

**КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ
СИСТЕМОЙ ТРЕЩИНА-ВКЛЮЧЕНИЕ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ ПОД
ВКЛЮЧЕНИЕМ**

Акопян Л.В., Даштоян Л.Л.

Ключевые слова: контактная задача, трение, штамп, трещина

Накобян Л.В., Даштоян Л.Л.

**Contact problem for a plane with a periodic system of crack-inclusions with
account of friction forces under the inclusion**

Key words: contact problem, friction, punch

The article considers the plane stress state of a homogeneous elastic space, weakened by a periodic system of finite tunnel cracks. It is assumed there are also resting shear stresses under the punches, apart from the normal stresses. The shear stresses are directly proportional to the normal contact pressure with a proportionality coefficient that depends on the coordinates of the points of the contacting surfaces. Based on discontinuous solutions for the equations of the theory of elasticity for a plane with a periodic system of cracks, a governing system of equations for the problem is obtained in the form of a system of singular integral equations. The solution of system is constructed by the numerical-analytical method of mechanical quadratures. Numerical calculations were carried out and patterns of changes in important physical and mechanical characteristics were studied depending on the physical, mechanical and geometric parameters of the problem.

Հակոբյան Լ. Վ., Դաշտոյան Լ. Լ.

**Կոնտակտային խնդիր ճաք-ներդրակների պարբերական համակարգ պարունակող հարթության
համար ներդրակների տակ շփման ուժերի հաշվառմամբ**

Հիմնաբառեր: կոնտակտային խնդիր, շփում, դրոշմ, ճաք

Դիտարկվել է համասեռ վերջավոր թունելային ճաքերի համակարգով թուլացված առաձգական տարածության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը, երբ նրանց ավերից մեկին սեղմվում են հարթ հիմքով կոշտ դրոշմներ: Ենթադրվում է, որ դրոշմների տակ, բացի նորմալ լարումներից առաջանում են նաև հանգստի շոշափող լարումներ, որոնք կոնտակտի մեջ գտնվող մակերևույթների հպվող կետերի կոորդինատներից կախված գործակցով ուղիղ համեմատական են նորմալ կոնտակտային ճնշմանը: Ճաքերի պարբերական համակարգ պարունակող հարթության համար առաձգականության տեսության խզվող լուծումների հիման վրա ստացվել է խնդրի որոշիչ հավասարումների համակարգ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի տեսքով, որի լուծումը կառուցվել է մեխանիկական քառակուսացման թվային-վերլուծական մեթոդով: Կատարվել են թվային հաշվարկներ և ուսումնասիրվել են կարևոր ֆիզիկամեխանիկական բնութագրիչների փոփոխման օրինաչափությունները՝ կախված խնդրի ֆիզիկամեխանիկական և երկրաչափական պարամետրերից:

Рассмотрено плоско-деформированное состояние однородного упругого пространства, ослабленного периодической системой конечных тоннельных трещин, на один из берегов которых вдавливаются абсолютно жёсткие штампы с плоским основанием. Полагается, что под штампами, кроме нормальных напряжений, возникают также касательные напряжения покоя, которые прямо пропорциональны нормальному контактному давлению с коэффициентом пропорциональности, зависящим от координат соприкасающихся точек контактирующих поверхностей. На основе разрывных решений уравнений теории упругости для плоскости с периодической системой трещин получена определяющая система уравнений задачи в виде системы сингулярных интегральных уравнений, решение которой построено численно-

аналитическим методом механических квадратур. Проведены численные расчеты и изучены закономерности изменения важных физико-механических характеристик в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задачи.

1. Введение Известно, что присутствие в деформируемых массивных телах концентраторов напряжений типа трещин, штампов, абсолютно жёстких или деформируемых накладок и включений, а также угловых точек и щелей существенно влияют на их прочность и долговечность и могут привести к локальному или глобальному разрушению этих тел. Поэтому изучение закономерностей изменения локальных полей напряжений вокруг этих концентраторов и взаимовлияния различных концентраторов, одновременно находящихся в деформируемых массивных телах, а также разработка мер предотвращения их отрицательного воздействия на прочность и долговечность тел является одним из основных направлений развития контактных и смешанных задач теории упругости и механики разрушения.

