

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С СИСТЕМОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ К ГРАНИЦЕ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН

Акопян В.Н., Амирджанян А.А.

**Ключевые слова:** динамическая смешанная задача, трещина, штамп, стационарные колебания.

Накобян В.Н., Амирджанян А.А.

**Forced vibrations of a semi-infinite plate with a system of collinear cracks parallel to the boundary**

**Keywords:** dynamic mixed boundary value problem, stamp, crack, vibrations.

Paper considers a generalized plane-stressed state of an elastic half-plane, which at a certain depth from the boundary contains collinear finite cracks parallel to the boundary and is deformed by an absolutely rigid, smooth stamp with a flat base, acting on a certain section of the boundary of the half-plane and under the influence of a vertical, harmonically varying during the time concentrated load. Using the method of discontinuous solutions for the equations of motion of the plane theory of elasticity for a half-plane with internal cracks, the governing system of singular integral equations of the problem was derived, the solution of which was constructed using the numerical-analytical method of mechanical quadrature. In case when there is only one crack, numerical calculations were carried out and patterns of changes in the moduli of contact stresses acting under the stamp, the angle of rotation of the stamp and the intensity coefficients of destructive stresses at the end points of the crack were revealed depending on the frequency of forced vibrations and the relative position of the crack and the stamp.

Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Ա.Ա.

**Եզրին գուգահեռ համագիծ ճաքերի համակարգ պարունակող կիսասանվերջ սալի ստիպողական տատանումները**

**Հիմնաբառեր.** դինամիկ խառը եզրային խնդիր, դրոշմ, ճաքեր, ստիպողական տատանումներ

Դիտարկվում է առաձգական կիսահարթության ընդհանրացված հարթ լարված վիճակը, որը եզրագծից դրոշակի խորության վրա պարունակում է եզրագծին գուգահեռ համագիծ վերջավոր ճաքեր և դեֆորմացվում է եզրագծի որոշակի տեղամասում գործող և ժամանակի ընթացքում ներդաշնակ փոփոխվող կենտրոնացած բեռի ազդեցության տակ գտնվող ողորկ, հարթ հիմքով բացարձակ կոշտ դրոշմի օգնությամբ: Ներքին ճաքեր պարունակող կիսահարթության համար առաձգականության տեսության շարժման հավասարումների խզվող լուծումների մեթոդի օգնությամբ ստացված է խնդրի որոշիչ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգը, որի լուծումները կառուցված են մեխանիկական քառակուսացման թվային-վերլուծական մեթոդով: Այն դեպքում, երբ առկա է միայն մեկ ճաք, կատարվել են թվային հաշվարկներ և պարզվել են դրոշմի տակ գործող լարումների մոդուլների, դրոշմի պտտման անկյան և ճաքի ծայրակետերում քայքայող լարումների ինտենսիվության գործակիցների փոփոխության օրինաչափությունները՝ կախված ստիպողական տատանումների հաճախականությունից ու ճեղքի և դրոշմի հարաբերական դիրքից:

Рассматривается обобщённое плоско-напряжённое состояние упругой полуплоскости, которая на некоторой глубине от границы содержит коллинеарные конечные трещины, параллельные границе, и деформируется под действием абсолютно жёсткого, гладкого штампа с плоским основанием, расположенного на некотором участке границы полуплоскости и находящегося под влиянием вертикальной, гармонически изменяющейся во времени, сосредоточенной нагрузки. Методом разрывных решений из уравнений движения плоской теории упругости для полуплоскости с внутренними трещинами выведена определяющая система сингулярных интегральных уравнений поставленной задачи, решение которой построено численно-аналитическим методом механических квадратур. В случае, когда имеется только одна трещина проведены численные расчеты и выявлены закономерности изменения модулей контактных напряжений, действующих под штампом, угла поворота штампа и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины в зависимости от частоты вынужденных колебаний и взаиморасположения трещины и штампа.

**Введение.** Динамические смешанные и контактные задачи являются одним из развивающихся направлений математической теории упругости. Полученные здесь результаты важны как с теоретической, так и с практической точек зрения. Развитию этого направления посвящено огромное количество работ. Многие основополагающие результаты в этом направлении приведены в монографиях [1-4]. Здесь разработаны и предложены эффективные методы решения динамических задач для слоистых сред с межфазными дефектами. Изучению динамических контактных и смешанных задач для однородных и составных плоскостей, полуплоскостей и полупространств с концентраторами напряжений различного типа посвящено много работ. Из них отметим работы [5-13], где рассмотрены некоторые плоские и пространственные динамические контактные и смешанные задачи. Приведём также работы [14-17], которые тесно связаны с рассматриваемой задачей. Одновременно нужно констатировать, что мало изучено взаимовлияние концентраторов напряжений различного типа, одновременно находящихся в массивных однородных или составных телах, что является весьма важной задачей как для сейсмологии, так и для сейсмоустойчивого строительства, сейсморазведки и дефектоскопии.

В этой связи отметим работы [14-17], где изучены вынужденные колебания составного полупространства, составной плоскости с межфазными трещинами и включениями, а также однородной полуплоскости с жёстким включением и непосредственно связаны с настоящей работой.

**Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.** Рассмотрим обобщённое плоско-напряжённое состояние упругой полуплоскости с коэффициентами Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ , которая отнесена к декартовой системе координат  $Oxy$ , ось  $Ox$  которой параллельна границе полуплоскости и проходит на некоторой глубине  $h$  от границы. Пусть на линии  $y = 0$  на системе интервалов  $L = \bigcup_{k=1}^N (a_k, b_k)$ , состоящей из непересекающихся интервалов  $(a_k, b_k)$ , полуплоскость расслаблена параллельной к границе системой конечных трещин. Полагаем, что полубесконечная пластина деформируется под воздействием абсолютно жёсткого штампа с плоским основанием, расположенного на интервале  $[c, d]$  границы пластины и колеблющегося в вертикальном направлении под действием гармонической нормальной нагрузки  $P_0 e^{i\omega t}$ . Принимается также, что между штампом и полуплоскостью имеет место

гладкий контакт, т.е. тангенциальные контактные напряжения отсутствуют, кроме того на берега трещин действуют равные и противоположно направленные нормальные нагрузки, независящие от времени и не допускающие закрытие трещин при деформировании пластины. В дальнейшем, используя линейность поставленной задачи, представим её в виде суммы двух задач, в первой из которых берега трещин будем считать свободными от напряжений, а во второй задаче будем полагать, что пластина деформируется под воздействием статических нагрузок интенсивности  $q(x)$ , приложенных к берегам трещин, а на отрезке  $[c, d]$  границы полуплоскости присутствует абсолютно жёсткая накладка, ограничивающая вертикальные смещения. Для первой задачи полубесконечную пластину представим как составную, составленную из полосы высоты  $h$  и полуплоскости с линией раздела  $y = 0$  и, снабдив индексами 1 и 2 соответственно все характерные величины полосы и полуплоскости, поставленную задачу математически представим в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, h, t) = 0 & x \notin (c, d); \\ v_1(x, h, t) = (\delta + \gamma x)e^{i\omega t} & x \in (c, d); \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, h, t) = 0 & (-\infty < x < \infty); \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0, t) = \sigma_y^{(2)}(x, 0, t); \tau_{xy}^{(1)}(x, 0, t) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0, t) & (-\infty < x < \infty) \\ v_1(x, 0, t) = v_2(x, 0, t); u_1(x, 0, t) = u_2(x, 0, t) & x \notin L \end{cases} \quad (1b)$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0, t) = \sigma_y^{(2)}(x, 0, t) = 0 & (x \in L) \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0, t) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0, t) = 0 & (x \in L) \end{cases} \quad (1c)$$

Здесь, и далее,  $\sigma_y^{(j)}(x, y, t)$  ( $j=1, 2$ ) и  $\tau_{xy}^{(j)}(x, y, t)$  ( $j=1, 2$ ) - нормальные и касательные напряжения, действующие в полосе и в полуплоскости соответственно,  $v_j(x, y, t)$  ( $j=1, 2$ ) и  $u_j(x, y, t)$  ( $j=1, 2$ ) - нормальные и горизонтальные смещения точек полосы и полуплоскости соответственно, удовлетворяющие уравнениям движения в смещениях,  $\gamma$  - угол поворота штампа, а  $\delta$  - амплитуда колебаний штампа. Учитывая гармонический характер напряжённо-деформированного состояния, в (1) по формулам  $f(x, y, t) = f(x, y)e^{i\omega t}$  перейдём к амплитудам и по формулам

$$u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = u(x); v_1(x, 0) - v_2(x, 0) = v(x) \quad (x \in L) \quad (2)$$

введём в рассмотрение амплитуды неизвестных функций разности смещений точек берегов трещин  $u(x)$ ,  $v(x)$  и функцию амплитуды контактного давления  $P(x)$ . Затем рассмотрим вспомогательную задачу, состоящую из условий (1b), (2) и из условий (1a), второе из условий которой заменено условием  $\sigma_y^{(1)}(x, h) = -P(x)$

$x \in (c, d)$ . Решив указанную вспомогательную задачу, построим разрывные решения уравнений Ламэ для полуплоскости с коллинеарными трещинами и выразим амплитуды компонент напряжений на линии полуплоскости  $y = 0$ , а также нормальное смещение на линии  $y = h$  через введённые функции. Для этого, решения уравнений движений, записанные для амплитуд смещений, представим в виде следующих интегралов Фурье:

$$\begin{aligned}
u_1(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -ik \left[ A_1^{(1)}(k) \operatorname{ch}(\chi_1 y) + B_1^{(1)}(k) \operatorname{sh}(\chi_1 y) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \chi_2 \left[ C_1^{(1)}(k) \operatorname{sh}(\chi_2 y) + D_1^{(1)}(k) \operatorname{ch}(\chi_2 y) \right] \right\} e^{-ikx} dk; \\
v_1(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \chi_1 \left[ A_1^{(1)}(k) \operatorname{sh}(\chi_1 y) + B_1^{(1)}(k) \operatorname{ch}(\chi_1 y) \right] + \right. \\
&\quad \left. + ik \left[ C_1^{(1)}(k) \operatorname{ch}(\chi_2 y) + D_1^{(1)}(k) \operatorname{sh}(\chi_2 y) \right] \right\} e^{-ikx} dk; \\
u_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -ikA_1^{(2)}(k) e^{\chi_1 y} + \chi_2 C_1^{(2)}(k) e^{\chi_2 y} \right] e^{-ikx} dk; \\
v_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \chi_1 A_1^{(2)}(k) e^{\chi_1 y} + ikC_1^{(2)}(k) e^{\chi_2 y} \right] e^{-ikx} dk.
\end{aligned} \tag{3}$$

