ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №1, 2024 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.1-40

СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР УДЛИНЕННОЙ ПАНЕЛИ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ, ПЕРВОНАЧАЛЬНО НАГРУЖЕННОЙ ПО ДВУМ НАПРАВЛЕНИЯМ: СЖАТОЙ ПО ПОТОКУ ГАЗА И РАСТЯНУТОЙ В ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Мартиросян С. Р.

Ключевые слова: удлинённая прямоугольная пластинка, первоначальные сжимающие и растягивающие усилия, сверхзвуковое обтекание, аэроупругая устойчивость, сосредоточенные инерционные массы и моменты, аналитический метод решения

S.R. Martirosyan

Supersonic flutter of an elongated panel with a free edge, initially loaded in two directions: compressed along the gas flow and stretched in the perpendicular direction

Key words: rectangular elongated plate, the initial compressive and tensile forces, supersonic overrunning, aeroelastic stability, concentrated inertial masses and moments, analytical solution method

By analyzing, as an example, a thin elastic elongated plate, initially loaded in two directions: compressed along supersonic the gas flow and stretched in the perpendicular direction, we study the influence of the initial stress state of the plate on the stability of the unperturbed equilibrium state of the dynamical system “plate – flow” under the assumption of presence of concentrated inertial masses and moments on its free edge. An analytical solution of the problem of stability is obtained. An accurate assessment of the influence of initially loading forces on the stability of the system is given.

Ս.Ռ.Մարտիրոսյան

Նախապես սեղմված գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ և միաժամանակ ձգված ուղղահայաց ուղղությամբ մեկ ազատ եզրով երկարաձիգ ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին

Հիմնաբառեր՝ երկարաձիգ ուղղանկյուն սալ, սեղմող և ձգող ուժեր, առաձգական կայունություն, գերձայնային շրջհոսում, իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, անալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է գերձայնային գազի հոսքում նախնական սեղմված շրջհոսման ուղղությամբ և միաժամանակ ձգված ուղղահայաց ուղղությամբ մեկ ազատ եզրով առաձգական երկարաձիգ ուղղանկյուն սալի նախնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը «սալ–հոսք» դինամիկ համակարգի ոչխոտորված հավասարակշռության վիճակի կայունության վրա: Ենթադրվում է, որ սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: Գնահատված է նախնական ուժերի ազդեցությունը «սալ–հոսք» համակարգի կայունության վրա:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначального напряжённого состояния тонкой упругой удлинённой прямоугольной пластинки, нагруженной в двух направлениях сжимающими и растягивающими силами по потоку сверхзвукового газа и в перпендикулярном направлении соответственно, на устойчивость невозмущённого состояния равновесия динамической системы

«пластинка–поток» в предположении, что на свободном крае пластинки имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты. Получено аналитическое решение задачи устойчивости. Дана точная оценка влиянию первоначальных усилий на устойчивость системы.

Введение. Рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение [1 – 4].

В предлагаемой статье исследуется влияние первоначального напряжённого состояния удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями на устойчивость невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» при предположениях: прямоугольная пластинка первоначально нагружена сжимающими силами по потоку газа и растягивающими – в перпендикулярном направлении; сверхзвуковой поток газа набегает на её свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты.

Получено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка-поток» с помощью алгоритма, подробно изложенного в [12].

Показано, что невозмущённое состояние равновесия системы «пластинка–поток» теряет устойчивость в виде дивергенции панели как эйлеровой, так и не эйлеровой, и в виде панельного флаттера. Определены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости [11].

Дана точная оценка влиянию соотношения первоначальных сжимающих и растягивающих сил на порог устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы, в зависимости от её «существенных» параметров и от относительной толщины пластинки.

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

Результаты работы могут быть использованы при обработке данных экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая достаточно удлинённая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$, $ab^{-1} \le 0.193$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа принимается плоским и потенциальным.

Пусть край $x=0$ пластинки свободен, а края $x=a$, $y=0$ и $y=b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x=0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 8]. Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию сжимающих $N_x = 2h\sigma_x$ и растягивающих $N_y = 2h\sigma_y$ сил, равномерно распределённых, соответственно, по кромкам пластинки $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$, являющимися результатом нагрева, или каких – либо других причин; усилия σ_x и σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба $w=w(x,y,t)$ [1, 2, 5].

