

**ИНОЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
ШТАМПА С УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ  
МЕЖДУ НИМИ**

**Саакян А.В.**

**Ключевые слова:** контактная задача, штамп, полуплоскость, модель Галина, трение, сцепление, скольжение, новая модель, метод механических квадратур

**Sahakyan A.V.**

**Other approach to problem of contact interaction between a stamp and an elastic half-plane in the presence of friction between them**

**Keywords:** contact problem, stamp, half-plane, Galin's model, friction, adhesion, sliding, new model, mechanical quadrature method

A new model is proposed for contacting a stamp with a flat base with an elastic half-plane in the presence of friction between them. As in the model proposed by L.A. Galin for such a problem, it is assumed that in the central part of the contact zone there is adhesion of the points of the half-plane with the base of the stamp, which is caused by the presence of friction between the stamp and the half-plane, and sliding occurs at the edges of the contact zone. The proposed model differs from the model of L.A. Galin in that the distribution of friction forces in the sliding zone is considered uniform, and not according to the law of dry friction.

A system of governing equations has been constructed, and the features of the behavior of the sought functions at the point of separation of the adhesion and sliding zones, as well as at the end point of the contact zone, have been found. The problem was solved by the method of mechanical quadratures. Numerical analysis was carried out.

**Ա.Վ.Սահակյան**

**Այլ մոտեցում դրոշմի և առաձգական կիսահարթության կոնտակտային  
փոխազդեցության խնդրին՝ նրանց միջև առկայության դեպքում**

**Հիմնաբառեր՝** կոնտակտային խնդիր, դրոշմ, կիսահարթություն, Գալինի մոդել, շփում, հարակցում, սահք, նոր մոդել, քառակուսացման բանաձևերի մեթոդ

Առաջարկվում է հարթ հիմքով դրոշմի և առաձգական կիսահարթության կոնտակտային փոխազդեցության նոր մոդել, երբ նրանց միջև առկա է շփում: Ինչպես և Լ.Ա.Գալինի կողմից առաջարկված մոդելում, ենթադրվում է, որ կոնտակտային գոտու կենտրոնական մասում տեղի ունի կիսահարթության կետերի հարակցում դրոշմի հիմքի հետ, ինչը պայմանավորված է դրոշմի և կիսահարթության միջև շփման առկայությամբ, իսկ կոնտակտի տիրույթի եզրերում տեղի ունի սահք: Առաջարկվող մոդելը տարբերվում է Լ.Ա.Գալինի մոդելից նրանով, որ շփման ուժերի բաշխումը սահքի գոտում համարվում է հավասարաչափ, այլ ոչ թե չոր շփման օրենքի համաձայն:

Կառուցվել է որոշիչ հավասարումների համակարգը, և պարզվել են փնտրվող ֆունկցիաների վարքի առանձնահատկությունները հարակցման և սահքի գոտիների բաժանման կետում, ինչպես նաև կոնտակտի տիրույթի ծայրակետում: Խնդիրը լուծվել է քառակուսացման բանաձևերի մեթոդով: Կատարվել է թվային վերլուծություն:

Предлагается новая модель контактирования штампа с плоским основанием с упругой полуплоскостью при наличии трения между ними. Как и в модели, предложенной Л.А.Галиным для такой задачи,

предполагается, что в центральной части зоны контакта имеет место сцепление точек полуплоскости с основанием штампа, которое обусловлено наличием трения между штампом и полуплоскостью, а на краях зоны контакта происходит скольжение. Предлагаемая модель отличается от модели Л.А.Галина тем, что распределение сил трения в зоне скольжения считается равномерным, а не по закону сухого трения.

Построена система определяющих уравнений, найдены особенности поведения искомых функций в точке раздела зон сцепления и скольжения, а также в концевой точке зоны контакта. Задача решена методом механических квадратур. Проведен численный анализ.