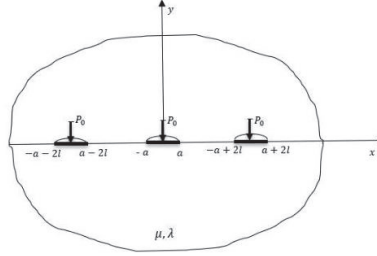
Укажем монографии [1-6], где приведены многие основополагающие результаты в этом направлении и построены решения ряда эталонных задач в этой области. Первая задача о взаимовлиянии трещин и жёстких штампов принадлежит Шерману Д.И., которая описана в [4], где построено точное решение контактной задачи для упругой плоскости с трещинами, один из берегов которых спаян с тонким жёстким включением. Замкнутое решение аналогичной осесимметричной контактной задачи для пространства с дискообразной трещиной было построено Г.Я. Поповым в [7]. В работах [8,9] получены разрывные решения плоской и осесимметричной задач теории упругости для составных плоскостей и пространств с межфазными трещинами, на основе которых получены точные решения ряда задач для однородных и составных плоскостей и пространств с жёсткими межфазными включениями при различных условиях сопряжения включений с матрицей. Приведём также работы [10-15], где получены точные решения ряда осесимметричных и плоских смешанных и контактных задач для однородных и составных плоскостей и пространств с трещинами. Особо отметим работу [16], где предложена новая модель контакта с учётом трения покоя и в рамках предложенной модели построено замкнутое решение контактной задачи для однородной упругой полуплоскости.

Здесь же, в рамках модели контакта с учётом трения покоя, предложенной в [16], изучено плоско-деформированное состояние однородного пространства с периодической системой трещин, в один из берегов которых вдавливаются жёсткий штамп.

2. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений. Пусть однородное упругое пространство с коэффициентами Ламэ μ и λ , находящееся в условиях плоской деформации, в базовой плоскости, отнесённой к декартовой системе координат Oxy , на оси абсцисс содержит периодическую систему, с периодом $2l$, конечных трещин длины $2a < 2l$, заполняющую систему интервалов

$$L = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (-a + 2kl, a + 2kl)$$

и деформируется под воздействием абсолютно жёстких одинаковых штампов, вдавливаемых в нижние берега трещин при помощи нормальных сосредоточенных сил P_0 (Фиг.1).



Фиг.1

Будем считать, что под штампами возникают также касательные контактные напряжения покоя, которые связаны с нормальным контактным давлением законом Кулона, коэффициент трения которого прямо пропорционален координатам точек контактирующих поверхностей [16].

Требуется выявить закономерности изменения контактных напряжений, возникающих под штампами, раскрытия трещин и коэффициента интенсивности в концевых точках трещины в зависимости от физико-механических и геометрических параметров поставленной задачи.

Мысленно разделим плоскость по оси абсцисс на две полуплоскости и снабдим все характерные величины верхней и нижней полуплоскостей соответственно индексами 1 и 2. Тогда условия на берегах трещин будут следующими:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0) = 0; & \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0; \\ v_2(x, 0) = \delta; & \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = -\frac{fx}{a} \sigma_y^{(2)}(x, 0), \end{cases} \quad (1)$$

где $\sigma_y^{(j)}(x, y)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$ ($j = 1, 2$)- компоненты тензора напряжений, действующих в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, $u_j(x, y)$ и $v_j(x, y)$ ($j = 1, 2$) - горизонтальные и нормальные составляющие вектора смещений в соответствующих полуплоскостях, f - максимальное значение коэффициента трения, а δ - жёсткое смещение штампа по направлению оси Oy .