Прогиб пластинки $w=w(x,y,t)$ вызывет избыточное давление δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» $\delta p=-a_0\rho_0 V\dfrac{\partial w}{\partial x}$, где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [6, 7]. Будем полагать, что прогибы $w=w(x,y,t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$ [1, 5].

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками δp, сжимающими усилиями σ_x и σ_y в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами I_c, приложенными вдоль её свободного края $x=0$, в предположении, что усилия σ_x и σ_y малы по сравнению с критическими значениями $(\sigma_x)_{cr.}$ и $\left(\sigma_y\right)_{pr.}$, где $(\sigma_x)_{cr.}$ – усилия, которые могут произвести «выпучивание» пластинки в отсутствии обтекания [1, 13, 14]; $\left(\sigma_y\right)_{pr.}$ – усилие, начиная с которого имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [9].

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в рамках справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» и в предположении малости интенсивности $m\,\partial^2 w/\partial t^2$ распределённой массы пластинки m в сравнении с интенсивностями $m_c\,\partial^2 w/\partial t^2$ и $I_c\,\partial^2 w/\partial t^2$, учитываемых в граничных условиях, будет описываться соотношением [1, 2, 6–8]:

$$D\Delta^2 w+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+a_0\rho_0 V\frac{\partial w}{\partial x}=0,\ w=w\left(x,y,t\right); \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w=\Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1, 2, 8]:

$$D\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=I_c\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}, \tag{1.2}$$

$$D \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + N_x \frac{\partial w}{\partial x} = -m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ при } x = 0;$$

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = a \text{ и } w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b; \tag{1.3}$$

ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа – в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}), \ M_0 = \sqrt{2}, \ M_{2\cos m.} \approx 33.85; \tag{1.4}$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.3) в предположении:

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{cr.}, \ \sigma_y < (\sigma_y)_{pr.} \tag{1.5}$$

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы (1.1) – (1.3) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) и (1.3) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале (1.4) при условии (1.5). Задачу устойчивости (1.1) – (1.5) будем исследовать в случае достаточно удлинённых прямоугольных пластинок [1, 2, 12, 14, 15]:

$$\gamma = ab^{-1} \leq 0.193, \tag{1.6}$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b.

В работе [12] получено аналитическое решение задачи (1.1) – (1.3) для всех значений $\gamma \in [0, \infty]$ в отсутствии первоначальных усилий в срединной поверхности пластинки $(\sigma_x = \sigma_y = 0)$. В работе [14] исследована исходная задача устойчивости, при условии $\sigma_y = 0$. Показано, что сжимающие усилия σ_x приводят к существенному понижению устойчивости системы. В работе [15] получено решение задачи (1.1) – (1.5) для всех $\gamma \in [0, \infty]$ в статической постановке $(m_c = 0, I_c = 0)$ по методу Эйлера. Показано, что система «пластинка-поток» теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели и в виде локализованной дивергенции, в зависимости от её параметров. Исследована граница перехода из области эйлеровой дивергенции панели в область локализованной дивергенции. Найдены критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции. Заметим, что согласно обозначению (1.6) значению $\gamma = 0$ соответствует предельный случай прямоугольной пластинки – бесконечно удлинённая пластинка.

2. **Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.3).** Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы (1.1) – (1.3) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), будем искать в виде гармонических колебаний [1, 2, 12]:

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp(\mu_n rx+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y)\,,\ \mu_n=\pi nb^{-1}, \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое состояние равновесия системы (1.1) – (1.3) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\lambda<0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\lambda>0$). Критическая скорость потока газа V_{cr}, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\mathrm{Re}\lambda=0$) [1, 2, 10].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» в виде [15]:

$$r^4-2\cdot(1-\beta_x^2)\cdot r^2+\alpha_n^3\cdot r+(1+\beta_y^2)=0\,, \tag{2.2}$$

где α_n^3 – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3=a_0\rho_0 VD^{-1}\mu_n^{-3}\in(a_0^2\rho_0 M_0 D^{-1}\mu_n^{-3},\ a_0^2\rho_0 M_{2\cos m.}D^{-1}\mu_n^{-3})\,; \tag{2.3}$$

β_x^2 и β_y^2 – коэффициенты напряжений усилий σ_x и σ_y соответственно, характеризующие консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2=1/2\cdot N_x\,D^{-1}\mu_n^{-2}=h\sigma_x D^{-1}\mu_n^{-2}<(\beta_x^2)_{cr.},\ (\beta_x^2)_{cr.}=h(\sigma_x)_{cr.}D^{-1}\mu_n^{-2}\,; \tag{2.4}$$

$$\beta_y^2=N_y D^{-1}\mu_n^{-2}=2h\sigma_y D^{-1}\mu_n^{-2}<(\beta_y^2)_{pr.},\ (\beta_y^2)_{pr.}=2h(\sigma_y)_{pr.}D^{-1}\mu_n^{-2}\,;$$

согласно условиям (1.4) , (1.5) и обозначению (2.3).