**Введение.** Рассматривается контактная задача для упругой полуплоскости, в границу которой вдавливаются жесткий штамп с плоским основанием с учетом сил трения между ними. Известно [1], что в случае сцепления штампа с полуплоскостью по всему основанию решение задачи имеет осцилляцию в очень малой окрестности угловых точек штампа. Для устранения этого недостатка в работах [2] и [3], опубликованных одновременно, были предложены модели контакта, предполагающие наличие участков сцепления в средней части зоны контакта и проскальзывания на ее концах. В первой работе принимается, что на участке проскальзывания имеет место сухое трение, т.е. тангенциальные контактные напряжения пропорциональны давлению. В постановке Л.А.Галина [2] рассматриваемая задача решалась многими авторами различными методами [4-7] и ее решение не содержит каких-либо противоречащих физическому смыслу результатов. В работе же [3], где принимается, что в у концов зоны контакта имеет место гладкий контакт, т.е. силы трения отсутствуют, самим автором указывается на «интересный» результат – изменение знака нормальных контактных напряжений на участке сцепления. Кроме того, казалось бы, что результаты работы [3] должны совпасть с результатами работы [2], в которых коэффициент трения принят равным нулю. Однако, по публикациям этого совпадения нет.

В настоящей работе предлагается решить задачу в иной постановке, приняв, что распределение тангенциальных контактных напряжений в зонах проскальзывания является равномерным и равным значению тангенциальных напряжений в соответствующем конце участка сцепления.

**2. Постановка задачи.** Пусть жесткий штамп с плоским основанием длиной  $2a$  под действием сосредоточенной нормальной силы  $P$  вдавливается в упругую полуплоскость. Рассмотрим случай, когда сила приложена к середине штампа, т.е. имеется ось симметрии, вдоль которой направим ось ординат. При этом между штампом и полуплоскостью может иметь место сухое трение с коэффициентом трения покоя  $\theta$ . В силу этого, в средней части  $(-b, b)$  зоны контакта, где тангенциальное контактное напряжение  $q(x)$  и контактное давление  $p(x)$  удовлетво-

ряют условию  $\left| \frac{q(x)}{p(x)} \right| \leq \theta$ , имеет место сцепление, а у концов происходит скольжение (рис.1).

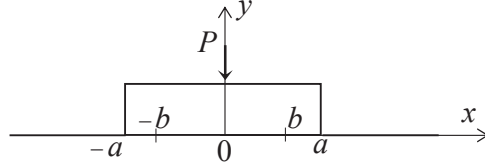


Рис. 1 Схема контакта жесткого штампа и полуплоскости.

При этом полагаем, что на участках скольжения тангенциальное напряжение  $q(x)$  сохраняет свое максимальное значение, равное  $Q = -\theta p(b)$ :

$$q(x) = \begin{cases} -Q & x \in (-a, -b) \\ q(x) & x \in (-b, b) \\ Q & x \in (a, b) \end{cases} \quad (1)$$

Приняв контактные тангенциальные напряжения  $q(x)$ , направленными к центру штампа, для граничных точек полуплоскости в зоне контакта будем иметь [8]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1-2\nu}{2\mu} p(x) - \frac{1-\nu}{\mu\pi} \int_{-a}^a \frac{q(t)}{t-x} dt; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1-2\nu}{2\mu} q(x) - \frac{1-\nu}{\mu\pi} \int_{-a}^a \frac{p(t)}{t-x} dt \quad (2)$$

где  $u(x)$  и  $v(x)$  - горизонтальная и вертикальная компоненты перемещения границы полуплоскости,  $\mu$  - модуль сдвига,  $\nu$  - коэффициент Пуассона.

Имеем следующие условия контакта:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \quad (|x| < b) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad q(x) = \text{sgn}(x)Q & \quad (b < |x| < a) \end{aligned} \quad (3)$$

Кроме того, имеет место условие равновесия штампа, выражаемое формулой:

$$\int_{-a}^a p(t) dt = P. \quad (4)$$

Ввиду симметрии в постановке задачи, определяющее уравнение составим только для правой половины зоны контакта, т.е. на интервале  $(0, a)$ .

