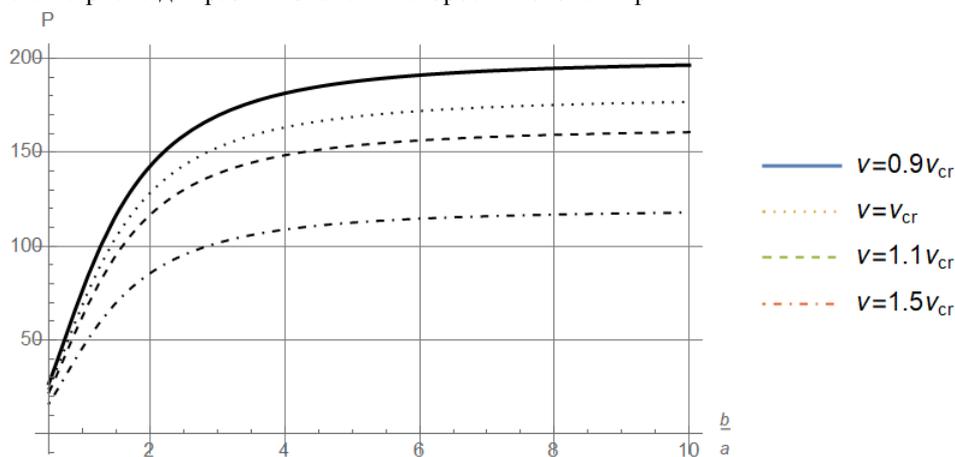


Рис. 7. Зависимость аэродинамического давления от значения b/a в случае $\lambda = 100$, $a = 100h$.

На рис. 7 показано, что при фиксированной толщине пластины, чем больше b/a , тем больше значение аэродинамического давления. Также в этом случае аэродинамическое давление и скорость потока обратно пропорциональны друг другу. Влияние магнитного поля на величину аэродинамического давления представлено на рис. 8, из которого видно, что чем больше b/a , тем сильнее влияние магнитного поля.

Также исследована зависимость аэродинамического давления от числа волн, результаты графически представлены на рис. 9. Он показывает, что аэродинамическое давление монотонно убывает при увеличении числа полуволн. С увеличением скорости потока происходит значительное уменьшение величины аэродинамического давления при том же числе полуволн.

Влияние магнитного поля на эту зависимость дополнительно изучается, результаты представлены на рис. 10. Он показывает, что магнитное поле увеличивает аэродинамическое давление для того же числа полуволн и при фиксированных значениях геометрических параметров пластины. Следует отметить, что магнитное поле не меняет поведение рассматриваемой зависимости, а лишь изменяет количественные значения давления.

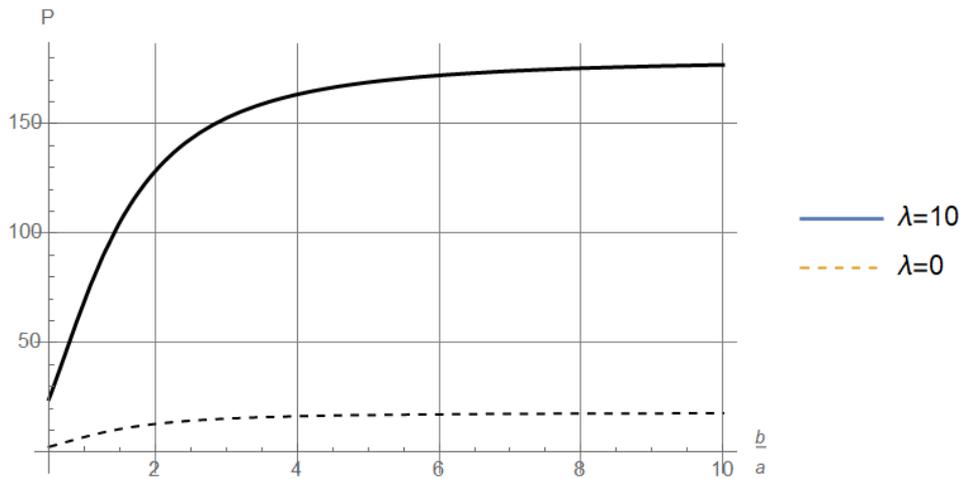


Рис. 8. Зависимость аэродинамического давления от величины b/a критической скорости флаттера $a = 100h$, $b = a$ при влиянии магнитного поля и в его отсутствие.

