ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 76, №4, 2023 Механика
УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.4-20

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ШИРОКОЙ ПАНЕЛИ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ, СЖАТОЙ ПО СВЕРХЗВУКОВОМУ ПОТОКУ ГАЗА, ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИНЕРЦИОННЫХ МАСС И МОМЕНТОВ

Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: достаточно широкая прямоугольная пластинка, сжимающие силы, сверхзвуковое обтекание, аэроупругая устойчивость, сосредоточенные инерционные массы и моменты, локализованная дивергенция, аналитический метод решения

Martirosyan S.R.

On the stability of a sufficiently wide panel with a free edge compressed along the supersonic gas flow in the presence of pointed inertial masses and moments

Key words: sufficiently wide panel, compressive forces, supersonic flow, aeroelastic stability, pointed inertial masses and moments, localized divergence, analytical solution method

In the article, in a linear formulation, the influence of the initial stress state of a sufficiently wide rectangular elastic plate compressed along a supersonic gas flow on the stability of the "plate–flow" dynamic system is studied under the assumption that there are concentrated inertial masses and moments on the free edge of the plate. An analytical solution of the stability problem is found. The possibility of losing the stability of the system only in the form of a localized divergence is shown. It has been established that the initial longitudinal compressive forces lead to a significant decrease in the stability of the system.

Մարտիրոսյան Ս.Ռ.

Գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ սեղմված մեկ ազատ եզրով լայն սալի կայունության մի խնդրի մասին, կենտրոնացված իներցիոն զանգվածների և մոմենտների առկայության դեպքում

Հիմնաբառեր՝ լայն ուղղանկյուն սալ, սեղմող ուժեր, գերձայնային շրջհոսում, աերոառաձգական կայունություն, կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, տեղայնացված դիվերգենցիա, անալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է նախապես սեղմված գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ լայն ուղղանկյուն սալի լարվածային վիճակի ազդեցությունը ՞սալ – հոսք՞ գծային դինամիկ համակարգի կայունության վրա, սալի ազատ եզրին կենտրոնացված իներցիոն զանգվածների և մոմենտների առկայության ներքո: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: Ցույց է տրված, որ համակարգը կորցնում է միայն իր ստատիկ կայունությունը՝ տեղայնացված դիվերգենցիայի տեսքով: Գտնված են կրիտիկական արագությունները, վկայելով սեղմող ուժերի ապակայունացման ազդեցության մասին:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначального напряжённого состояния достаточно широкой прямоугольной упругой пластинки, сжатой по сверхзвуковому потоку газа, на устойчивость динамической системы «пластинка–поток» в предположении, что на свободном крае пластинки имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты. Найдено аналитическое решение

задачи устойчивости. Показана возможность потери устойчивости системы только лишь в виде локализованной дивергенции. Установлено, что первоначальные продольные сжимающие силы приводят к существенному понижению устойчивости системы.

Введение. Как известно [1 – 4], рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение. Теоретические исследования этих задач позволяют выявить различные виды потери устойчивости динамической системы «пластинка–поток», обусловленные характером деформаций: локализованная дивергенция, дивергенция панели (эйлерова и не эйлерова), панельный флаттер. А также, позволяют дать оценку влиянию комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им.

В предлагаемой статье исследуется влияние первоначального напряжённого состояния сжатой упругой достаточно широкой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями на устойчивость невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» в предположении, что сжимающие силы направлены по сверхзвуковому потоку газа, набегающим на свободный край пластинки, при наличии на нём сосредоточенных инерционных масс и моментов поворота. Найдено аналитическое решение задачи устойчивости. Получена формула, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего потока газа.

Исследована граница области устойчивости. Найдено граничное значение параметра отношения сторон пластинки, начиная с которого невозмущённое состояние равновесия системы теряет устойчивость только в виде локализованной дивергенции.

Найдены критические скорости локализованной дивергенции и критические значения коэффициента напряжения в предположении, что в момент «выпучивания» в пластинке возникают только напряжения изгиба.

Показана существенная зависимость критической скорости локализованной дивергенции от коэффициента напряжения сжимающих сил и от коэффициента Пуассона.

Установлено, что первоначальные сжимающие силы, направленные по потоку газа, приводят к большему «падению» критических скоростей локализованной дивергенции – к большему понижению устойчивости системы, в сравнении с сжимающими силами, направленными перпендикулярно к скорости потока газа [17].