С учетом нечетности  $q(\tau)$  и четности  $p(\tau)$  и представления (1), формулы (2) запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1-2\nu}{2\mu} p(x) - \frac{1-\nu}{\mu\pi} \left[ \int_0^b \left[ \frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right] q(t) dt - Q \int_b^a \left[ \frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right] dt \right] \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1-2\nu}{2\mu} q(x) - \frac{1-\nu}{\mu\pi} \int_0^a \left[ \frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} \right] p(t) dt \quad (0 < x < a)\end{aligned}\quad (5)$$

Перейдем к безразмерным величинам:

$$t = a\tau; \quad x = as; \quad b_* = \frac{b}{a}; \quad q_*(\tau) = \frac{aq(a\tau)}{P}; \quad p_*(\tau) = \frac{a}{P} p(a\tau); \quad Q_* = \frac{a}{P} Q$$

и подставим представления (5) в условия контакта (3). Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\int_0^{b_*} \left[ \frac{1}{\tau-s} + \frac{1}{\tau+s} \right] q_*(\tau) d\tau + Q_* \int_{b_*}^1 \left[ \frac{1}{\tau-s} + \frac{1}{\tau+s} \right] d\tau + \pi\kappa p_*(s) &= 0 \quad (0 < s < b_*) \\ \int_0^1 \left[ \frac{1}{t-s} - \frac{1}{t+s} \right] p_*(t) dt - \pi\kappa q_*(s) &= 0 \quad (0 < s < b_*) \\ \int_0^1 \left[ \frac{1}{t-\sigma} - \frac{1}{t+\sigma} \right] p_*(t) dt - \pi\kappa Q_* &= 0 \quad (b_* < \sigma < 1); \quad \kappa = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\end{aligned}\quad (6)$$

при этом условие равновесия (4) примет вид:

$$\int_0^1 p_*(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \quad (7)$$

Рассматривая контактное давление  $p_*(\xi)$  как самостоятельную функцию на каждом из участков сцепления и проскальзывания:  $p_*(\xi) = g(\xi)$  при  $\xi < b_*$  и  $p_*(\xi) = h(\xi)$  при  $b_* < \xi < 1$ , и учитывая значение интеграла

$$\int_{b_*}^1 \left[ \frac{1}{\tau-s} + \frac{1}{\tau+s} \right] d\tau = \ln \frac{1-s^2}{b_*^2 - s^2}$$

систему уравнений (6) и условие равновесия (7) запишем в виде

$$\begin{aligned}\int_0^{b_*} \left[ \frac{1}{\tau-s} + \frac{1}{\tau+s} \right] q_*(\tau) d\tau + Q_* \ln \frac{1-s^2}{b_*^2 - s^2} + \pi\kappa g(s) &= 0 \quad (0 < s < b_*) \\ \int_0^{b_*} \left[ \frac{1}{\tau-s} - \frac{1}{\tau+s} \right] g(\tau) d\tau + \int_{b_*}^1 \left[ \frac{1}{t-s} - \frac{1}{t+s} \right] h(t) dt - \pi\kappa q_*(s) &= 0 \quad (0 < s < b_*) \\ \int_0^{b_*} \left[ \frac{1}{\tau-\sigma} - \frac{1}{\tau+\sigma} \right] g(\tau) d\tau + \int_{b_*}^1 \left[ \frac{1}{t-\sigma} - \frac{1}{t+\sigma} \right] h(t) dt - \pi\kappa Q_* &= 0 \quad (b_* < \sigma < 1)\end{aligned}\quad (8)$$

$$2 \int_0^{b_*} g(\tau) d\tau + 2 \int_{b_*}^1 h(\tau) d\tau = 1 \quad (9)$$

При помощи замены переменных

$$\{\tau, s\} = \frac{b_*}{2} (1 + \{\xi, \zeta\}), \quad \{t, \sigma\} = \frac{1-b_*}{2} \{\xi, \zeta\} + \frac{1+b_*}{2} \quad (-1 < \{\xi, \zeta\} < 1) \quad (10)$$