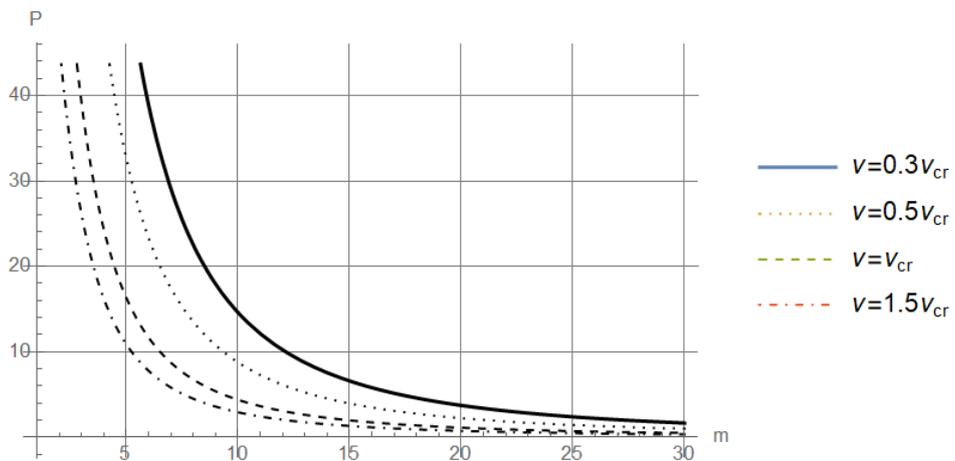


Рис. 9. Зависимость аэродинамического давления от числа полуволов при $a = 100h$, $b = a$, $\lambda = 100$.

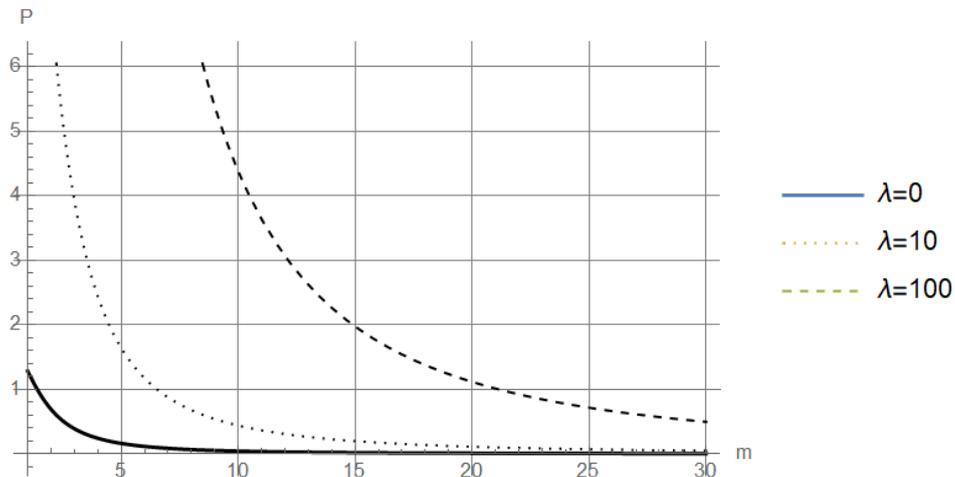


Рис. 10. Влияние магнитного поля на зависимость аэродинамического давления от количества полуволн при $a = 100h$, $b = a$.

Выводы

В данной работе аналитически рассчитано полное возмущенное давление, вызванное набегающим потоком идеально проводящего газа и магнитным полем в случае одностороннего обтекания.

Численные исследования показали:

- в присутствии магнитного поля критическая скорость флаттера уменьшается,
- магнитное поле сужает область устойчивости, то есть уменьшает границу устойчивости прямоугольной пластины,
- чем больше число окружных волн, тем больше значение критической скорости флаттера рассматриваемой магнитоаэроупругой системы,
- чем больше значение соотношения сторон пластины, тем меньше значение критической скорости флаттера,
- чем тоньше пластина, тем меньше значение критической скорости флаттера магнитоаэроупругой системы,
- чем тоньше пластина, тем больше значение аэродинамического давления. При этом величина аэродинамического давления обратно пропорциональна скорости потока. Величина аэродинамического давления, определенная при фиксированных геометрических параметрах и скорости потока, а также с учетом наличия магнитного поля, выше по сравнению с соответствующим значением аэродинамического давления, определенным по классической формуле без учета магнитного поля,
- при фиксированной толщине пластины, чем больше соотношение сторон пластины, тем больше значение аэродинамического давления. Как и в предыдущем случае, величина аэродинамического давления и скорость потока обратно пропорциональны,
- чем больше соотношение сторон пластины, тем сильнее влияние магнитного поля,
- аэродинамическое давление монотонно уменьшается с увеличением числа

- полуволн и уменьшается с увеличением скорости потока,
- магнитное поле увеличивает аэродинамическое давление при одном и том же числе полуволн для пластины.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21Т-2С257.