Изучено влияние относительной толщины пластинки на устойчивость системы.

Предлагаемая работа завершает работы [18, 19].

Результаты работы могут быть использованы при обработке данных экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая достаточно широкая прямоугольная пластинка ($ab^{-1} \geq 2.9$), которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край пластинки $x = 0$ – свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x = 0$ приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты I_c, интенсивность которых на много превосходит интенсивность распределенной массы пластинки [2, 10].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию сжимающих сил $N_x = 2h\sigma_x$, равномерно распределённых по краям $x = 0$ и $x = a$ пластинки, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; сжимающие усилия σ_x предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели, и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y, t)$ [1, 2, 5].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой $\delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$ «поршневой теории», где a_0 –скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [8, 9]. При этом предполагается, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$.

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности сжатой прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [8, 9] будет описываться соотношением [1, 2, 5, 10]:

$$D\Delta^2 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \; w = w(x, y, t); \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [2, 10]:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \tag{1.2}$$

$$D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - N_x \frac{\partial w}{\partial x} = -m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{при } x = 0;$$

$$w = 0, \; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a; \tag{1.3}$$

$$w = 0\,,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b\,; \tag{1.4}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.})\,,\ M_0 = \sqrt{2}\,,\ M_{2\cos m.} \approx 33.85\,; \tag{1.5}$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) в предположении, что

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{cr.}\,, \tag{1.6}$$

$(\sigma_x)_{cr.}$ – критические значения сжимающих усилий, которые могут произвести «выпучивание» упругой поверхности пластинки в отсутствии обтекания [16].

Анализ устойчивости невозмущённого движения системы (1.1) – (1.4) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) – (1.4) для прогиба $w(x,y,t)$ в интервале (1.5) при условии (1.6).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.4) будем исследовать в случае достаточно широких прямоугольных пластинок [19]:

$$\gamma = ab^{-1} \in \left(2.9, \infty\right), \tag{1.7}$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b.

Заметим, что согласно обозначению (1.7) значению $\gamma = \infty$ соответствует один из предельных случаев прямоугольной пластинки – полубесконечная пластина–полоса.

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.4). Сведём задачу устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы (1.1) – (1.4) к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t)\cdot \sin(\mu_n y)\,,\ \mu_n = \pi n b^{-1}, \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое состояние равновесия системы (1.1) – (1.4) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\lambda > 0$) [13]. Критическая скорость V_{cr} потока газа, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\mathrm{Re}\lambda = 0$) [1, 2, 13].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» [16]:

$$r^4 - 2\cdot(1-\beta_x^2)\cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + 1 = 0\,, \tag{2.2}$$

корни $r_{1,2} \in R$ и $r_{3,4} \in W$ которого описываются соотношениями:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1+\beta_x^2)}\,,\ r_1 < 0\,,\ r_2 < 0\,; \qquad (2.3)$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1+\beta_x^2)}\,,\ q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right).$$

Здесь, α_n^3 – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3} \in (a_0^2\rho_0 M_0 D^{-1}\mu_n^{-3},\ a_0^2\rho_0 M_{2\cos m.} D^{-1}\mu_n^{-3})\,, \qquad (2.4)$$

в силу условия (1.5);

β_x^2 – коэффициент напряжения, характеризующий консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2 \cdot N_x\, D^{-1}\mu_n^{-2} = h\sigma_x D^{-1}\mu_n^{-2} < (\beta_x^2)_{cr.} \text{ (табл.1)}; \qquad (2.5)$$

$q = q\left(V\right) \in R$ – единственный действительный корень кубического уравнения

$$8\cdot(q+1-\beta_x^2)(q^2-1) - \alpha_n^6 = 0\,, \qquad (2.6)$$

$$q = q\left(V\right) \in \left(q_0,\ q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right),\ q_0 = \left(\beta_x^2 - 1) + 2\sqrt{(\beta_x^2-1)^2+3}\right)\Big/3 \text{ (табл. 2)}. \qquad (2.7)$$

При значениях (2.7) характеристическое уравнение (2.2) имеет два отрицательных корня $r_1 < 0$, $r_2 < 0$ и пару $r_{3,4} \in W$ комплексно сопряжённых корней [16].