Чтобы удовлетворить условиям (1) используем разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости с периодическими межфазными трещинами, приведённые в [6]. При помощи этих решений напряжения, действующие на берегах трещин и производные от смещений точек берегов трещины определяются через скачки нормальных и касательных напряжений на берегах трещин $\sigma(x)$, $\tau(x)$ и производные от нормальных и горизонтальных составляющих смещений точек берегов трещин $u'(x)$, $v'(x)$. В случае однородной плоскости напряжения и производная от нормальной составляющей смещений записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \frac{1}{2}\sigma(x) + \frac{\alpha}{4l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{2l} \tau(s) ds + \frac{\beta}{4l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{2l} v'(s) ds; \\
\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= \frac{1}{2}\tau(x) - \frac{\alpha}{4l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{2l} \sigma(s) ds + \frac{\beta}{4l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{2l} u'(s) ds; \\
v_2^{(1)}(x, 0) &= -\frac{1}{2}v'(x) - \frac{1}{8l\vartheta_2} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{2l} \sigma(s) ds - \frac{\alpha}{4l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{2l} u'(s) ds, \\
& \quad (-l < x < l)
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma_y^{(2)}(x, 0) = -\sigma_y^{(2)}(x, 0), \\
\tau(x) &= \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = -\tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = f \frac{x}{a} \sigma_y^{(2)}(x, 0) = -f \frac{x}{a} \sigma(x), \\
u_2(x, 0) - u_1(x, 0) &= u(x), \quad v_2(x, 0) - v_1(x, 0) = v(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} < \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{2(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\vartheta_2}, \\
\vartheta_1 &= \frac{\mu^2}{\lambda + 3\mu}, \quad \vartheta_2 = \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},
\end{aligned}$$

E – модуль упругости, а ν – коэффициент Пуассона.

Используя представления (2), удовлетворим условиям (1). В итоге, для определения функций $\sigma(x)$, $\tau(x)$, $u'(x)$ и $v'(x)$ придём к следующей системе определяющих сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sigma(x) + \frac{\alpha}{4l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{2l} \tau(s) ds + \frac{\beta}{4l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{2l} v'(s) ds &= 0; \\
\frac{1}{2}\tau(x) - \frac{\alpha}{4l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{2l} \sigma(s) ds + \frac{\beta}{4l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{2l} u'(s) ds &= 0;
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}v'(x) + \frac{1}{8l\vartheta_2} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{2l} \sigma(s) ds + \frac{\alpha}{4l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{2l} u'(s) ds = 0;$$

$$\tau(x) = -f \frac{x}{a} \sigma(x) \quad (-a < x < a),$$

которую нужно рассматривать при условиях равновесия штампов и непрерывности смещений в концевых точках трещин, которые в интегральной форме, выглядят следующим образом:

$$\int_{-a}^a \sigma(x) dx = P_0; \quad \int_{-a}^a \tau(x) dx = 0; \quad \int_{-a}^a v'(x) dx = 0; \quad \int_{-a}^a u'(x) dx = 0 \quad (4)$$

Удалив из второго и третьего уравнений (3) $u'(x)$ и подставляя значение функции $\tau(x)$ через $\sigma(x)$ из последнего соотношения (3), придём к следующей системе определяющих сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта:

$$\begin{cases} \sigma(x) - \frac{c}{2la} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} s \sigma(s) ds + \frac{\beta}{2l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} v'(s) ds = 0; \\ \frac{c}{a} x \sigma(x) + \beta v'(x) + \frac{1}{2l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} \sigma(s) ds = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$(c = f\alpha),$$

которую нужно рассматривать при первом и третьем условиях (4). После решения системы (5) скачок горизонтальных смещений можно получить, решив уравнение

$$\frac{1}{2l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} u'(s) ds = f \frac{x}{2\vartheta_2 a} \sigma(x) - \alpha v'(x) \quad (6)$$

при последнем из условий (4). Уравнение (6) можно получить удалив из второго и третьего уравнений (3) интегральный член, содержащий контактное давление $\sigma(x)$.

3. Решение системы определяющих уравнений.

Решение системы определяющих уравнений (5) будем строить численно-аналитическим методом механических квадратур [17]. Для этого сначала, используя первое из соотношений (4), перепишем её в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(x) - \frac{cx}{\pi a} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s) ds}{s-x} + \frac{\beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{v'(s) ds}{s-x} - \frac{c}{a} \int_{-a}^a K(s-x) s \sigma(s) ds + \\ + \beta \int_{-a}^a K(s-x) v'(s) ds = A \\ \frac{c}{a} x \sigma(x) + \beta v'(x) + \int_{-a}^a K(s-x) \sigma(s) ds = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