и введения новых неизвестных функций

$$X(\xi) = q_* \left( \frac{b_*}{2} (1 + \xi) \right); \quad Y(\xi) = g \left( \frac{b_*}{2} (1 + \xi) \right); \quad Z(\xi) = h \left( \frac{1-b_*}{2} \xi + \frac{1+b_*}{2} \right) \quad (11)$$

систему (8) запишем в виде:

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\xi - \zeta} + \frac{1}{\xi + \zeta + 2} \right] X(\xi) d\xi + Q_* \ln \frac{4 - b_*^2 (1 + \zeta)^2}{b_*^2 (3 + \zeta)(1 - \zeta)} + \pi \kappa Y(\zeta) = 0$$

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{Y(\xi)}{\xi - \zeta} - \frac{Y(\xi)}{\xi + \zeta + 2} \right] d\xi + \int_{-1}^1 \left[ \frac{Z(\xi)}{\xi + \frac{1-b_*\zeta}{1-b_*}} - \frac{Z(\xi)}{\xi + \frac{1+2b_*+b_*\zeta}{1-b_*}} \right] d\xi - \pi \kappa X(\zeta) = 0 \quad (12)$$

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{Y(\xi)}{\xi + \zeta - \frac{1+\zeta}{b_*}} - \frac{Y(\xi)}{\xi - \zeta + 2 + \frac{1+\zeta}{b_*}} \right] d\xi + \int_{-1}^1 \left[ \frac{Z(\xi)}{\xi - \zeta} - \frac{Z(\xi)}{\xi + \zeta + 2 + \frac{1+b_*}{1-b_*}} \right] d\xi - \pi \kappa Q_* = 0$$

причем аргумент  $\zeta$  принадлежит интервалу  $(-1, 1)$ .

Условие равновесия (9) тогда примет вид:

$$b_* \int_{-1}^1 Y(\xi) d\xi + (1 - b_*) \int_{-1}^1 Z(\xi) d\xi = 1 \quad (13)$$

Очевидно, что неизвестные функции  $X(\xi)$  и  $Y(\xi)$  являются непрерывными функциями, принимающими конечные значения на обоих концах отрезка интегрирования, функция же  $Z(\xi)$  на правом конце неограничена. Учитывая последнее обстоятельство, как и равенство  $X(1) = Q_* = -\theta Y(1) = -\theta Z(-1)$ , и основываясь на результаты анализа поведения уравнений в концевых точках отрезка интегрирования, и решение системы можно представить в виде

$$\begin{aligned}
X(\xi) &= \frac{1+\xi}{2} Q_* + X^*(\xi) \sqrt{1-\xi} \\
Y(\xi) &= -\frac{Q_*}{\theta} + Y^*(\xi) \sqrt{1-\xi} \\
Z(\xi) &= -\frac{Q_*}{\sqrt{2\theta}} \sqrt{1-\xi} + Z^*(\xi) \frac{\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1-\xi}}
\end{aligned} \tag{14}$$

где  $Q_*$  - постоянная, подлежащая определению,  $X^*(\xi), Y^*(\xi), Z^*(\xi)$  - гельдеровские функции, ограниченные на отрезке  $[-1, 1]$ .