При этом компоненты амплитуд напряжений задаются формулами:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_y^{(1)}(x, y)}{\mu} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (k^2 + \chi_2^2) \left[ A_1^{(1)}(k) \operatorname{ch}(\chi_1 y) + B_1^{(1)}(k) \operatorname{sh}(\chi_1 y) \right] + \right. \\
&\quad \left. + 2ik\chi_2 \left[ C_1^{(1)}(k) \operatorname{sh}(\chi_2 y) + D_1^{(1)}(k) \operatorname{ch}(\chi_2 y) \right] \right\} e^{ikx} dk; \\
\frac{\sigma_y^{(2)}(x, y)}{\mu} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (k^2 + \chi_2^2) A_1^{(2)}(k) e^{\chi_1 y} + 2ik\chi_2 C_1^{(2)}(k) e^{\chi_2 y} \right] e^{ikx} dk; \\
\tau_{xy}^{(1)}(x, y) / \mu &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2ik\chi_1 \left[ A_1^{(1)}(k) \operatorname{sh}(\chi_1 y) + B_1^{(1)}(k) \operatorname{ch}(\chi_1 y) \right] - \right. \\
&\quad \left. - (k^2 + \chi_2^2) \left[ C_1^{(1)}(k) \operatorname{ch}(\chi_2 y) + D_1^{(1)}(k) \operatorname{sh}(\chi_2 y) \right] \right\} e^{ikx} dk; \\
\tau_{xy}^{(2)}(x, y) / \mu &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 2ik\chi_1 A_1^{(2)}(k) e^{\chi_1 y} - (k^2 + \chi_2^2) C_1^{(2)}(k) e^{\chi_2 y} \right] e^{ikx} dk,
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь  $A_1^{(j)}(k)$ ,  $B_1^{(j)}(k)$ ,  $C_1^{(j)}(k)$  и  $D_1^{(j)}(k)$  ( $j=1,2$ ) – неизвестные постоянные, подлежащие определению,

$$\chi_j = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega}{c_j}\right)^2}; \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda_* + 2\mu}{\rho}}; \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \quad \lambda_* = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu)};$$

$$c_1^2 = c_2^2 / \theta; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \theta = \frac{\mu}{\lambda_* + 2\mu} = \frac{1-\nu}{2}; \quad (j=1,2),$$

$c_i$  ( $j=1,2$ ) – скорости распространения упругих, продольной и поперечной, волн в полуплоскости, а  $\nu$  и  $E$  соответственно коэффициент Пуассона и модуль упругости материала полубесконечной пластины. При этом, выбраны те ветви функций  $\chi_i(k)$  ( $i=1,2$ ), которые на бесконечности ведут себя как  $|k|$  и, тем самым, обеспечивают затухание волн на бесконечности [18]. Далее, удовлетворив указанным выше условиям, для определения неизвестных коэффициентов получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -2ik\chi_1(B_1^{(1)}(k) - A_1^{(2)}(k)) + (k^2 + \chi_2^2)(C_1^{(1)}(k) - C_1^{(2)}(k)) = 0 \\ (k^2 + \chi_2^2)[A_1^{(1)}(k) - A_1^{(2)}(k)] + 2ik\chi_2[D_1^{(1)}(k) - C_1^{(2)}(k)] = 0 \\ -ikA_1^{(1)}(k) + \chi_2 D_1^{(1)}(k) + ikA_1^{(2)}(k) - \chi_2 C_1^{(2)}(k) = \bar{u}(k) \\ \chi_1 B_1^{(1)}(k) + ikC_1^{(1)}(k) - \chi_1 A_1^{(2)}(k) - ikC_1^{(2)}(k) = \bar{v}(k) \\ (k^2 + \chi_2^2)[A_1^{(1)}(k)\text{ch}(\chi_1 h) + B_1^{(1)}(k)\text{sh}(\chi_1 h)] + \\ + 2ik\chi_2[C_1^{(1)}(k)\text{sh}(\chi_2 h) + D_1^{(1)}(k)\text{ch}(\chi_2 h)] = -\bar{P}(k)/\mu; \\ -2ik\chi_1[A_1^{(1)}(k)\text{sh}(\chi_1 h) + B_1^{(1)}(k)\text{ch}(\chi_1 h)] + \\ + (k^2 + \chi_2^2)[C_1^{(1)}(k)\text{ch}(\chi_2 h) + D_1^{(1)}(k)\text{sh}(\chi_2 h)] = 0 \end{cases} \quad (5)$$

где черточка над функциями означает образ Фурье, т.е.

$$\bar{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx.$$

Решив полученную систему, неизвестные постоянные выразим через образы Фурье дислокаций компонентов смещений на трещинах и нормального контактного напряжения под штампом. Затем, выразим напряжения на берегах трещин и нормальное смещение под штампом через неизвестные дислокации смещений и контактные напряжения, действующие под штампом. Получим:

$$\begin{aligned}
v_1'(x, h) &= -\frac{1}{2\pi\mu(1-\theta)} \int_c^d \frac{P(s) ds}{s-x} + \frac{1}{\mu} \int_c^d K_{1,1}(x-s) P(s) ds + \\
&+ \int_L K_{1,2}(x-s) v'(s) ds + \int_L K_{1,3}(x-s) u'(s) ds \quad (-\infty < x < \infty) \\
\frac{\sigma_y^{(j)}(x, 0)}{\mu} &= \frac{(1-\theta)}{\pi} \int_L \frac{v'(s) ds}{s-x} + \frac{1}{\mu} \int_c^d K_{2,1}(x-s) P(s) ds + \\
&+ \int_L K_{2,2}(x-s) v'(s) ds + \int_L K_{2,3}(x-s) u'(s) ds \quad (-\infty < x < \infty, j=1, 2) \quad (6) \\
\frac{\tau_{xy}^{(j)}(x, 0)}{\mu} &= \frac{(1-\theta)}{\pi} \int_L \frac{u'(s) ds}{s-x} + \frac{1}{\mu} \int_c^d K_{3,1}(x-s) P(s) ds + \\
&+ \int_L K_{3,2}(x-s) v'(s) ds + \int_L K_{3,3}(x-s) u'(s) ds \quad (-\infty < x < \infty, j=1, 2)
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
K_{i,j}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty R_{i,j}(k) c_{i+j}(kx) dk; \quad c_{i+j}(kx) = \begin{cases} \cos kx & i+j=2k-1 \\ \sin kx & i+j=2k \end{cases}, \\
R_{1,1}(k) &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-\theta} + \frac{\alpha_1 \eta}{2R_2^-} \right); \quad R_{1,3}(k) = R_{3,1}(k) = \frac{\alpha_1 \beta (e^{-\alpha_1 hk} - e^{-\alpha_2 hk})}{R_2^-}; \\
R_{1,2}(k) &= -R_{2,1}(k) = \frac{\beta^2 e^{-\alpha_1 hk} - \alpha_1 \alpha_2 e^{-\alpha_2 hk}}{R_2^-}; \\
R_{2,3}(k) &= -R_{3,2}(k) = \frac{2\beta R_2^+ (e^{-\alpha_1 hk} - e^{-\alpha_2 hk})^2}{\eta R_2^-}; \\
R_{2,2}(k) &= R_{3,3}(k) = \\
&= 2 \left( \frac{-R_2^+ (\beta^2 e^{-2\alpha_1 hk} + \alpha_1 \alpha_2 e^{-2\alpha_2 hk}) + 4\alpha_1 \alpha_2 \beta^2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2) hk} + (R_2^-)^2}{\alpha_1 \eta R_2^-} + \frac{1-\theta}{2} \right); \\
\theta &= \frac{\mu}{\lambda_* + 2\mu} = \frac{1-\nu}{2}; \quad \beta = 1-\eta/2; \quad \alpha_1 = \sqrt{1-\theta\eta}; \quad \alpha_2 = \sqrt{1-\eta}; \\
R_i^\pm &= \beta^i \pm \alpha_1 \alpha_2; \quad \eta = (\omega / k c_2)^2
\end{aligned}$$

Теперь, используя представления (6), удовлетворим условиям на берегах трещины и под штампом, предварительно продифференцировав последнее. В итоге, для определения дислокаций компонент смещений и нормального контактного давления придём к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi\mu(1-\theta)} \int_c^d \frac{P(s) ds}{s-x} + \frac{1}{\mu} \int_c^d K_{1,1}(x-s)P(s) ds + \int_L^d K_{1,2}(x-s)v'(s) ds + \\
& + \int_L^d K_{1,3}(x-s)u'(s) ds = \gamma \quad (x \in (c, d)) \\
& \frac{(1-\theta)}{\pi} \int_L^d \frac{v'(s) ds}{s-x} + \frac{1}{\mu} \int_c^d K_{2,1}(x-s)P(s) ds + \int_L^d K_{2,2}(x-s)v'(s) ds + \\
& + \int_L^d K_{2,3}(x-s)u'(s) ds = 0 \quad (x \in L, j=1,2) \\
& \frac{(1-\theta)}{\pi} \int_L^d \frac{u'(s) ds}{s-x} + \frac{1}{\mu} \int_c^d K_{3,1}(x-s)P(s) ds + \int_L^d K_{3,2}(x-s)v'(s) ds + \\
& + \int_L^d K_{3,3}(x-s)u'(s) ds = 0 \quad (x \in L, j=1,2)
\end{aligned} \tag{7}$$

Систему (7) рассмотрим при условиях равновесия штампа и непрерывности смещений в концевых точках трещин, т.е. при условиях

$$\begin{aligned}
& \int_c^d P(x) dx = P_0; \quad \int_c^d (x-x_0)P(x) dx = 0; \\
& \int_{a_k}^{b_k} u'(x) dx = 0; \quad \int_{a_k}^{b_k} v'(x) dx = 0; \quad (x_0 = (d+c)/2; k=1,2\dots N)
\end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, решение первой задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений (7) при условиях (8).

Определяющую систему уравнений для второй задачи можно получить из системы (7), взяв в ней  $\omega=0$  и добавив в правой части второго уравнения член  $-q(x)/\mu$ . В итоге, для второй задачи получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi\mu(1-\theta)} \int_c^d \frac{P_s(s) ds}{s-x} + \frac{1}{\mu} \int_c^d K_{1,1}^{(s)}(x-s)P_s(s) ds + \int_L^d K_{1,2}^{(s)}(x-s)v'_s(s) ds + \\
& + \int_L^d K_{1,3}^{(s)}(x-s)u'_s(s) ds = \gamma_s \quad (x \in (c, d))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(1-\theta)}{\pi} \int_L \frac{v'_s(s) ds}{s-x} + \frac{1}{\mu_c} \int_c^d K_{2,1}^{(s)}(x-s) P_s(s) ds + \int_L K_{2,2}^{(s)}(x-s) v'_s(s) ds + \\
& + \int_L K_{2,3}^{(s)}(x-s) u'_s(s) ds = -q(x)/\mu \quad (x \in L, j=1,2) \\
& \frac{(1-\theta)}{\pi} \int_L \frac{u'_s(s) ds}{s-x} + \frac{1}{\mu_c} \int_c^d K_{3,1}^{(s)}(x-s) P_s(s) ds + \int_L K_{3,2}^{(s)}(x-s) v'_s(s) ds + \\
& + \int_L K_{3,3}^{(s)}(x-s) u'_s(s) ds = 0 \quad (x \in L, j=1,2)
\end{aligned} \tag{9}$$