В соответствии с известным решением Феррари, уравнение (2.2) можно представить в виде произведения двух квадратных трёхчленов или, соответственно,

$$\left(r^2+\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot r+q-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)=0\,, \tag{2.5}$$

$$\left(r^2-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot r+q+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)=0\,. \tag{2.6}$$

где $q\in R$ – единственный действительный корень кубического уравнения [12, 16}:

$$8\cdot(q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2)-\alpha_n^6=0\,. \tag{2.7}$$

В соответствии с обозначением (2.3) очевидно, что параметр q характеризует скорость потока газа V при фиксированных значениях остальных параметров системы [12, 14, 15]. В силу условия (1.4), имеем: $q\in(q\left(a_0M_0\right),q(a_0M_{2\cos m.}))$.

Здесь, как и в работах [12, 14], с помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2) можно показать, что

$$q=q\left(V\right)\in\left(q_0,\ q\left(a_0M_{2\cos m.}\right)\right)\subseteq\left(q\left(a_0M_0\right),q\left(a_0M_{2\cos m.}\right)\right), \tag{2.8}$$

$$q_0=\left(\beta_x^2-1)+2\sqrt{(\beta_x^2-1)^2+3(1+\beta_y^2)}\right)\Big/3\,,\ \beta_x^2<(\beta_x^2)_{cr}\ ,\ \beta_y^2<(\beta_y^2)_{pr}\,.$$

В таблице 1 приведены критические значения коэффициента напряжения: $(\beta_x^2)_{cr} = (\beta_x^2)_{cr}\left(n,\gamma,\nu\right)$ – решения дисперсионного уравнения исходной задачи устойчивости в отсутствии обтекания $\left(V=0\right)$ для $\gamma \le 0.2$ при $n=1$, $\beta_y^2=0$ и $m_c=0, I_c=0$, найденные с точностью до порядка 10^{-4} [13, 14]:

$$F_1\left(n,\gamma,\nu,\beta_x^2\right)=\sqrt{0.5\beta_x^2}\left(4-2\beta_x^2-\left(1+\nu\right)^2\right)sh\left(2\pi n\gamma\sqrt{1-0.5\beta_x^2}\right)-$$

$$-\sqrt{1-0.5\beta_x^2}\left(2\beta_x^2-\left(1-\nu\right)^2\right)\sin\left(2\pi n\gamma\sqrt{0.5\beta_x^2}\right)=0\,,\ \beta_x^2\in\left(0,2\right).$$

Очевидно, что бесконечно удлинённая пластинка $\left(\gamma=0\right)$ в отсутствии обтекания $\left(V=0\right)$ является неустойчивой при всех $\beta_x^2 \ge 0$ и $\beta_y^2 \ge 0$ вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.4), как и в случае отсутствия сил растяжения $\left(\beta_x^2 \ne 0, \beta_y^2 = 0\right)$, исследованном в [14].

Таблица 1.

γ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$\le$ 0.010	0.8752	0.7501	0.7001	0.6251	0.5000
0.050	0.8791	0.7538	0.7037	0.6285	0.5031
0.100	0.8911	0.7654	0.7149	0.6391	0.5122
0.150	0.9112	0.7845	0.7332	0.6564	0.5273
0.200	0.9392	0.8108	0.7589	0.6804	0.5480

При значениях (2.8) характеристическое уравнение (2.2) имеет два отрицательных корня $r_1<0$, $r_2<0$ и пару комплексно сопряжённых корней $r_{3,4}\in W$ с положительной вещественной частью, являющихся решением квадратных уравнений (2.5) и (2.6) соответственно:

$$r_{1,2}=-0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pm\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-0.5(q-1+\beta_x^2)}\,,\ r_1<0,\ r_2<0; \quad (2.9)$$

$$r_{3,4}=0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+0.5(q-1+\beta_x^2)}\,. \quad (2.10)$$

Тогда, в соответствии с выражениями (2.9) и (2.10), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда:

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4}C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y)\,. \quad (2.11)$$

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.7), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q)=2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2)}\cdot\pi^3 n^3\gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1},\gamma\in\left(0,0.193\right]. \quad (2.12)$$

позволяющую по известному значению параметра $q = q\left(n, \gamma, \beta_x^2, \beta_y^2, \nu\right)$ определить приведённую скорость потока газа $V\left(q\right) \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$.