Подставляя (14) в (12) и (13), получим определяющую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\xi-\zeta} + \frac{1}{\xi+\zeta+2} \right] X^*(\xi) \sqrt{1-\xi} d\xi + \pi \kappa Y^*(\zeta) \sqrt{1-\zeta} + Q_* L_1(\zeta) = 0 \\
& - \pi \kappa X^*(\zeta) \sqrt{1-\zeta} + \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\xi-\zeta} - \frac{1}{\xi+\zeta+2} \right] Y^*(\xi) \sqrt{1-\xi} d\xi + \int_{-1}^1 \frac{Z^*(\xi)}{\xi + \frac{1-b_*\zeta}{1-b_*}} \frac{\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1-\xi}} d\xi - \\
& - \int_{-1}^1 \frac{Z^*(\xi)}{\xi + \frac{1+2b_*+b_*\zeta}{1-b_*}} \frac{\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1-\xi}} d\xi - \frac{Q_*}{\theta} L_2(\zeta) = 0 \\
& \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\xi - \frac{1+(1-b_*)\zeta}{b_*}} - \frac{1}{\xi + \frac{1+2b_*(1-b_*)\zeta}{b_*}} \right] Y^*(\xi) \sqrt{1-\xi} d\xi + \int_{-1}^1 \frac{Z^*(\xi)}{\xi-\zeta} \frac{\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1-\xi}} d\xi - \\
& - \int_{-1}^1 \frac{Z^*(\xi)}{\xi+\zeta+2} \frac{1+b_*}{1-b_*} \frac{\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1-\xi}} d\xi - \frac{Q_*}{\theta} L_3(\zeta) = 0 \\
& b_* \int_{-1}^1 Y^*(\xi) \sqrt{1-\xi} d\xi + (1-b_*) \int_{-1}^1 Z^*(\xi) \frac{\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1-\xi}} d\xi - \frac{2(2+b_*)}{3\theta} Q_* = 1
\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
L_1(\zeta) &= -\frac{1-\zeta}{2} \ln(1-\zeta) - \frac{3+\zeta}{2} \ln(3+\zeta) + 2 + \ln \frac{4-b_*^2(1+\zeta)^2}{b_*^2} - \frac{\pi \kappa}{\theta} \\
L_2(\zeta) &= \ln\left(\frac{1-\zeta}{3+\zeta}\right) + \sqrt{\frac{2+b_*+b_*\zeta}{2(1-b_*)}} \ln \frac{\sqrt{2+b_*+b_*s} - \sqrt{2(1-b_*)}}{\sqrt{2+b_*+b_*s} + \sqrt{2(1-b_*)}} + \\
&\quad + \sqrt{\frac{2-b_*-b_*\zeta}{2(1-b_*)}} \ln \frac{\sqrt{2-b_*-b_*s} + \sqrt{2(1-b_*)}}{\sqrt{2-b_*-b_*s} - \sqrt{2(1-b_*)}} + \pi \kappa \theta \frac{1+\zeta}{2} \\
L_3(\zeta) &= \pi \kappa \theta - 2 \operatorname{arctg} \frac{b_*}{1+\zeta-b_*\zeta} - \ln\left(\frac{1+3b_*+\zeta(1-b_*)}{1+b_*+\zeta(1-b_*)}\right) + \\
&\quad + \sqrt{2} \left[ \sqrt{1-\zeta} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\zeta}{2}} - \sqrt{\frac{3+b_*+\zeta(1-b_*)}{1-b_*}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2(1-b_*)}{3+b_*+\zeta(1-b_*)}} \right]
\end{aligned}$$

Неизвестные функции  $X^*(\xi)$ ,  $Y^*(\xi)$  и  $Z^*(\xi)$  заменим интерполяционными многочленами с неизвестными коэффициентами  $X_j, Y_j, Z_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ):

$$\begin{aligned}
\{X^*(x), Y^*(x)\} &= \frac{4}{2n+3} \sum_{j=1}^n \frac{\{X_j, Y_j\} P_n^{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}(x)}{(x-\xi_j) P_{n-1}^{\left(\frac{3}{2}, 1\right)}(\xi_j)}, \quad P_n^{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}(\xi_j) = 0 \\
Z^*(x) &= \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^n \frac{Z_j P_n^{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x)}{(x-\zeta_j) P_{n-1}^{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)}(\zeta_j)}, \quad P_n^{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(\zeta_j) = 0
\end{aligned} \quad (16)$$

и воспользуемся квадратурной формулой для интегралов типа Коши [9]:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(x)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}{x-z} dx \approx \sum_{j=1}^n \frac{w_j^{(\alpha, \beta)} \varphi(\xi_j)}{\xi_j - z} \left[ 1 - \frac{R_n^{(\alpha, \beta)}(z)}{R_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_j)} \right] \quad \left( \begin{array}{l} \alpha, \beta > -1 \\ z \neq \pm 1 \end{array} \right) \quad (17)$$