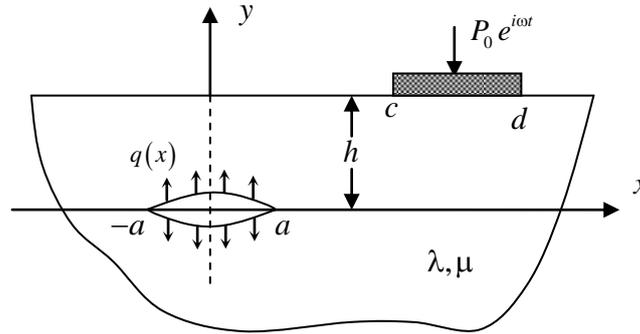
где  $K_{i,j}^{(s)}(x)$  – значения ядер  $K_{i,j}(x)$  при  $\omega=0$ , а  $P_s(x)$ ,  $v'_s(x)$ ,  $u'_s(x)$  и  $\gamma_s$  соответственно нормальные контактные напряжения под накладкой, дислокации компонент смещений точек берегов трещины и угол поворота накладки во второй задаче.

Систему (9) нужно рассматривать при условиях

$$\int_c^d P_s(x) dx = 0; \int_c^d (x-x_0) P_s(x) dx = 0; \int_{a_k}^{b_k} u'_s(x) dx = 0; \int_{a_k}^{b_k} v'_s(x) dx = 0. \tag{10}$$

### Решение определяющих систем уравнений

Нетрудно показать, что искомые функции, входящие в систему (7) и (9) в конечных точках интервалов интегрирования имеют обычную корневую особенность. Исходя из этого, решение систем (7) и (9) при условиях (8) и (10) можно построить как методом ортогональных многочленов Чебышева, сведя её к системе квази-вполне-регулярной системе бесконечных алгебраических уравнений, так и численно-аналитическим методом механических квадратур. В статье выбран второй путь и для простоты рассмотрен случай, когда полуплоскость расслаблена лишь одной трещиной на интервале  $L = (-a, a)$  (Фиг.1).



Фиг.1

При помощи замены переменных  $s=c_0+d_0\xi$ , где  $c_0=(d+c)/2$ ,  $d_0=(d-c)/2$ , в первых уравнениях систем (7) и (9) и  $s=a\xi$  в остальных двух уравнениях систем (7) и (9) перейдём на интервал  $(-1,1)$ . Тогда, введя обозначения

$$\varphi_1(\eta) = P(c_0 + d_0\eta)/\mu; \quad \varphi_2(\eta) = v'(a\eta); \quad \varphi_3(\eta) = u'(a\eta);$$

$$\varphi_1^{(s)}(\eta) = P_s(c_0 + d_0\eta)/\mu; \quad \varphi_2^{(s)}(\eta) = v'_s(a\eta); \quad \varphi_3^{(s)}(\eta) = u'_s(a\eta);$$

$$K_{i,1}^*(\eta, \xi) = d_0 K_{i,1}(d_0(\eta - \xi)); \quad K_{i,1}^{(s)*}(\eta, \xi) = d_0 K_{i,1}^{(s)}(d_0(\eta - \xi)); \quad (i = 2, 3);$$

$$K_{1,j}^*(\eta, \xi) = a K_{1,j}(d_0\eta - a\xi + c_0); \quad K_{1,j}^{(s)*}(\eta, \xi) = a K_{1,j}^{(s)}(d_0\eta - a\xi + c_0) \quad (j = 2, 3);$$

$$K_{i,j}^*(\eta, \xi) = a K_{i,j}(a(\eta - \xi)); \quad K_{i,j}^{(s)*}(\eta, \xi) = a K_{i,j}^{(s)}(a(\eta - \xi)) \quad (i, j = 2, 3);$$

$$K_{i,1}^*(\eta, \xi) = d_0 K_{i,1}(a\eta - d_0\xi - c_0); \quad K_{i,1}^{(s)*}(\eta, \xi) = d_0 K_{i,1}^{(s)}(a\eta - d_0\xi - c_0) \quad (i = 2, 3);$$

$$q_1 = q_1^{(s)} = -\frac{1}{2(1-\theta)}; \quad q_j = q_j^{(s)} = (1-\theta); \quad f_1(\eta) = \gamma; \quad f_2(\eta) = f_3(\eta) = 0,$$

$$f_1^{(s)}(\eta) = \gamma_s; \quad f_2^{(s)}(\eta) = -q(a\eta)/\mu; \quad f_3^{(s)}(\eta) = 0; \quad (j = 2, 3)$$