Учитывая условия (1.4), из выражения (2.12) согласно формуле цилиндрической жёсткости $D = E \cdot (2h)^3 \big/ \left(12\left(1-\nu^2\right)\right)$ следует [14]:

$V\left(q\right) D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) \in (V(q_0) D^{-1}(a_0\rho_0 a^3), a_0 M_{2\cos m}\Psi) \subseteq (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.})\Psi$,

когда $V(q_0) \geq a_0\rho_0$;

$V\left(q\right) D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.})\Psi$, когда $V(q_0) < a_0\rho_0$;

$$\Psi = 12(1-\nu^2) a_0\rho_0 E^{-1}(2ha^{-1})^{-3},\ M_0 = \sqrt{2},\ M_{2\cos m.} \approx 33.85. \tag{2.13}$$

Подставляя значения относительной толщины пластинки $2ha^{-1} \in \left[0.006,\ 0.015\right]$ в выражения (2.13) получаем интервалы $d\left(2ha^{-1}, \nu\right) = (a_0 M_0,\ a_0 M_{2\cos m})\Psi$ допустимых значений приведённой скорости $VD^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.4) для стальных пластинок (табл. 2) [14].

Таблица 2.

ν / $2ha^{-1}$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.8,1311.7)	(52.0,1245.2)	(50.5,1209.0)	(47.7,1141.6)	(41.6,996.3)
0.008	(23.1, 544.3)	(22.0, 516.4)	(21.5, 505.6)	(20.1, 473.3)	(17.6,413.1)
0.010	(11.8, 283.5)	(11.2, 269.1)	(10.9, 261.3)	(10.3, 246.7)	(9.0, 215.3)
0.012	(6.85, 164.0)	(6.5, 155.7)	(6.3, 151.2)	(5.96, 142.7)	(5.2, 124.6)
0.014	(4.3, 101.5)	(4.09, 96.24)	(4.0, 94.24)	(3.75, 88.22)	(3.27, 77.0)
0.015	(3.5, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23,77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

3. Достаточные признаки потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4).

3.1. Достаточно удлинённая прямоугольная пластинка $\left(\gamma \in \left(0, 0.193\right]\right)$.

Подставляя общее решение (2.11) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.9) и (2.10), в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель, описывается биквадратным уравнением относительно собственного значения λ:

$$\chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + \left(\chi_n A_1 + \delta_n A_2\right)\lambda^2 + A_3 = 0, \tag{3.1}$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3},\ \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1},\ \delta_n > 0,\ \chi_n > 0, \tag{3.2}$$

δ_n и γ_n – приведённые значения сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки;

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2, \beta_y^2) = \tag{3.3}$$

$$= \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\left(1-\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma\right)B_1B_2 -$$

$$-2B_2\left(q+1-\beta_x^2+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)sh(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2) -$$

$$-2B_1\left(q+1-\beta_x^2-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)ch(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2);$$

$$A_1 = A_1(q, n, \gamma, \beta_x^2, \beta_y^2) = \tag{3.4}$$

$$= 2(q+1-\beta_x^2)\left[(q-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})+(q+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma\right]\cdot$$

$$\cdot B_1B_2+2B_2\left[\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2)}\left(q+1-\beta_x^2+\sqrt{(q^2-1-\beta_y^2}\right)sh(\pi n\gamma B_1)+\right.$$

$$\left.+2B_1((2q-1)(q+1)-\beta_y^2-q\beta_x^2)\,ch(\pi n\gamma B_1)\right]\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)+$$

$$+2\left[B_1\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2)}\left(q+1-\beta_x^2-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)ch(\pi n\gamma B_1)+\right.$$

$$\left.+(q+1-\beta_x^2)(q-1-\beta_y^2-q\beta_x^2)sh(\pi n\gamma B_1)\right]\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma);$$

$$A_2 = A_2(q, n, \gamma, \beta_x^2, \beta_y^2) = \tag{3.5}$$

$$= 2(q+1-\beta_x^2)\left(1+\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\right)B_1B_2 -$$