Литература

1. Ganiev, Y.C., Gordeev, V.P., Krasilnikov, A.V., Lagutin, V.I., Otmennikov, V.N., and Panasenko, Aerodynamic Drag Reduction by Plasma and Hot-Gas Injection, *J. Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 14, No. 1, 2000, pp. 10–17.
2. Malmuth N.D., Fomin, V.M., Maslov, A.A., Formichev, V.P., Shashkin, A.P., Korotaeva, T.A., Shipyuk, A.N., and Pozdnyakov, G.A., Influence of a Counterflow Plasma Jet on Supersonic Blunt Body Pressures, AIAA 99–4883, the Third Weakly Ionized Gases Workshop, Norfolk VA, Nov. 1999.
3. Scortecchi F., Paganucci F., d'Agostino L., M. Andrenucci, “A New Hypersonic High Enthalpy Wind Tunnel”, AIAA 97-3017, July 1997.
4. Resler, R. L., and Sears, W. R., “The Prospects for Magneto-Aerodynamics,” *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 25, No. 4, 1958, pp. 235-245, 258.
5. A. Cristofolini et al., “Experimental Investigation on the MHD Interaction around a Sharp Cone in an Ionized Argon Flow”, AIAA-2006-3075, 37th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference, San Francisco, California, June 2006
6. Borghi C.A., Carraro M.R., and Cristofolini A., “Analysis of Magnetoplasma-dynamic Interaction in the Boundary Layer of a Hypersonic Vehicle”, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 41, No. 4, 2004.
7. Borghi C.A., Carraro M.R., and Cristofolini A., “Magneto-hydrodynamics Interaction in the Shock Layer of a Wedge in a Hypersonic Flow”, *IEEE Transaction on Plasma Science*, vol. 34, no. 5, October 2006
8. Faraday M. *Experimental Researches in Electricity*, vols. i. and ii, Richard and John Edward Taylor, London, 1839.
9. Alfvén H. Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves. *Nature*, 1942, volume 150, pp. 405–406.
10. Scortecchi F., Paganucci F., d'Agostino L., “Experimental Investigation of Shock-Wave/Boundary-Layer Interactions Over an Artificially Heated Model in Hypersonic Flow”, AIAA 98-1571, April 1998.
11. Klimov A.I., Koblov A.N., Mishin G.I., Serov Yu. L., and Yavor, I.P., Shock Wave Propagation in a Glow Discharge, *Sov. Tech. Phys Lett.* Vol. 8, No. 4, 1982, pp. 192–194.
12. Bagdasaryan G., Mikilyan M. *Effects of Magnetoelastic Interactions in Conductive Plates and Shells*. Springer, 2016, -286p.
13. Ashley H. and Zartarian C. Piston Theory—A New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician, *J. Aeronaut. Sci.*, 1956, vol. 23, no. 6, pp. 1109–1118.
14. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. & Marzocca P. On the Stability of Flexible Orthotropic Rectangular Plate in Supersonic Flow: Amplitude-Speed Dependency in Pre- and Post- Critical Flight Conditions. *Journal of Aerospace Engineering*, 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000246 (Jul. 19, 2012), ISSN: 0893-1321, 2012

15. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Marzocca P. “On the Stability of Flexible Orthotropic Rectangular Plate in Supersonic Flow: Amplitude-Speed Dependency in Pre- and Post-Critical Flight Conditions,” Journal of Aerospace Engineering, 2014, vol. 27, No. 2: pp. 369-377.
16. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Saghoyan R., Cestino E. Frulla G., Marzocca P. Nonlinear LCO “amplitude–frequency” characteristics for plates fluttering at supersonic speeds. International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume 77, December 2015, Pages 51–60.
17. Bolotin V. V. Non-Conservative Problems of Theory of Elastic Stability, M.: Fizmatgiz, Moscow, 1961.
18. Dowell. E.H. “Nonlinear oscillations of a fluttering plate.” AIAA Journal, Vol. 4, No. 7, 1966, pp. 1267-1275. doi: 10.2514/3.3658; Dowell. E.H. “Nonlinear oscillations of a fluttering plate. II.” AIAA Journal, Vol. 5, No. 10, 1967, pp. 1856-1862. doi:10.2514/3.4316.
19. Vlasov V. Z. The General Theory of Shells, Gostekhizdat, Moscow, 1949.
20. Volmir S. Non-linear Dynamics of Plates and Shells, Nauka, Moscow, 1972.
21. Russell R. Zerodur. OPTI521, 2011.

Сведения об авторах:

Микилян Марине Александровна – Кандидат физ-мат наук, Доцент, Ведущий научный сотрудник Института Механики НАН РА, Российско-Армянский Университет, Тел: (37491)191129, E-mail: mikilyan@sci.am

Амбарцумян Асмик Гамлетовна – Заместитель Директора Института Математики и Информатики Российско-Армянского Университета, Внештатный научный сотрудник Института Механики НАН РА, Тел: (37455)036776, E-mail: hasmik.hambartsumyan@rau.am

Варданян Ирэн Арменовна – Внештатный научный сотрудник Института Механики НАН РА, Тел: (37455)344473, E-mail: irena_123@bk.ru

Поступила в редакцию 16 апреля 2024г.