В таблице 1 приведены критические значения коэффициента напряжения: $(\beta_x^2)_{cr} = (\beta_x^2)_{cr}\left(n,\gamma,\nu\right)$ – решения дисперсионного уравнения исходной задачи устойчивости в отсутствии обтекания $\left(V=0\right)$ при $n=1$ и $m_c = 0, I_c = 0$, найденные с точностью до порядка 10^{-4} в [16].

Таблица 1.

γ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
1.80	1.3670	1.2180	1.1543	1.0541	0.8747
1.96	1.3671	1.2189	1.1550	1.0547	0.8749
$\geq$ 2.90	1.3672	1.2187	1.1550	1.0547	0.8750

Таблица 2.

β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
q_0	1	1.001	1.005	1.012	1.022	1.035	1.052	1.072

Тогда, в соответствии с выражениями (2.3), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда:

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4} C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x + \lambda t)\cdot\sin(\mu_n y) \text{ для всех } \gamma \in \left(2.9,\infty\right); \qquad (2.8)$$

а в случае полубесконечной пластины–полосы –

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2}C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y)\,,\ \gamma=\infty\,, \qquad (2.9)$$

в силу условия затухания колебаний на крае $x=a\ \left(a=\infty\right)$ [6, 7, 14].

Подставляя выражение (2.4) в кубическое уравнение (2.6), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток» [16, 19]:

$$V(q)=2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)}\cdot\pi^3 n^3 D(a_0\rho_0 b^3)^{-1},\ \gamma\in\left[2.9,\infty\right], \qquad (2.10)$$

позволяющую по известному значению параметра $q\in\left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right)$ определить скорость потока газа $V\left(q\right)$, или её приведённое значение: $V\left(q\right)\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$.

Так как невозмущённое состояние равновесия системы в случае достаточно широких стальных пластинок $\left(\gamma\geq 2.9\right)$ и полубесконечной пластины–полосы $\left(\gamma=\infty\right)$ относительной толщины $2hb^{-1}\in\left[0.006, 0.015\right]$ устойчиво вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.5) [2, 16, 19], то очевидно, что

$$V\left(q\right)\in\left(V\left(q_0\right),\, a_0\, M_{2cos\,m.}\right)\subseteq\left(a_0 M_0,\, a_0\, M_{2cos\,m.}\right),\ \gamma\in\left[2.9,\infty\right]. \qquad (2.11)$$

Согласно формуле цилиндрической жёсткости $D=E\cdot(2h)^3\Big/\left(12\left(1-\nu^2\right)\right)$ отсюда следует [16–19]:

$$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)\in(V(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0 b^3), a_0 M_{2\cos m}\Psi)\subseteq\left(a_0 M_0,\, a_0\, M_{2\cos m.}\right)\Psi\,,$$

$$\Psi=12(1-\nu^2)a_0\rho_0 E^{-1}(2hb^{-1})^{-3}\ \text{для всех}\ \gamma\in\left[2.9,\infty\right]. \qquad (2.12)$$

Подставляя значения коэффициента Пуассона ν и относительной толщины пластинки $2hb^{-1}\in\left[0.006,\, 0.015\right]$ в выражения (2.12), получаем интервалы $d\left(\nu, 2hb^{-1}\right)=(a_0 M_0,\, a_0 M_{2\cos m})\Psi$ допустимых значений приведённой скорости потока $V\left(q\right)D^{-1}\left(a_0\rho_0 b^3\right)$, представленные для стальных пластинок в таблице 3.

Таблица 3.

ν / $2hb^{-1}$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.8,1311.7)	(52.0,1245.2)	(50.5,1209.0)	(47.7,1141.6)	(41.6,996.3)
0.007	(34.5, 811.1)	(32.7, 769.4)	(32.0, 753.4)	(30.0, 705.3)	(26.2,615.5)
0.008	(23.1, 544.3)	(22.0, 516.4)	(21.5, 505.6)	(20.1, 473.3)	(17.6,413.1)
0.009	(16.2, 381.8)	(15.4, 362.1)	(15.1, 354.6)	(14.1, 332.0)	(12.3, 289.7)
0.010	(11.8, 283.5)	(11.2, 269.1)	(10.9, 261.3)	(10.3, 246.7)	(9.0, 215.3)
0.011	(8.9, 209.4)	(8.4, 198.7)	(8.1, 190.4)	(7.74, 182.1)	(6.75,158.9)
0.012	(6.85, 164.0)	(6.5, 155.7)	(6.3, 151.2)	(5.96, 142.7)	(5.2, 124.6)