$$-4(q+1-\beta_x^2)B_1B_2ch(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)+$$

$$+2(3(q^2-1)+2\beta_x^2-\beta_x^4-2\beta_y^2)sh(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma);$$

$$A_3 = A_3(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2) = \tag{3.6}$$

$$= \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2-\right.$$

$$\left.-2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\right\}B_1B_2-\sqrt{2\left(q+1-\beta_x^2\right)}\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2-\right.$$

$$\left.-2(q+1)\nu-\left(1-\nu\right)^2-2\beta_x^2\left(q+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\right\}B_1B_2\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma+$$

$$+\ 2B_2\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\Big\{\big[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-$$

$$-(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)-(2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-\beta_y^2-2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2+$$

$$+\Big(q-1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\Big)\beta_y^2-2((2q-1)(\mathrm{q}+1)-q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-\beta_y^2-q\beta_x^2)\nu+$$

$$+(\mathrm{q}+1-\beta_x^2+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\,\nu^2\big]sh(\pi n\gamma B_1)+$$

$$+2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)^3(q^2-1-\beta_y^2)}\,B_1 ch\left(\pi n\gamma B_1\right)\Big\}\cdot\cos(\pi n\gamma B_2)+$$

$$+2\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\Big\{-B_1\big[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+$$

$$+(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)+(2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-\beta_y^2-2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2-$$

$$-\Big(q-1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\Big)\beta_y^2+2((2q-1)(\mathrm{q}+1)+q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-\beta_y^2-q\beta_x^2)\nu-$$

$$-\ (\mathrm{q}+1-\beta_x^2-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\,\nu^2\big]ch(\pi n\gamma B_1)-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)\left(q^2-1-\beta_y^2\right)}\cdot$$

$$\cdot(3(q^2-1)+2\beta_x^2-\beta_x^4-2\beta_y^2)\cdot sh\left(\pi n\gamma B_1\right)\Big\}\sin\left(\pi n\gamma B_2\right);$$

$$B_1=\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-0.5(q-1+\beta_x^2)},\ \ B_2=\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+0.5(q-1+\beta_x^2)}. \quad (3.7)$$

Легко показать, что при допустимых значениях параметра $q=q(V)$ (2.8) и коэффициентов напряжений $\beta_x^2<(\beta_x^2)_{cr.}$ (табл. 1) и $\beta_y^2<(\beta_y^2)_{pr.}$

$$B_1=B_1(q,\beta_x^2,\beta_y^2)>0\,,\ B_2=B_2(q,\beta_x^2,\beta_y^2)>0\,, \quad (3.8)$$

откуда следует справедливость неравенств

$$A_0=A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2)>0\,,\ A_2=A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2)>0\,,\ \ \gamma\in\left(0,0.193\right]. \quad (3.9)$$

Вводя обозначение

$$k_n=\chi_n\cdot\delta_n^{-1}=I_c\left(\pi n\gamma\right)^2\cdot\left(m_c a^2\right)^{-1}, \quad (3.10)$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.9), перепишется в виде

$$\lambda^4+(k_nA_1+A_2)\chi_n^{-1}A_0^{-1}\lambda^2+\chi_n^{-1}\delta_n^{-1}A_0^{-1}A_3=0\,,\ \delta_n>0\,,\ \chi_n>0\,,\ k_n>0\,. \quad (3.11)$$

Заметим, что непосредственной подстановкой $\beta_x^2=\beta_y^2=0$ в уравнение (3.11) можно убедиться в его тождественности уравнению, полученному в работе [12].

3.2. Бесконечно удлинённая пластинка $\left(\gamma=0\right)$. Дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности бесконечно удлинённой пластинки может быть получено из (1.1) путём предельного перехода $b\to\infty$. Тогда, вводя величину $\xi=xa^{-1}$, уравнения исходной задачи (1.1) – (1.3) перепишутся в виде:

$$D\frac{\partial^4 w_1}{\partial\xi^4}+\left(N_x a^2\right)\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}+\left(a_0\rho_0 a^3 V\right)\frac{\partial w_1}{\partial\xi}=0,\ w_1=w_1\left(\xi,\ t\right); \qquad (3.12)$$

$$D\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}=\left(I_c a\right)\frac{\partial^3 w_1}{\partial\xi\cdot\partial t^2};\ D\frac{\partial^3 w_1}{\partial\xi^3}+\left(N_x a^2\right)\frac{\partial w_1}{\partial\xi}=-\left(m_c a^3\right)\frac{\partial w_1}{\partial t^2},\ \xi=0; \qquad (3.13)$$

$$w_1=0,\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}=0,\ \xi=1; \qquad (3.14)$$