где введены обозначения:

$$K(x) = \frac{1}{2l} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2l} - \frac{2l}{\pi x} \right]; \quad A = \frac{cP_0}{\pi a},$$

а затем, при помощи замены переменных $x = ta$ и $s = \tau a$, сформулируем систему (5) на интервале $(-1, 1)$ и введя обозначения

$$\sigma_*(x) = a\sigma(ax)/P_0; \quad v'_*(x) = v'(ax); \quad a\beta/P_0 = \beta_*, \quad l_* = l/a;$$

$$K_*(t) = aK(at) = \frac{1}{2l_*} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi t}{2l_*} - \frac{2l_*}{\pi t} \right],$$

запишем в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_*(t) - \frac{ct}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma_*(\tau) d\tau}{\tau-t} + \frac{\beta_*}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v'_*(\tau) d\tau}{\tau-t} - c \int_{-1}^1 K_*(\tau-t) \tau \sigma_*(\tau) d\tau + \\ + \beta_* \int_{-1}^1 K_*(\tau-t) v'_*(\tau) d\tau = \frac{c}{\pi}; \\ ct\sigma_*(t) + \beta_* v'_*(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma_*(\tau) d\tau}{\tau-t} + \int_{-1}^1 K_*(\tau-t) \sigma_*(\tau) d\tau = 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

При этом, первое и третье условия (4) примут вид:

$$\int_{-1}^1 \sigma_*(t) dt = 1; \quad \int_{-1}^1 v'_*(t) dt = 0 \quad (9)$$

Теперь, введём в рассмотрение новые искомые функции $\varphi_j(t)$ ($j=1, 2$) по формулам:

$$\sigma_*(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \quad v'_*(x) = \frac{\sqrt{1+c^2}}{\beta_*} [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] \quad (10)$$

Подставляя выражения функций $\sigma_*(t)$ и $v'_*(t)$ через новые искомые функции $\varphi_j(t)$ ($j=1,2$) из (10) в систему (8), после некоторых преобразований, для определения функций $\varphi_j(t)$ ($j=1,2$), получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{2\sqrt{1+c^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(\tau) d\tau}{\tau-t} + \left[(ct + \sqrt{1+c^2})^2 + 1 \right] \varphi_1(t) + c^2(t^2-1)\varphi_2(t) + \\ & + \int_{-1}^1 K_{11}(\tau-t)\varphi_1(\tau) d\tau + \int_{-1}^1 K_{12}(\tau-t)\varphi_2(\tau) d\tau = \frac{c}{\pi} \\ & - \frac{2\sqrt{1+c^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(\tau) d\tau}{\tau-t} + \left[(ct - \sqrt{1+c^2})^2 + 1 \right] \varphi_2(t) + c^2(t^2-1)\varphi_1(t) + \\ & + \int_{-1}^1 K_{21}(\tau-t)\varphi_1(\tau) d\tau + \int_{-1}^1 K_{22}(\tau-t)\varphi_2(\tau) d\tau = \frac{c}{\pi} \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11}(t) &= - \left[ct - 2\sqrt{1+c^2} \right] K_*(t); \quad K_{12}(t) = K_{21}(t) = -ctK_*(t); \\ K_{22}(t) &= - \left[ct + 2\sqrt{1+c^2} \right] K_*(t). \end{aligned}$$

При этом условия (9) через функции $\varphi_j(x)$ ($j=1,2$) запишутся в следующем виде:

$$\int_{-1}^1 \varphi_j(t) dt = 0.5 \quad (j=1,2) \quad (12)$$

Отметим, что во втором уравнении системы (8) заменив t на $-t$, обозначив $\varphi_2(t) = \varphi_1(-t)$ и $\varphi_2(-t) = \varphi_1(t)$, придём к первому уравнению системы (8) и аналогичным образом из первого уравнения придём ко второму уравнению. Нетрудно установить также, что в первом уравнении доминирующим, в смысле особенности, является функция $\varphi_1(t)$, так как коэффициент при функции $\varphi_2(t)$ равен нулю при $t = \pm 1$, во втором же уравнении – $\varphi_2(t)$. Исходя из этого, по