где  $\xi_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) корни многочлена Якоби  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ,

$$w_i^{(\alpha, \beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+3}}{(1-\xi_i^2)} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \left[ \frac{1}{(\alpha+\beta+n+1) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\xi_i)} \right]^2;$$

$$R_n^{(\alpha, \beta)}(z) = -\left(\frac{2}{z+1}\right)^{n+1} 2^{\alpha+\beta} B(n+\alpha+1, n+\beta+1) \times \\ \times F\left[n+1, n+\beta+1; 2n+\alpha+\beta+2; \frac{2}{1+z}\right]$$

Заменяя в определяющей системе (15) все интегралы на квадратурные суммы и выбирая в качестве точек коллокации для первых двух уравнений корни функции  $R_n^{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}(x)$ , число которых равно  $n+1$ , а для третьего уравнения корни функции  $R_n^{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x)$ , число которых равно  $n$ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $X_j, Y_j, Z_j (j=\overline{1, n})$  и постоянной  $Q_*$ . Нетрудно просчитать, что полученная система, вместе с дискретизированным условием равновесия, будет содержать  $3n+3$  уравнения, а неизвестных всего  $3n+1$ . Отметим, что, кроме указанных, есть еще и неизвестная  $b_*$ , которая нелинейным образом входит в матрицу коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений и подлежит определению.

Следуя работе [10], где для системы, переполненной одним уравнением, предлагается ввести дополнительную неизвестную  $\gamma$  и, следя за обращением ее в ноль, обеспечить единственное решение переполненной системы, здесь необходимо ввести две дополнительные неизвестные  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . При этом они вводятся только в группы линейных уравнений, соответствующих первым трем уравнениям системы (15), причем хотя бы в одной из этих групп должна присутствовать только одна из этих неизвестных.

Численный анализ показал, что значения неизвестных  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  зависят от порядка аппроксимации  $n$  и от предварительно заданного значения относительной длины зоны сцепления  $b_*$ , но каждая из них практически зависит только от одного из этих параметров. Учитывая, что  $b_*$  подлежит определению, следует выбрать такой порядок аппроксимации  $n$ , чтобы одна из неизвестных  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  была близка к нулю с заданной степенью точности, далее подбором значений  $b_*$  обратить в ноль вторую неизвестную. Подобная ситуация встречалась и достаточно подробно описана в работе [7], где рассматриваемая задача в постановке Л.А.Галина решена этим же методом.

**Численный анализ.** При помощи численного анализа сходимости квадратурных формул подобран порядок аппроксимации  $n=13$ , обеспечивающий точность не менее  $10^{-4}$ . На основе многочисленных расчетов построены кривые зависимости значения относительной длины зоны сцепления  $b_*$  как от коэффициента трения  $\theta$



при разных значениях коэффициента Пуассона  $\nu$ , так и от коэффициента трения  $\theta$ . Построены также графики распределения контактного давления и тангенциального напряжения в зоне контакта

На рис. 2 представлены кривые зависимости  $b_*$  от коэффициента Пуассона  $\nu$  при разных значениях коэффициента трения  $\theta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ , а на рис. 3 - кривые зависимости  $b_*$  от коэффициента трения  $\theta$  при разных значениях коэффициента Пуассона  $\nu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ .

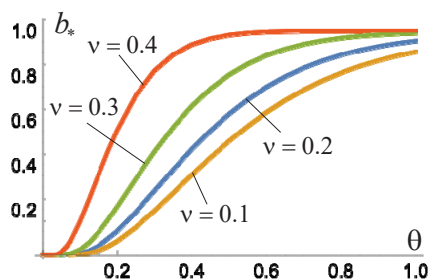


Рис.2 Зависимость  $b_*$  от  $\theta$

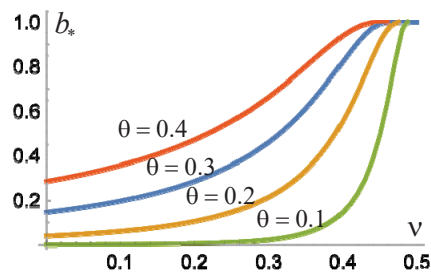


Рис.3 Зависимость  $b_*$  от  $\nu$

Для двух пар значений коэффициента Пуассона  $\nu$  и коэффициента трения  $\theta$  просчитаны контактные нормальные и тангенциальные напряжения. На рис. 4 показано распределение контактного давления  $p_*(s)$ , а на рис. 5 - безразмерного тангенциального напряжения  $q_*(s)$  в зоне контакта: сплошные линии соответствуют значениям  $\nu = 0.3$  и  $\theta = 0.35$ , а пунктирные линии - значениям  $\nu = 0.3$  и  $\theta = 0.3$ .