0.013	(5.39, 126.9)	(5.11,120.34)	(5.0,117.84)	(4.69,110.32)	(4.09, 96.3)
0.014	(4.3, 101.5)	(4.09, 96.24)	(4.0, 94.24)	(3.75, 88.22)	(3.27, 77.0)
0.015	(3.5, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23,77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

3. Достаточные признаки потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы (1.1) – (1.4) для $\gamma \in \left[2.9, \infty\right]$.

3.1. Сжатая полубесконечная пластина–полоса $\left(\gamma = \infty\right)$. Подставляя общее решение дифференциального уравнения (1.1) в виде (2.9) в граничные условия (1.2) и (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению, описываемому в виде биквадратного уравнения относительно собственного значения λ:

$$\tilde{F}\left(\lambda\right) = \chi_n \delta_n \tilde{A}_0 \lambda^4 + \left(\chi_n \tilde{A}_1 + \delta_n \tilde{A}_2\right)\lambda^2 + \tilde{A}_3 = 0\ ,\ \ \gamma = \infty\ , \tag{3.1}$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}\ ,\ \ \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1}\ ,\ \delta_n > 0\ ,\ \chi_n > 0\ ; \tag{3.2}$$

δ_n и χ_n – приведённые значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края пластинки;

$$\tilde{A}_0 = 1\ ,\ \tilde{A}_1 = \sqrt{2\left(q + 1 - \beta_x^2\right)} \cdot \left(q - \sqrt{q^2 - 1}\right),\ \ \tilde{A}_2 = \sqrt{2\left(q + 1 - \beta_x^2\right)}\ , \tag{3.3}$$

$$\tilde{A}_3 = \left(q + 1 - \sqrt{q^2 - 1}\right)^2 - 2\left(q + 1\right)\nu - \left(1 - \nu\right)^2 - 2\beta_x^2 \left(q - \sqrt{q^2 - 1}\right)\ . \tag{3.4}$$

Отсюда очевидно, что

$$\tilde{A}_0 > 0, \tilde{A}_1 > 0, \tilde{A}_2 > 0 \tag{3.5}$$

при всех $\beta_x^2 \in \left[0, \left(\beta_x^2\right)_{cr}\right)$ (табл. 1), $q \in \left(q_{0,}\ q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ (табл. 2).

Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1} = I_c \left(\pi n\right)^2 \cdot \left(m_c b^2\right)^{-1}\ ,\ k_n > 0\ , \tag{3.6}$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.5), перепишется в виде

$$\lambda^4 + (k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)\chi_n^{-1} \tilde{A}_0^{-1} \lambda^2 + \chi_n^{-1} \delta_n^{-1} \tilde{A}_0^{-1} \tilde{A}_3 = 0\ ,\ (k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) > 0\ . \tag{3.7}$$

Легко показать, что дискриминант уравнения (3.7)

$$\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}\left(q, n, \nu, \beta_x^2, k_n\right) = \left(k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2\right)^2 - 4k_n \tilde{A}_0^{-1} \tilde{A}_3 > 0 \tag{3.8}$$

при всех $q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$, $\beta_x^2 \in \left[0, \left(\beta_x^2\right)_{cr}\right), n, \nu$ и k_n.

В самом деле, подставляя в формулу (3.8) выражения (3.3) и (3.4), после несложных преобразований получаем

$$\tilde{\Delta}=2\left(q+1-\beta_x^2\right)\left(k_n\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)-1\right)^2+4k_n\left(2\left(q+1\right)\nu+\left(1-\nu\right)^2\right)>0. \quad (3.9)$$

3.2. Сжатые достаточно широкие прямоугольные пластинки $\left(\gamma\in\left[2.9,\infty\right)\right)$**.**

Подставляя общее решение дифференциального уравнения (1.1) в виде (2.8) в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель после несложных преобразований описывается также в виде биквадратного уравнения относительно собственного значения λ [18, 19]:

$$F\left(\lambda\right)=\chi_n\delta_nA_0\lambda^4+\left(\chi_nA_1+\delta_nA_2\right)\lambda^2+A_3=0\ ,\ \ \gamma\in\left[2.9,\infty\right); \quad (3.10)$$