системы (7) и (9) запишем соответственно в виде:

$$\frac{q_i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_i(\xi) d\xi}{\xi - \eta} + \sum_{j=1}^3 \int_{-1}^1 K_{i,j}^*(\eta, \xi) \varphi_j(\xi) d\xi = f_i(\eta) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (11)$$

$$(-1 < \eta < 1)$$

$$\frac{q_i^{(s)}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_i^{(s)}(\xi) d\xi}{\xi - \eta} + \sum_{j=1}^3 \int_{-1}^1 K_{i,j}^{(s)*}(\eta, \xi) \varphi_j^{(s)}(\xi) d\xi = f_i^{(s)}(\eta) \quad (12)$$

$$(i = 1, 2, 3; \quad -1 < \eta < 1)$$

При этом, условия (8) и (10) соответственно примут вид:

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(\xi) d\xi = P_0^*; \quad \int_{-1}^1 \xi \varphi_1(\xi) d\xi = 0; \quad \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) d\xi = 0; \quad \int_{-1}^1 \varphi_3(\xi) d\xi = 0; \quad (13)$$

$$(P_0^* = P_0 / \mu d_0)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_1^{(s)}(\xi) d\xi = 0; \quad \int_{-1}^1 \xi \varphi_1^{(s)}(\xi) d\xi = 0; \quad \int_{-1}^1 \varphi_2^{(s)}(\xi) d\xi = 0; \quad \int_{-1}^1 \varphi_3^{(s)}(\xi) d\xi = 0; \quad (14)$$

Таким образом, решение поставленной задачи в случае одной трещины свелось к решению систем сингулярных интегральных уравнений (11) и (12) при условиях (13) и (14) соответственно. Чтобы построить решения систем (11) и (12) численно-аналитическим методом механических квадратур искомые функции представим в следующем виде:

$$\varphi_j(\eta) = \frac{\varphi_j^*(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}; \quad \varphi_j^{(s)}(\eta) = \frac{\varphi_j^{(s)*}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} \quad (j=1,2,3), \quad (15)$$

где функции  $\varphi_j^*(\eta), \varphi_j^{(s)*}(\eta)$  ( $j=1,2,3$ ) – ограниченные, гладкие функции на замкнутом интервале  $[-1,1]$ . Подставляя эти выражения функций  $\varphi_j(\eta)$ , и  $\varphi_j^{(s)}(\eta)$  соответственно в системы (12), (13) и в условия (14), (15), по обычной процедуре [19], для определения значений функций  $\varphi_j^*(\eta), \varphi_j^{(s)*}(\eta)$  ( $j=1,2,3$ ) в узлах  $\xi_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), являющихся корнями многочлена Чебышева первого рода, придём к системам алгебраических уравнений. После решения полученной системы можно восстановить функции  $\varphi_j(\eta), \varphi_j^{(s)}(\eta)$  и определить все необходимые физико-механические величины, представляющие интерес. В частности, безразмерные раскрытия трещины определяются по формулам :

$$v_*(\eta) = v(a\eta)/a = \int_{-1}^{\eta} \varphi_2(\xi) d\xi; \quad v_s^*(\eta) = v_s(a\eta)/a = \int_{-1}^{\eta} \varphi_2^{(s)}(\xi) d\xi.$$

Значит, безразмерное раскрытие трещины, когда полуплоскость находится под влиянием как статических, так и динамических нагрузок, определяется формулой:

$$W(\eta, t) = v_*(\eta)e^{i\omega t} + v_s^*(\eta)$$

Приведём также формулу для определения коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины. Для этого используем последние две формулы (6) для напряжений. При помощи замены переменных  $\{s, x\} = a\{\xi, \eta\}$  и  $\{s, x\} = a_0 + b_0\{\xi, \eta\}$  формулируем их на интервале  $(-1,1)$  и рассмотрим случай, когда  $\eta$  находится вне интервала  $(-1,1)$ . Тогда, используя значение интеграла [20]

$$\int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2}(s-x)} = -\frac{\pi \operatorname{sign} x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (|x| > a)$$

для приведённых компонент разрушающих напряжения получим выражения:

$$\sigma_*(\eta) = \frac{\sigma_y^{(j)}(a\eta, 0)}{\mu} = -\frac{(1-\theta)\text{sign}(\eta)\varphi_2^*(\pm 1)}{\sqrt{\eta^2-1}} + F_1(\eta) \quad (|\eta| > 1, j=1,2)$$

$$\tau_*(\eta) = \frac{\tau_{xy}^{(j)}(a\eta, 0)}{\mu} = -\frac{(1-\theta)\text{sign}(\eta)\varphi_3^*(\pm 1)}{\sqrt{\eta^2-1}} + F_2(\eta) \quad (|\eta| > 1, j=1,2),$$

где функции  $F_1(\eta)$  и  $F_2(\eta)$  – ограниченные функции в конечных точках трещины  $\pm 1$ .

Отсюда, для модулей динамических коэффициентов интенсивности напряжений получим выражения:

$$K_I(\pm 1) = \sqrt{2\pi} \lim_{t \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{|\eta \mp 1|} \sigma_*(t) = \mp \sqrt{\pi} (1-\theta) \varphi_2^*(\pm 1);$$

$$K_{II}(\pm 1) = \sqrt{2\pi} \lim_{t \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{|\eta \mp 1|} \tau_*(t) = \mp \sqrt{\pi} (1-\theta) \varphi_3^*(\pm 1).$$

Аналогичным образом, в случае второй задачи для статических коэффициентов интенсивности придём к формулам:

$$K_I^{(s)}(\pm 1) = \sqrt{2\pi} \lim_{t \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{|\eta \mp 1|} \sigma_*^{(s)}(\eta) = \mp \sqrt{\pi} (1-\theta) \varphi_2^{(s)*}(\pm 1);$$

$$K_{II}^{(s)}(\pm 1) = \sqrt{2\pi} \lim_{t \rightarrow \pm 1 \pm 0} \sqrt{|\eta \mp 1|} \tau_*^{(s)}(\eta) = \mp \sqrt{\pi} (1-\theta) \varphi_3^{(s)*}(\pm 1).$$