методу, предложенному Мухелишвили [18], несложно определить порядок особенности искомых функций в концевых точках интервала $t = \pm 1$. Так как характеристические части уравнений, входящие в систему (8) совпадают с уравнениями в определяющей системе аналогичной задачи в случае одной трещины [16], то искомые функции в концевых точках интервала $t = \pm 1$ будут иметь те же особенности, что и в случае одной трещины. Следовательно, их можно представить в следующем виде:

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_1^*(t)}{(1+t)^\gamma (1-t)^{1-\gamma}}, \quad \varphi_2(t) = \frac{\varphi_2^*(t)}{(1+t)^{1-\gamma} (1-t)^\gamma}, \quad (13)$$

где

$$\gamma = 0.5 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{1+c^2} - c \right] = 0.75 - \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg}(c) > 0.5$$

а функции $\varphi_1^*(t)$ и $\varphi_2^*(t)$ - гладкие функции, ограниченные вплоть до концов интервала $[-1, 1]$. Подставляя значения функции $\varphi_j(t)$ ($j=1, 2$) из (13) в систему (11) и в условия (12), по обычной процедуре [17], для определения функций $\varphi_j^*(t)$ ($j=1, 2$) в узлах $\xi_{j,i}$ ($i=1, 2, \dots, n$), придём к системе алгебраических уравнений. После решения этой системы, по формулам

$$\varphi_j^*(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_j^*(\xi_{j,i}) P_n^{(\gamma_j, \gamma_j)}(x)}{(t - \xi_{j,i}) P_n^{(\gamma_j, \gamma_j)}(\xi_{j,i})} \quad (j=1, 2),$$

где $\xi_{j,i}$ ($i=1, 2, \dots, n$) - корни полинома Якоби $P_n^{(\gamma_j, \gamma_j)}(x)$, и (13) можно восстановить функции $\varphi_j(t)$ ($j=1, 2$) и определить контактные напряжения, раскрытие трещин и коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины. Напишем формулу для определения коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений. С этой целью будем использовать первые два соотношения (2). Учитывая, что вне трещины функции разрывов равны нулю, записывая эти уравнения на интервале $(-1, 1)$ и вводя функции $\varphi_j(t)$ ($j=1, 2$), получим:

$$\begin{aligned} \frac{a\sigma_y^{(j)}(t, 0)}{P_0} &= -\frac{ct - \sqrt{1+c^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(\tau) d\tau}{\tau - t} - \frac{ct + \sqrt{1+c^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(\tau) d\tau}{\tau - t} + \Phi_1(t); \\ \frac{a\tau_{xy}^{(j)}(t, 0)}{P_0} &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(\tau) d\tau}{\tau - t} + \Phi_2(t) \quad (1 < t < l_*) \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\Phi_j(t)$ ($j=1,2$) ограниченные, на интервале интегрирования, функции.

Подставляя в (14) значение функции из (13) и используя значение интеграла [19]

$$\int_{-a}^a \frac{(s+a)^{-\gamma} (a-s)^{\gamma-1}}{s-x} ds = \frac{\pi}{(a-x) \sin \pi(1-\gamma)} \left| \frac{a+x}{a-x} \right|^{-\gamma} \quad (|x| > a)$$

при ($1 < t < l_*$) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{a\sigma_y^{(j)}(t,0)}{P_0} = & - \frac{(ct - \sqrt{1+c^2}) \Phi_1^*(\pm 1)}{(1-t) \sin \pi\gamma} \left| \frac{1+t}{1-t} \right|^{-\gamma} - \\ & - \frac{(ct + \sqrt{1+c^2}) \Phi_2^*(\pm 1)}{(1-t) \sin \pi\gamma} \left| \frac{1+t}{1-t} \right|^{\gamma-1} + \Phi_1^*(t); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{a\tau_{xy}^{(j)}(t,0)}{P_0} = & \frac{\Phi_1^*(\pm 1)}{(1-t) \sin \pi\gamma} \left| \frac{1+t}{1-t} \right|^{-\gamma} + \\ & + \frac{\Phi_2^*(\pm 1)}{(1-t) \sin \pi\gamma} \left| \frac{1+t}{1-t} \right|^{\gamma-1} + \Phi_2^*(t) \quad (1 < t < l_*) \end{aligned} \quad (16)$$