где δ_n и χ_n определены выражениями (3.2).

$$A_0=A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2)= \quad (3.11)$$

$$=\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\left(1-\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma\right)B_1B_2-$$

$$-2B_2\left(q+1-\beta_x^2+\sqrt{q^2-1}\right)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)sh(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)-$$

$$-2B_1\left(q+1-\beta_x^2-\sqrt{q^2-1}\right)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)ch(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2);$$

$$A_1=A_1(q,n,\gamma,\beta_x^2)= \quad (3.12)$$

$$=2(q+1-\beta_x^2)\left[(q-\sqrt{q^2-1})+(q+\sqrt{q^2-1})\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma\right]B_1B_2+$$

$$+2B_2\left[\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)}\cdot\left(q+1-\beta_x^2+\sqrt{(q^2-1}\right)sh(\pi n\gamma B_1)+\right.$$

$$\left.+2B_1((2q-1)(q+1)-q\beta_x^2)\,ch(\pi n\gamma B_1)\right]\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)+$$

$$+2\left[B_1\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)}\left(q+1-\beta_x^2-\sqrt{q^2-1}\right)ch(\pi n\gamma B_1)+\right.$$

$$\left.+(q+1-\beta_x^2)(q-1-q\beta_x^2)sh(\pi n\gamma B_1)\right]\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma);$$

$$A_2=A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2)= \quad (3.13)$$

$$=2(q+1-\beta_x^2)\left(1+\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\right)B_1B_2-$$

$$-4(q+1-\beta_x^2)B_1B_2ch(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)+$$

$$+2(3(q^2-1)+2\beta_x^2-\beta_x^4)sh(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma);$$

$$A_3=A_3(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2)= \quad (3.14)$$

$$= \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1}\right)^2 - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2 -\right.$$

$$-2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)\Big\} B_1 B_2 - \sqrt{2\left(q+1-\beta_x^2\right)}\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1}\right)^2 - 2(q+1)\nu -\right.$$

$$-\left(1-\nu\right)^2 - 2\beta_x^2\left(q+\sqrt{q^2-1}\right)\Big\} B_1 B_2 \ \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma +$$

$$+\ 2B_2\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\left\{\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1} -\right.\right.$$

$$-(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1) - (2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1}-2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2 -$$

$$-2((2q-1)(\mathrm{q}+1) - q\sqrt{q^2-1} - q\beta_x^2)\nu + \ (\mathrm{q}+1-\beta_x^2+\sqrt{q^2-1})\,\nu^2\Big] sh(\pi\, n\,\gamma B_1) +$$

$$+2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)}\,(q+1-\beta_x^2)\,B_1 ch\left(\pi n\gamma B_1\right)\Big\}\cdot\cos(\pi\, n\,\gamma B_2) +$$

$$+2\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\left\{-B_1\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1} +\right.\right.$$

$$+(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1) + (2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1}-2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2 +$$

$$+\ 2((2q-1)(\mathrm{q}+1) + q\sqrt{q^2-1} - q\beta_x^2)\nu - (\mathrm{q}+1-\beta_x^2-\sqrt{q^2-1})\,\nu^2\Big] ch(\pi n\gamma B_1) -$$

$$-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)\left(q^2-1\right)}\,(3(q^2-1)+2\beta_x^2-\beta_x^4)\cdot sh\left(\pi n\gamma B_1\right)\Big\}\sin\left(\pi n\gamma B_2\right);$$

$$B_1 = \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1+\beta_x^2)} > 0,\ \ B_2 = \sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1+\beta_x^2)} > 0. \quad (3.15)$$

Справедливы неравенства [18, 19]:

$$A_0 = A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2) > 0\,,\ A_2 = A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2) > 0\,. \quad (3.16)$$

Согласно обозначению (3.6) характеристический определитель (3.10), в соответствии с условиями (3.2) и (3.16), перепишется в виде, аналогичному (3.7):

$$\lambda^4 + (k_n A_1 + A_2)\chi_n^{-1} A_0^{-1}\lambda^2 + \chi_n^{-1}\delta_n^{-1}A_0^{-1}A_3 = 0\,,\ \delta_n > 0\,,\ \chi_n > 0\,,\ k_n > 0\,. \quad (3.17)$$