откуда очевидно, что в случае бесконечно удлинённой пластинки $\left(\gamma=0\right)$, нагруженной в двух направлениях силами $N_x\neq 0$ и $N_y\neq 0$, на устойчивость невозмущённого состояния равновесия системы оказывают влияние только лишь силы $N_x\neq 0$, направленные по потоку газа, в отличие от сил $N_y\neq 0$, направленных перпендикулярно потоку.
Задача устойчивости (3.12) – (3.14) подробно исследована в [14]. И потому, исходную задачу устойчивости будем исследовать для $\gamma\in\left(0,0.193\right]$.
Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.3) при ограничениях (1.4) и (1.5) сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.11), определяющего собственные движения системы “пластинка–поток” в пространстве её «существенных» параметров $\Im=\left\{q(V),n,\gamma,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2,k_n\right\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическую систему «пластинка–поток». Значения остальных параметров системы принимаются фиксированными.

4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Как и в работах [12, 14], введём в рассмотрение в пространстве параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\Im_0\left(k_n A_1+A_2>0,A_3>0,\Delta>0\right)$ и области неустойчивости: $\Im_1\left(A_3<0,\Delta>0\right)$, $\Im_2\left(k_n A_1+A_2<0,A_3>0,\Delta>0\right)$ и $\Im_3\left(A_3>0,\Delta<0\right)$;
Δ – дискриминант биквадратного уравнения (3.11):

$$\Delta=\Delta(n,\gamma,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2,k_n)=(k_n A_1+A_2)^2-4k_n A_0 A_3. \qquad (4.1)$$

В области устойчивости $\Im_0$ уравнение (3.11) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2}=\pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4}=\pm i\omega_2$: прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого состояния равновесия; в области $\Im_1$ – имеет два действительных корня $\lambda_1<0$, $\lambda_2>0$ и два чисто мнимых корней $\lambda_{3,4}=\pm i\omega$, что характеризует эйлерову дивергенцию панели; в области $\Im_2$ – имеет два отрицательных ($\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$) и два положительных ($\lambda_3>0$, $\lambda_4>0$) корня, характеризующее более ярко выраженную дивергенцию панели – не эйлерову дивергенцию; а в области $\Im_3$, по крайней мере, два корня уравнения (3.11) являются комплексно сопряжёнными числами с положительной вещественной частью: имеет место панельный флаттер: пластинка совершает флаттерные колебания – колебания по нарастающей амплитуде [14, 16].

Границами области устойчивости $\Im_0$ системы в пространстве её параметров $\Im$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ являются гиперповерхности $A_3 = 0$ и $\Delta = 0$ – определяющие условия апериодической и колебательной неустойчивости соответственно [10, 11]: характеристическое уравнение (3.11) на гиперповерхности $A_3 = 0$ имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2, а на гиперповерхности $\Delta = 0$ – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Переходы ($\Im_0 \to \Im_3$) и ($\Im_2 \to \Im_3$) определяют «опасные границы» областей $\Im_0$ и $\Im_2$ [11].

На границе $A_3 = 0$ области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ система «пластинка-поток» при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели. Критические скорости $\{V_{cr.div}\}$, определяемые подстановкой первого и третьего корней уравнения $A_3 = 0$ в формулу (2.12), разграничивают области $\Im_0$ и $\Im_1$. При скоростях $V \geq V_{cr.div.}$ потока газа происходит «мягкий» переход через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к эйлеровой дивергенции панели. Это приводит к возникновению дополнительных напряжений, приводящих к изменению плоской формы равновесия: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Критические скорости неэйлеровой дивергенции $\{V_{1,2}\}$ разграничивают области $\Im_1$ и $\Im_2$. При скоростях потока газа $V \geq V_{1,2}$ происходит «мягкий» переход из области $\Im_1$ в область $\Im_2$. Критические скорости $V_{1,2}$ определяются подстановкой второго корня уравнения $A_3 = 0$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$ и $\Delta > 0$ в формулу (2.12).