где $\Phi_j^*(t)$ ($j=1,2$) ограниченные функции в точках $t = \pm 1$. Так как $\gamma > 0.5$, то доминирующим в точке $t = 1$, в смысле порядка особенности, в обоих из выражений (11) будут вторые слагаемые, а в точке $t = -1$ - первые слагаемые. Следовательно, коэффициент интенсивности разрушающих напряжений в точках $t = \pm 1$ можно определить по формулам:

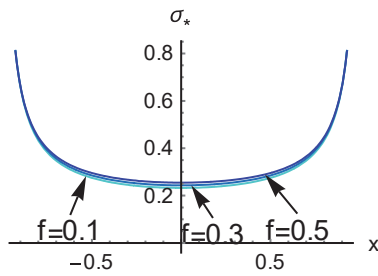
$$K_I(\pm 1) = \lim_{t \rightarrow \pm 1 \pm 0} |t \mp 1|^\gamma \frac{a\sigma_y^{(j)}(t,0)}{P_0} = \frac{(c + \sqrt{1+c^2}) \Phi_2^*(1)}{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma};$$

$$K_{II}(\pm 1) = \lim_{t \rightarrow \pm 1 \pm 0} |t \mp 1|^\gamma \frac{a\tau_{xy}^{(j)}(t,0)}{P_0} = - \frac{\Phi_1^*(-1)}{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma}.$$

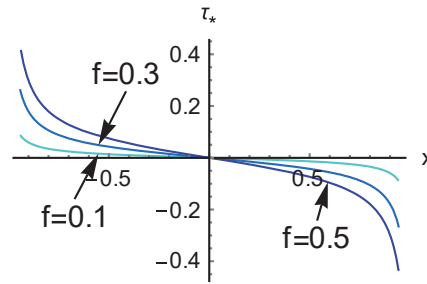
4. Численные расчеты.

Произведены численные расчеты и выявлены закономерности изменения безразмерного контактного давления $\sigma_*(t)$, касательных напряжений $\tau_*(t) = -ft\sigma_*(t)$, раскрытие трещин $v_*(t) = v(at)/a$ и коэффициентов интенсивности в зависимости от максимального значения коэффициента трения f и параметра l_* , в случае когда $\nu = 0.3$ и $aE/P_0 = 1$. Результаты численных расчётов приведены в виде

графиков Фиг.2-5 и таблиц 1-2. На Фиг. 2-4 приведены графики приведённых контактных напряжений и раскрытия трещины в зависимости от коэффициента трения f в случае, когда $l_* = 2$.

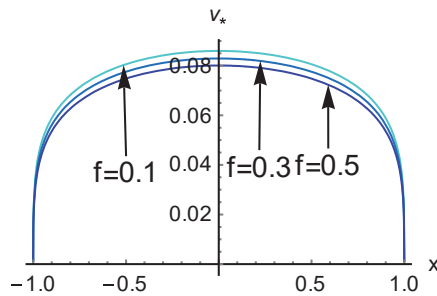


Фиг.2

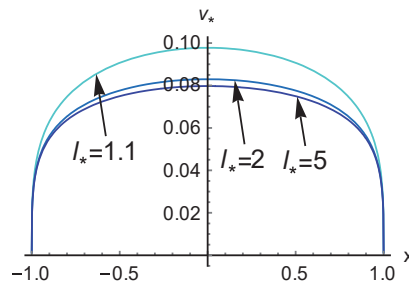


Фиг.3

Из них видно, что при увеличении коэффициента трения, как и в случае одной трещины, нормальное контактное давление почти не изменяется, касательные напряжения увеличиваются, а раскрытия трещин уменьшаются.



Фиг.4



Фиг.5

На Фиг.5 приведены графики раскрытия трещин при разных значениях параметра l_* в случае, когда $f = 0.3$. Из них видно, что при увеличении параметра l_* , как и следовало ожидать, раскрытие трещины уменьшается. При этом, вычисления показывают, что увеличение параметра l_* существенно не влияет на распределение контактных напряжений. В таблице 1 приведены значения безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины в зависимости от параметра l_* , когда $f = 0.3$. Из них явствует, что при увеличении параметра l_* коэффициенты напряжений, по абсолютной величине, уменьшаются. В таблице 2 приведены значения безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины в зависимости от f , когда $l_* = 2$.