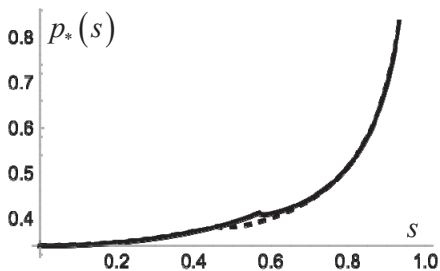


Рис. 4 Контактное давление в зоне контакта

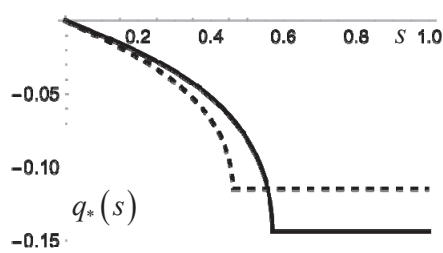


Рис. 5 Тангенциальные напряжения в зоне контакта

Нетрудно заметить, что качественно поведения этих напряжений одинаковы, но количественно заметно меняются и, особенно, в связи с изменением значений  $b_*$ . Подобная картина имеет место и для других значений  $\nu$  и  $\theta$ . Отрицательные значения напряжения  $q_*(s)$  означают, что они направлены не к центру, как было принято, а от центра.

Вычислим тангенциальную компоненту перемещения граничных точек полуплоскости в зоне контакта и вне ее. Посредством искомым функций  $X^*(\xi)$ ,  $Y^*(\xi)$ ,  $Z^*(\xi)$  и константы  $Q_*$  безразмерное перемещение  $u_*(s) = \frac{\pi\mu}{P(1-\nu)}u(as)$  выразится формулой:

$$u_*(s) = -\pi k \varphi(s) - \frac{b_*}{2} \int_{-1}^1 \ln \left( \frac{2s + b_*(1+\xi)}{|2s - b_*(1+\xi)|} \right) \left[ X^*(\xi) \sqrt{1-\xi} d\xi - \right. \\ \left. - Q_* \left[ s - \frac{s^2 + b_*^2}{2b} \ln \left| \frac{s + b_*}{s - b_*} \right| + \ln \left| \frac{s+1}{s-1} \right| - s \ln \left| \frac{s^2 - b_*^2}{s^2 - 1} \right| \right] \right] \quad (s > 0) \quad (18)$$

где функция  $\varphi(s)$  имеет следующие представления:

в зоне сцепления ( $0 < s < b_*$ )

$$\varphi(s) = -Q_* \frac{s}{\theta} + \frac{b_*}{2} \int_{-1}^{\frac{2s-1}{b_*}} Y^*(\xi) \sqrt{1-\xi} d\xi$$

в зоне скольжения ( $b_* < s < 1$ )

$$\varphi(s) = \frac{b_*}{2} \int_{-1}^1 Y^*(\xi) \sqrt{1-\xi} d\xi - \frac{Q_*}{3\theta} \left( 2 + b_* - 2(1-b_*) \left( \frac{1-s}{1-b} \right)^{\frac{3}{2}} \right) + \\ + \frac{1-b_*}{2} \int_{-1}^{\frac{2s-1-b_*}{1-b_*}} Z^*(\xi) \frac{\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1-\xi}} d\xi$$