На границе $\Delta = 0$ области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, а так же, на границе $\Delta = 0$ области $\Im_2$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, система при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl}$ теряет, соответственно, устойчивость в виде колебательной неустойчивости, либо переходит из состояния неэйлеровой дивергенции в состояние колебательной неустойчивости: имеет место панельный флаттер. Критические скорости панельного флаттера $\{V_{cr.fl.}\}$, определяемые подстановкой первого корня уравнения $\Delta = 0$ в формулу (2.12), разграничивают области $\Im_0$ и $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, либо области $\Im_2$ и $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, в зависимости от значений параметров системы $n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n$. В обоих случаях при $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к флаттерным колебаниям. Однако, следует отметить, что в первом случае начинает совершать флаттерные колебания относительно равновесного состояния плоская по форме пластинка, а во втором случае – изогнутая по форме пластинка – «выпученная». Переходы ($\Im_0 \to \Im_3$) и ($\Im_2 \to \Im_3$) определяют «опасные границы» областей $\Im_0$ и $\Im_2$ [11].

Следует отметить, что критические скорости $V_{cr.div.}$, $V_{1,2}$ и $V_{cr.fl.}$ определяются с достаточной точностью подстановкой в формулу (2.12) искомых значений параметра $q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$.

5. **Численные результаты**. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n,\gamma,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2,k_n)\} \in \Im$ для $\gamma \in \left(0,\ 0.193\right]$, параметризованных надлежащим образом.

Аналогично, как и в [14], для наглядной иллюстрации динамики невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка – поток» в пространстве параметров $\Im$ составлены цепочки переходов из области $\Im_l \subset \Im$ в область $\Im_k \subset \Im$ сопоставлением найдённых значений критических скоростей с данными таблицы 2. Здесь, так же, как и в [14}, формы представления цепочек переходов существенно зависят от относительной толщины $2ha^{-1}$ и материала пластинок. В частности, цепочки переходов исходной системы в случае стальных пластинок относительной толщины $\left(2ha^{-1}\right) \in \left[0.006, 0.015\right]$ для $\gamma \in \left(0,\ 0.193\right]$ и $\gamma = 0$ одни и те же [14]:

$$\Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.fl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}} \Im_1\ ,\ k_1 \in \left(0, 0.1\right); \tag{5.1}$$

$$\Im_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \Im_2 \xrightarrow{V_{cr.fl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}} \Im_1\ ,\ k_1 \geq 0.1\,. \tag{5.2}$$

Однако, несмотря на сходство качественных характеристик динамики невозмущённого состояния равновесия системы для всех $\gamma \in \left[0,\ 0.193\right]$, её количественные характеристики различны – существенно зависят от значений γ.

Представления (5.1) и (5.2) наглядно отражают две особенности в динамике невозмущённому состоянию равновесия системы «пластинка–поток».

1) Невозмущённое состояние равновесия системы неустойчиво вблизи $a_0\sqrt{2}$: имеет место эйлерова дивергенция при всех $\beta_x^2 < \left(\beta_x^2\right)_{cr.}, \beta_y^2 < \left(\beta_y^2\right)_{pr.}$.

2) При малых значениях $k_1 \in \left(0, 0.1\right)$ имеет место переход $\Im_0 \xrightarrow{V_0} \Im_3$, а при $k_1 \geq 0.1$ – переход $\Im_2 \xrightarrow{V_{1,2}} \Im_3$. При этом,

$$V_0\left(\gamma,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2\right)=V_{1,2}\left(\gamma,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2\right) \text{ для всех } \nu,\ \beta_x^2\le\left(\beta_x^2\right)_{cr.},\ \beta_y^2\le\left(\beta_y^2\right)_{pr.}. \quad (5.3)$$

Иными словами, при скоростях потока $V \ge V_{cr.fl.}$, когда $k_1 \in (0, 0.1)$ начинает совершать флаттерные колебания плоская пластинка, а когда $k_1 \ge 0.1$ – «выпученная» (изогнутая) пластинка.

Результаты численных расчётов показали, что критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера для $\gamma \in (0,\ 0.193]$ являются возрастающими функциями от числа полуволн n: их наименьшему значению соответствует $n = 1$.

В таблицах 3 – 8 представлены численные результаты решения исходной задачи устойчивости системы «пластинка–поток» для $\gamma = 0.1$ при $n = 1$, $\nu = 0.3$.

Значения $V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ Таблица 3.

β_y^2 \ β_x^2	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	77,318	77.196	77.072	76.948	76.826	76.703
3	77.317	77.195	77.071	76.947	76.825	76.702
5	77.316	77.194	77.070	76.946	76.824	76.701

Приведённые значения критических скоростей V_0 и $V_{1,2}$ являются медленно убывающими функциями от β_x^2, β_y^2 и возрастающими функциями от коэффициента Пуассона ν: с ростом ν возрастают примерно на 0.6% (табл. 3).