3.3. Равносильность дисперсионных уравнений (3.7) и (3.17). Численные исследования показали, что начиная с $\gamma = \gamma_{gr} = 2.9$, при всех значениях остальных параметров системы «пластинка–поток» дисперсионные уравнения (3.7) и (3.17) равносильны с точностью до порядка 10^{-4} и более [19]:

$$\lim_{\gamma\to\gamma_{gr}\approx 2.9} F\left(\lambda\right) = \tilde{F}\left(\lambda\right);\ \ F\left(\lambda\right) = \tilde{F}\left(\lambda\right) \ \text{при всех}\ \gamma \ge \gamma_{gr} \approx 2.9\,. \quad (3.18)$$

Следовательно, поведение возмущённого движения системы «пластинка–поток» в случае прямоугольных пластинок, когда $\gamma \ge \gamma_{gr} \approx 2.9$, аналогично поведению системы в случае полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$**).**

В силу условия (3.8), из соотношений (3.18) очевидно, что

$$\Delta = \tilde{\Delta} > 0 \ \ \text{при всех}\ q, n, \nu, k_n \ \text{и}\ \beta_x^2 < \left(\beta_x^2\right)_{cr},\ \text{когда}\ \gamma \ge \gamma_{gr} \approx 2.9\,; \quad (3.19)$$

Δ – дискриминант уравнения (3.17).

Соответственно, анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» при всех $\gamma \in [2.9, \infty]$ будет сводиться к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.7), определяющих собственные движения системы в пространстве «существенных» параметров $\Im = \{q(V), n, \nu, \beta_x^2, k_n\}$. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

4. **Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости.** Здесь, также, как и в работах [18 и 19], введём в рассмотрение в пространстве параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\Im_0\left(k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 > 0,\ \tilde{A}_3 > 0,\ \tilde{\Delta} > 0\right)$ и области неустойчивости: $\Im_1\left(\tilde{A}_3 < 0,\ \tilde{\Delta} > 0\right)$, $\Im_2\left(k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 < 0,\ \tilde{A}_3 > 0,\ \tilde{\Delta} > 0\right)$ и $\Im_3\left(\tilde{A}_3 > 0,\ \tilde{\Delta} < 0\right)$.

Здесь $\tilde{A}_i$, i =1,2,3 и $\tilde{\Delta}$ – определены выражениями (3.3), (3.4) и (3.8).

В области устойчивости $\Im_0$ уравнение (3.7) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$: прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого состояния равновесия; в области $\Im_1 = \Im_{11} \cup \Im_{12}$ – имеет два действительных $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ и два чисто мнимых $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$ корня, что характеризует либо эйлерову дивергенцию панели $(\Im_{11})$, когда $\gamma < \gamma_{gr} \approx 2.9$, либо локализованную дивергенцию $(\Im_{12})$, когда $\gamma \geq \gamma_{gr} \approx 2.9$; в области $\Im_2$ – имеет два отрицательных ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) и два положительных ($\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$) корня, что характеризует более ярко выраженную дивергенцию панели – не эйлерову дивергенцию. А в области $\Im_3$, по крайней мере, два корня уравнения (3.7) являются комплексно сопряжёнными числами с положительной вещественной частью: имеет место панельный флаттер.

Как следует из способа разбиения пространства параметров $\Im$, границами области устойчивости $\Im_0$ системы при условии $k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 > 0$ являются гиперповерхности $\tilde{A}_3 = 0$ и $\tilde{\Delta} = 0$ – определяющие, соответственно, границу «апериодической устойчивости» и границу «колебательной устойчивости» [12,13,18,19]. Переходы ($\Im_0 \to \Im_3$) и ($\Im_2 \to \Im_3$) определяют «опасные границы» областей $\Im_0$ и $\Im_2$ [12].

Однако, в данной постановке, в силу условий (3.7) и (3.8), границей области устойчивости $\Im_0$ является только лишь гиперповерхность

$$\tilde{A}_3 = 0, \tag{4.1}$$

на которой характеристический определитель (3.7) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2.