Следовательно, в общем случае, когда полуплоскость находится под влиянием как статических, так и динамических нагрузок, для коэффициентов интенсивности получим формулы:

$$K_I^*(\pm 1, t) = \mp \sqrt{\pi} (1-\theta) \left[ \varphi_2^*(\pm 1) e^{i\omega t} + \varphi_2^{(s)*}(\pm 1) \right];$$

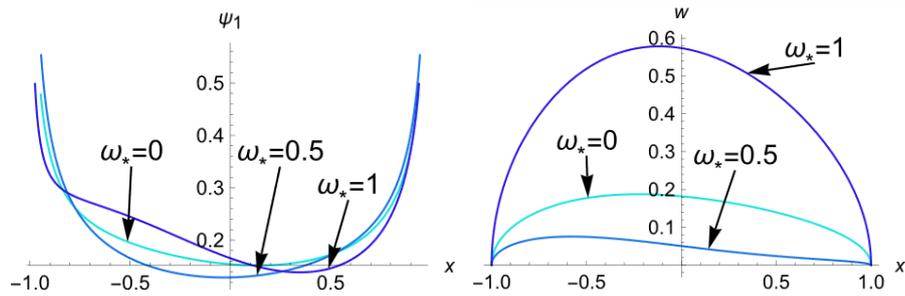
$$K_{II}^*(\pm 1, t) = \mp \sqrt{\pi} (1-\theta) \left[ \varphi_3^*(\pm 1) e^{i\omega t} + \varphi_3^{(s)*}(\pm 1) \right].$$

### Численные расчеты

В указанном частном случае, когда на берега трещины действует равномерная распределенная нагрузка интенсивности  $q_0$ , проведены численные расчеты и определены закономерности изменения действительных частей амплитуд приведённых контактных напряжений, действующих под штампом,  $\psi_1(x) = \varphi_1^{(s)}(x) + \text{Re} \varphi_1(x)$ , раскрытия трещины  $w(x) = v_s^*(x) + \text{Re} v_s(x)$ , приведённого угла поворота штампа  $\gamma_* = |\gamma|$  и безразмерных динамических коэффициентов интенсивности  $|K_I^*(\pm 1)|$  и  $|K_{II}^*(\pm 1)|$ , в зависимости от приведённой частоты вынужденных колебаний  $\Omega_* = \Omega / ac_2$ , взаиморасположения штампа и трещины, описывающегося приведённым параметром  $k_0 = c_0 / a$  и от приведённой глубины трещин  $h_* = h / a$  в

моменты времени  $t_k = 2\pi k / \omega$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). При этом считается, что ширина штампа равна  $2a$ ,  $q(x) = q_0 = \text{const}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $q_0 / \mu = 0.2$ ,  $P_0^* = P_0 / \mu a = 0.5$ .

На Фиг. 2 и Фиг. 3 соответственно приведены графики действительных частей амплитуд нормальных контактных напряжений и раскрытия трещины в зависимости от приведённой частоты вынужденных колебаний  $\omega_*$ , когда  $h_* = 1.8$ ,  $k_0 = 1$ .

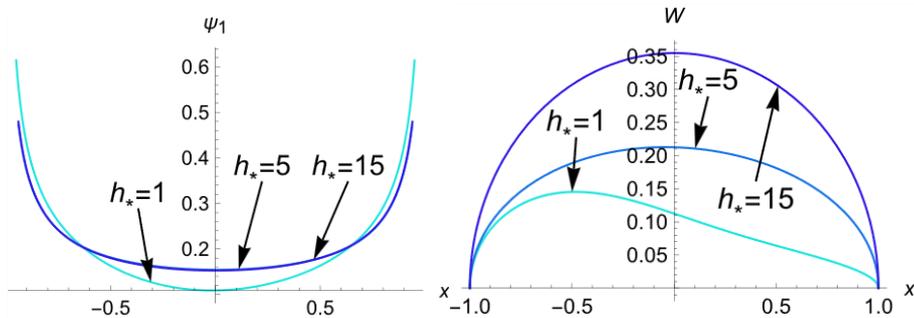


Фиг.2

Фиг.3

Видно, что амплитуда нормальных контактных напряжений мало зависит от приведённой частоты вынужденных колебаний, а раскрытие трещины при увеличении частоты вынужденных колебаний колеблется вокруг состояния равновесия.

На Фиг. 4 и Фиг. 5 соответственно приведены графики действительных частей амплитуд нормальных контактных напряжений и раскрытия трещины в зависимости от приведённого расстояния трещины от границы полуплоскости  $h_*$ , когда  $\omega_* = 0.3$ ,  $k_0 = 1$ .



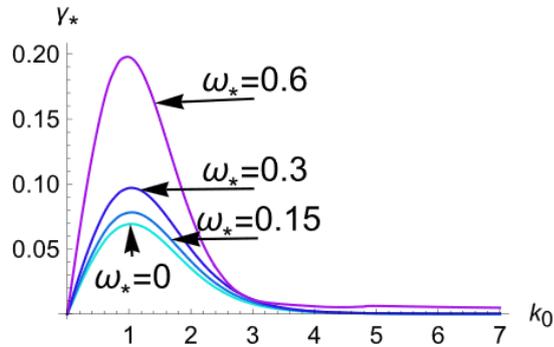
Фиг.4

Фиг.5

Из них явствует, что как амплитуды нормальных контактных напряжений, так и раскрытие трещины с увеличением глубины трещины в центральной части соответственно штампа и трещины возрастают и стремятся к определённому пределу, соответствующую случаю, когда штамп и трещина не влияют друг на друга.