Таблица 4.

β_x^2	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0.5
$V_{crdiv} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	484.045	483.880	483.689	483.497	483.305	483.113

Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $k_1 = 0.1$. Таблица 5.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	92.714	92.620	92.525	92.430	92.334	92.239
1	92.707	92.612	92.517	92.422	92.327	92.232
3	92.692	92.597	92.502	92.407	92.312	92.217
5	92.677	92.582	92.487	92.393	92.296	92.201

Критическая скорость $V_{crdiv} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ исчезающе мало зависит от β_y^2; является медленно убывающей функцией как от β_x^2: убывает примерно на 2.4%; а также от ν: с ростом ν убывает примерно на 0.7%.

Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ при $k_1 = 1$. Таблица 6.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	134.139	134.030	133.920	133.811	133.702	133.592
1	134.130	134.021	133.912	133.803	133.693	133.584
3	134.112	134.003	133.893	133.784	133.675	133.567
5	134.103	133.994	133.884	133.774	133.665	133.556

Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ при $k_1 = 5$. Таблица 7.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	148.994	148.872	148.754	148.637	148.520	148.399
1	148.983	148.863	148.745	148.628	148.508	148.390
3	148.960	148.846	148.729	148.611	148.488	148.374
5	148.949	148.837	148.721	148.603	148.480	148.366

Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ при $k_1 = 10$. Таблица 8.

β_y^2 \ β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	152.726	152.611	152.495	152.379	152.263	152.132
1	152.725	152.607	152.491	152.375	152.260	152.128
3	152.715	152.600	152.484	152.368	152.252	152.121
5	152.708	152.592	152.477	152.361	152.245	152.114

Из данных таблиц 5 – 8 следует, что критические скорости флаттера являются медленно убывающей функцией от коэффициентов напряжений β_x^2 и β_y^2; возрастающей функцией от $k_1 \in [0.1, 10]$ – возрастают, примерно, в 1.65 раз. Можно показать, что $V_{cr.fl.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ являются медленно возрастающей функцией от коэффициента Пуассона ν: с ростом ν возрастает на 0.35%.

Итак, первоначальное напряжённое состояние достаточно удлинённой пластинки, нагруженной по двум направлениям: сжимающими силами N_x по потоку газа и растягивающими – N_y в перпендикулярном направлении к потоку, в целом, приводит к понижению устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы “пластинка–поток”. Можно утверждать, что в данной постановке влияние растягивающих сил N_y на устойчивость невозмущённого состояния равновесия системы незначимо.

6. Основные результаты и заключение. В работе получено аналитическое решение задачи динамической устойчивости невозмущённого состояния равновесия упругой достаточно удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота, в предположении, что пластинка первоначально нагружена по двум направлениям: сжимающими силами, направленными по потоку газа и силами растяжения, направленными перпендикулярно к потоку.

Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка–поток» на область устойчивости и на области неустойчивости – области эйлеровой и не эйлеровой дивергенции панели и панельного флаттера.

Получена формула зависимости скорости потока газа от «существенных» параметров системы «пластинка–поток», позволяющая найти критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера.

Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Найдены «безопасные» и «опасные» границы области устойчивости.

Установлено, что при меньших значениях интенсивности приложенных инерционных моментов поворота потеря устойчивости наступает при меньшей скорости потока, но это не эйлерова потеря устойчивости, а переход системы от покоя к движению – к автоколебаниям.

Показано, что, в целом, имеет место понижение устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы: влияние сил растяжения на устойчивость системы в данной постановке незначимо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел.– М: Наука. 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968.
6. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
7. Ashley G.H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician//J. Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N 12. P. 1109–1118.
8. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
9. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
10. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.–Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
11. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.

12. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
13. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, сжатой по направлению потока газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 4, с.44–68.
14. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлинённой прямоугольной пластинки со свободным краем, сжатой по потоку газа // Изв. НАН Армении, Механика. 2023. Т.76 (2), с. 44–58. DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.2- 44.
15. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковая дивергенция панели с одним свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в направлении, перпендикулярном скорости потока газа // Труды VIII международной научной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”; 1-5 октября, Цахкадзор–2023 (Армения), с. 176–180.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 23.02.2024