Уравнение (4.1), описываемое в соответствии с выражением (3.4) соотношением

$$\tilde{A}_3 = \left(q + 1 - \sqrt{q^2 - 1}\right)^2 - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2 - 2\beta_x^2\left(q - \sqrt{q^2-1}\right) = 0, \qquad (4.2)$$

определяет границу «апериодической устойчивости», при переходе через которую невозмущённое состояние равновесия динамической системы (1.1) – (1.4), начиная с значения $\gamma = \gamma_{gr.} \approx 2.9$, при всех значениях $\beta_x^2 < \left(\beta_x^2\right)_{cr.}$ (табл.1), коэффициента Пуассона ν и числа полуволн n при скоростях потока газа $V \geq V_{locdiv} = V\left(q_{locdiv}\right)$ теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции, подобно динамической системе с полубесконечной пластиной–полосой $(\gamma = \infty)$ [14–17, 19, 20].

Соответственно, дисперсионные уравнения (3.7) и (3.17) сводятся к уравнению (4.2), тождественному дисперсионному уравнению, полученному в работе [16] при исследовании задачи сверхзвуковой дивергенции сжатой по потоку газа панели в статической постановке по методу Эйлера.

Критические скорости $V_{loc.div.} = V_{loc.div.}\left(n, \nu, \beta_x^2\right)$ разграничивают область устойчивости $\Im_0$ и подобласть $\Im_{locdiv} = \Im_{12} \subset \Im_1$ локализованной дивергенции. При скоростях $V \geq V_{loc.div}$ потока газа происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера невозмущённого состояния равновесия системы от устойчивости к статической неустойчивости в виде локализованной дивергенции: прогибы пластинки локализованы в окрестности её свободного края $x = 0$. Граница «апериодической устойчивости» является «безопасной» в смысле Н.Н. Баутина [12]: малое превышение критической скорости локализованной дивергенции соответствует малым дивергентным деформациям, локализованных в окрестности свободного края пластинки.

Из уравнения (4.2) очевидно, что её решение $q_{loc.div.} \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ не зависит от параметра $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$. Соответственно, приведённые критические скорости локализованной дивергенции $V_{locdiv.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$, определяемые подстановкой единственного решения $q_{loc.div.} \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ уравнения (4.2) в формулу (2.10), также не зависят от $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$, а зависят лишь от параметров n, ν и β_x^2.

Из независимости функции $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ от параметра $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$ следует, что коэффициенты χ_n и δ_n, характеризующие сосредоточенные инерционные моменты поворота I_c и массы m_c соответственно, влияют лишь только на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности её свободного края $x = 0$.

Таким образом, в отличие от динамических систем (1.1) – (1.4) в случае удлинённых прямоугольных пластинок [18] и пластинок умеренных размеров [19], невозмущённое состояние равновесия динамической системы (1.1) – (1.4) в случае достаточно широких прямоугольных пластинок $\gamma \in \left[2.9, \infty\right]$ теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции.

5. Численные результаты. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \nu, \gamma, \beta_x^2)\} \in \Im$, параметризованных в пространстве $\Im$ надлежащим образом.
В этом случае так же, как и в работах [14 – 17, 20], критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$ является возрастающей функцией от числа полуволн n: её наименьшему значению соответствует $n = 1$.
Результаты численных исследований показали, что при всех допустимых значениях «существенных» параметров невозмущённое состояние равновесия системы является устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей, в частности для стальных пластинок относительной толщины $2h^{-1}b \in \left(0.006,\ 0.015\right]$.

Соответственно, цепочки переходов состояний системы будут вида [18, 19]:

$$\Im_0 \xrightarrow{V_{loc.div}} \Im_{12},\ \Im_{12} \subseteq \Im_1 . \tag{5.1}$$

Подставляя решение $q_{loc.div.} \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ уравнения (4.2) в формулу (2.10), получаем значения приведённой критической скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$, представленные для некоторых значений коэффициента напряжения $\beta_x^2 \in \left[0, 0.6\right]$ и коэффициента Пуассона ν в таблице 4 при $n = 1$.

Таблица 4.