Таблица 1. Коэффициенты интенсивности при $f = 0.3$

l_*	1.2	1.5	2	5	10
$K_I(\pm 1)$	0.1457	0.1424	0.1408	0.1395	0.1393
$K_{II}(\pm 1)$	-0.1336	-0.1307	-0.1292	-0.128	-0.1279

Таблица 2. Коэффициенты интенсивности при $l_* = 2$

f	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$K_I(\pm 1)$	0.1370	0.1389	0.1408	0.1426	0.1445
$K_{II}(\pm 1)$	-0.1331	-0.1312	-0.1292	-0.1273	-0.1253

Данные Табл.2 показывают, что при увеличении параметра f коэффициент напряжений $K_I(\pm 1)$ по абсолютной величине возрастает, а коэффициент $K_{II}(\pm 1)$ - убывает.

5. Заключение

Изучено плоско-деформированное состояние однородного упругого пространства с периодической системой трещин, в один из берегов которых вдавливается абсолютно жёсткий штамп с плоским основанием. С учётом трения покоя решение задачи сведено к решению системы из двух сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта с переменными коэффициентами, решение которой построено численно-аналитическим методом механических квадратур. Проведён численный анализ и изучены закономерности изменения как контактных напряжений и раскрытия трещин, так и коэффициентов разрушающих напряжений в концевых точках трещин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости, М. Наука, 1980г.,304с.,
2. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. - М.-Л.: Гостехтеориздат, 1947 - 270с.
3. Панасюк В.В. Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.- Киев: Наукова думка, 1976.- 443с.
4. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.708с.
5. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Сташук Н.Г. Взаимодействие жёстких линейных включений и трещин в деформируемом теле.-Киев: Наукова думка, 1983.-288с.
6. Nakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies, Advanced Structured Materials, Volume 181, Springer 2022, 397p.
7. Попов Г.Я. О концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения.- В сб.: "Современные проблемы механики и авиации", посв. И.Ф. Образцову. 1980, с. 156-162

8. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. // Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, No4, с.57-65.
9. Акопян В.Н. , Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Осесимметричная смешанная задача для составного пространства с монетообразной трещиной // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. №3. С. 31-46.
10. Ильина И.И., Сильвестров В.В. Задача о тонком жёстком включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. // Изв. РАН. МГТ. 2005. №3. С.153-166.
11. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и её приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости.// ПММ, 1962, т. 26, вып.5, с. 907-912.
12. Mkhitaryan S.M. On the Stress-Strain State of an Elastic Infinite Plate with a Crack Expanding by Means of Smooth Thin Inclusion Indentation// Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 2019,72(4). Pp. 38-64. Doi-<http://doi.org/10.33018/72.4.4>
13. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Контактная задача для однородной плоскости с трещиной. // Известия НАН РА, Механика, т.73, № 4, 2020г, с. 3-12. Doi-<http://doi.org/10.33018/73.4.1>
14. Nakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Dashtoyan L.L., Sahakyan A.V. Indentation of an Absolutely Rigid Thin Inclusion into One of the Crack Faces in an Elastic Plane Under Slippage at the Ends// In Book: Altenbach H., Bauer S., Belyaev K., and other (eds), Advances in Solid and Fracture Mechanics, A Liber Amicorum to Celebrate the Birthday of Nikita Morozov 2022, p.187-197.
15. Даштоян, Л.Л., Акопян, Л.В. Напряжённое состояние кусочно-однородной плоскости с периодической системой межфазных деформируемых включений // Изв. НАН РА, Механика, 2023, т.76, No1, с.26-36. DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.1-26.
16. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Об одной модели трения применительно к контактными задачам теории упругости // Изв. НАН РА, Механика, 2023, т.76, No2, с.20-31. DOI:10.54503/0002-3051-2023.76.2-20
17. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
18. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968.- 511с.
19. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 738с.

Сведения об авторах.

Акопян Лусине Ваграмовна – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90

Даштоян Лилит Леоновна – к.ф.-м.н., ученый секретарь Института механики НАН РА, (37410) 52-48-90, e-mail: Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 11.03.2024