На Фиг. 6 приведены графики абсолютной величины угла поворота штампа в зависимости от расстояния штампа от начала координат при некоторых значениях

частоты вынужденных колебаний  $\omega_*$ , когда  $h_* = 1.8$  и статическая нагрузка на берега трещины отсутствует.



Фиг.6

Как и следовало ожидать, при увеличении частоты вынужденных колебаний в зависимости от  $k_0$  угол поворота сначала возрастает, а затем убывает, стремясь к нулю. Причём, чем больше частота вынужденных колебаний, тем больше максимальный угол поворота штампа.

Таблица 1. Модули динамических коэффициентов интенсивности

$\omega_*$	0.3	0.5	1	2	5
$ K_I(1) $	0.3422	0.4720	0.2277	0.1221	0.1310
$ K_I(-1) $	0.2894	0.4175	0.2945	0.0403	0.0917
$ K_{II}(1) $	0.0111	0.0180	0.0120	0.0413	0.0383
$ K_{II}(-1) $	0.0876	0.1081	0.0450	0.0751	0.0467

В Таблице 1 приведены значения модулей приведённых динамических коэффициентов интенсивности в зависимости от приведённой частоты вынужденных колебаний  $\omega_*$ , когда  $h_* = 1.8$ ,  $k_0 = 1$  и статические нагрузки на берегах трещины отсутствуют.

### Заключение

Таким образом, изучены вынужденные колебания упругой полубесконечной пластины с параллельной к границе системой коллинеарных трещин, деформируемой при помощи абсолютно жёсткого штампа с плоским основанием, действующего на границе пластины и находящегося под влиянием периодически изменяющейся во времени сосредоточенной нагрузки и статических нагрузок, действующих на берегах трещин. В случае, когда имеется только одна трещина проведены численные расчёты

и выявлены закономерности изменения модулей контактных напряжений, действующих под штампом, угла поворота штампа и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины в зависимости от частоты вынужденных колебаний, приведённого расстояния трещины от границы, а также от взаиморасположения трещины и штампа.

**Исследование выполнено при финансовой поддержке КН МОН РА в рамках научного проекта 21Т-2С257**

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович Н.Н., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
2. Бабешко В.А. Обобщённый метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984.
3. Абрамян Б.Л. Пространственные задачи теории упругости // НАН РА Ереван, 1998, 274с.
4. Nakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies, *Advanced Structured Materials*, Volume 181, Springer 2022, 397p.
5. Развитие теории контактных задач в СССР.- М.: Наука, 1976.- 493с.
6. Бабешко В.А. К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел //ДАН СССР. 1989. Т.207. №2. С.324–327.
7. Бабешко В.А. Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. №3. С.5–9
8. Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р.Т. К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // Докл. РАН. 2002. Т.382. №5, С.625–628.
9. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т.68. Вып.3.С.500–507.
10. Буряк В.Г. Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости. МТТ, Изв.АН СССР, 1972, №6, с. 155-159.
11. Григорян Э.Х. О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими накладками. МТТ, Изв.АН СССР, 1972, №5, с. 101-116.
12. Зильберглейт А.С., Златина И.Н. Динамическая контактная задача для полуплоскости и полупространства. Изв. АН АрмССР, 1978, т.31, №3, с. 18-30.
13. Brock, L.M., Georgiadis, H.G., 1994. Dynamic frictional indentation of an elastic half-plane by a rigid punch. *J. Elasticity* 35, 223-249.
14. Nakobyan V.N., Sahakyan A.V., Sargsyan A.H. The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading. Труды V Межд. конф. “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”, Горис, 1-7 октября, 2005.p.56-60.
15. Акопян Л.В., Амирджян А.А., Саакян А.В. Влияние колеблющегося на границе упругой полуплоскости жёсткого штампа на напряженное состояние

вокруг внутреннего жёсткого тонкого включения, Труды XX межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов наДону, 18-21 июня 2020, ст. 29-33.

16. Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Вынужденные сдвиговые колебания штампа на границе составного полупространства с межфазными дефектами. Известия НАН РА, Механика, т.72, № 2, 2019г, с. 6-23.
17. Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Даштоян Л.Л. Плоско-деформированное состояние упругой составной плоскости с межфазными трещинами и включениями под воздействием динамических нагрузок// Известия НАН РА, Механика, т.73, № 3, 2020г, с. 3-23.
18. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа.- Н: Мир, 1962. 279с.
19. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
20. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды.- М.: Наука, 1981.- 738с.

#### **Сведения об авторах:**

**Акопян Ваграм Наслетникович** – доктор физ.-мат. наук., проф., главный научный сотрудник Института механики НАН РА,  
тел.: (37491) 350222, e-mail: [vhakobyan@sci.am](mailto:vhakobyan@sci.am)

**Амирджанян Арутюн Арменович** – кандидат физ.-мат. наук., ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА,  
тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: [amirjanyan@gmail.com](mailto:amirjanyan@gmail.com)

Поступила в редакцию 20 мая 2024г.