вне зоны контакта ( $1 < s$ )

$$\varphi(s) = 0.5.$$

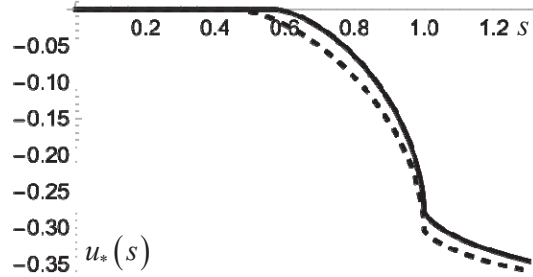


Рис.6 Тангенциальная компонента безразмерного перемещения в зоне контакта и вне ее

На Рис.6 представлены кривые значений тангенциальной компоненты перемещения  $u_*(s)$ , рассчитанных для тех же значений  $\nu$  и  $\theta$ , для которых вычислялись и контактные напряжения. Отметим, что и эта кривая качественно повторяется для других значений  $\nu$  и  $\theta$ .

На бесконечности перемещение  $u_*(s)$  стремится к значению  $-\frac{\pi\kappa}{2}$ , которое соответствует значению горизонтального перемещения задачи Фламана от силы  $P$ . Так как предельное значение не зависит от коэффициента трения, то кривые на Рис. 6 будут сближаться и, монотонно возрастая, стремиться к значению  $-\frac{\pi}{7} \approx -0.4488$ .

Для вычисления перемещений  $u_*(s)$  использовались квадратурные формулы для вычисления интеграла с логарифмическим ядром и вычисления интеграла с переменным верхним пределом [11], использующие значения найденных из с.л.а.у. коэффициентов  $X_j, Y_j, Z_j (j = \overline{1, n})$  и постоянной  $Q_*$ .

**Заключение.** Представлена новая модель учета трения в плоской контактной задаче о вдавливании жесткого штампа с плоским основанием в упругую полуплоскость при наличии трения между ними. В отличие от хорошо известной модели Л.А.Галина, предполагающей действие закона сухого трения в зоне скольжения, здесь предлагается равномерное распределение тангенциальных напряжений по этой зоне. Задача решена методом механических квадратур. Рассчитаны контактные напряжения, найдена длина зоны сцепления, рассчитано тангенциальное перемещение в зоне контакта и вне ее. Результаты адекватно описывают ситуацию и не противоречат физической постановке задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов В.М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения. Доклады АН СССР, 1937, т.17, №4, с. 173-178.
2. Галин Л.А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. ПММ, 1945, т. 9, №5, с. 413-424
3. Фалькович С.В. О давлении жесткого штампа на упругую полуплоскость при наличии участков сцепления и скольжения. ПММ, 1945, т. 9, №5, с. 425-432
4. Моссаковский В.И., Бискуп А.Г. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. ДАН СССР, 1972, т. 206, №5, с. 1068-1070.
5. Антипов Ю.А., Арутюнян Н.Х. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления. ПММ, 1991, т. 55, вып. 6, с. 1005-1017.
6. Острик В.И., Улитко А.Ф. Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. Киев, Наукова Думка, 2006, 328с.
7. Саакян А.В. Решение контактной задачи с зонами трения и сцепления (задача Галина) методом дискретных особенностей. Сб. «Развитие идей Л.А.Галина в механике», посвященный 100-летию со дня рождения ученого, М.-Ижевск, 2013, сс.103-120.
8. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М., Наука, 1980, 304 с.
9. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
10. Лифанов И.К. О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. ДАН СССР, 1980, т. 255, № 5, с. 1046-1050.
11. Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A. Quadrature formulas for integrals with a weak singularity in the kernel and a weight function of Jacobi polynomials with complex exponents. In Book: Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. book series Advanced Structured Materials (STRUCTMAT, volume 185), Editors: H.Altенbach, S.Mkhitaryan, V.Nakobyan, A.Sahakyan, 2023, p. 285-298, [https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9_21)

#### **Сведения об авторе:**

**Саакян Аветик Вараздатович,**

доктор физ.-мат. наук, зав.отделом Института механики НАН РА,

Тел.: (37410) 568188, (37494)579348

E-mail: [avetik.sahakyan@sci.am](mailto:avetik.sahakyan@sci.am)

Поступила в редакцию 18.03.2024