β_x^2 \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.0	296.256	169.912	143.922	114.697	79.677
0.1	272.431	151.675	130.123	103.307	70.235
0.2	248.446	137.923	117.083	91.706	60.772
0.3	223.925	124.337	103.705	80.068	50.813
0.4	199.756	108.793	90.398	68.296	42.075
0.5	175.549	94.415	77.218	57.271	32.826
0.6	150.734	80.069	64.299	46.075	–

Из данных таблицы 4 следует, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 b^3\right)$ является монотонно убывающей функцией как от коэффициента напряжения β_x^2, так и от коэффициента Пуассона ν: на промежутке $\beta_x^2 \in \left[0, 0.6\right]$ убывает, примерно, в 2 – 2.5 раза, а в пластинах из материалов с большим значением ν – примерно, в 3.7 – 5.3 раза. При этом, «падение» критического значения коэффициента напряжения $\left(\beta_x^2\right)_{cr}$ вследствие обтекания равно, примерно, 2 раза (табл. 1 и 4). А из сопоставления данных таблиц 3 и 4 следует, что невозмущённое состояние равновесия системы в случае пластинок относительной толщины $2hb^{-1} > 0.014$ – устойчиво при всех допустимых значениях остальных параметров.

Как показано в [19], граничное значение γ_{gr} является монотонно возрастающей функцией от коэффициента напряжения β_x^2, а от коэффициента Пуассона ν зависит исчезающе мало. На промежутке $\beta_x^2 \in \left[0, 0.6\right]$ функция γ_{gr} растёт от 1.96 до 2.9. С увеличением β_x^2 граница между подобластями дивергенции панели $\Im_{11} \subseteq \Im_1$ и локализованной дивергенции $\Im_{12} \subseteq \Im_1$ смещается в направлении больших значений параметра γ, что приводит к сужению подобласти $\Im_{12}$ – к дополнительному снижению устойчивости системы, помимо падения критической скорости локализованной дивергенции. А в случае сжимающих усилий, направленных перпендикулярно потоку, граничное значение γ_{gr} от коэффициента напряжения β_y^2 и коэффициента Пуассона ν зависит исчезающе мало: $\gamma_{gr} \approx 1.96$ при всех допустимых значениях параметров системы [17]. При этом, на промежутке $\beta_y^2 \in \left[0, 0.6\right]$ падение критической скорости локализованной дивергенции составлет, примерно, в 1.94–2.3 раза, что меньше, чем при $\beta_x^2 \in \left[0, 0.6\right]$.

Заметим, что первоначальные силы растяжения достаточно широкой пластинки, направленные по потоку газа, приводят к повышению устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы примерно в 1.75 – 3 раза в сравнении с широкой панелью с ненагруженными краями [20].

Таким образом, первоначальные сжимающие силы достаточно широкой пластинки ($\gamma \geq 2.9$), направленные по потоку газа, приводят к существенному понижению устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка–поток» в сравнении с широкой панелью с ненагруженными краями: происходит смещение границы между подобластями дивергенции панели и локализованной дивергенции в сторону больших значений параметра отношения сторон панели, а также, падение критической скорости локализованной дивергенции в 2–2.5 раза.

6. Основные результаты и заключение.

В работе исследуется влияние первоначальных сжимающих сил, направленных по сверхзвуковому потоку газа, на устойчивость линейной динамической системы «пластинка–поток» в случае достаточно широких прямоугольных пластинок и «полубесконечной пластины–полосы», в предположении наличия на свободном крае пластинок сосредоточенных инерционных масс и моментов поворота.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости невозмущённого состояния равновесия линейной динамической системы «пластинка–поток».

Получены явные выражения дисперсионных уравнений, характеризующие достаточные признаки потери устойчивости.

Найдено граничное значение $\gamma_{gr} \approx 2.9$ параметра $\gamma = ab^{-1}$ – отношения сторон панели, начиная с которого поведение возмущённого движения систем «пластинка–поток» в случае прямоугольных пластинок $\left(\gamma \in \left[2.9, \infty\right)\right)$ и полубесконечной пластины–полосы $\left(\gamma = \infty\right)$ аналогичны при всех допустимых значениях остальных параметров системы.

С помощью графоаналитических и численных методов анализа произведено разбиение многопараметрического пространства состояний системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Исследована граница области устойчивости. Показано, что граница области устойчивости определяется только гиперповерхностью, характеризующей потерю «апериодической устойчивости» в виде локализованной дивергенции: уравнение, характеризующее потерю «колебательной устойчивости» не имеет решения, что свидетельствует о её «безопасности» в смысле Баутина Н.Н. [12]. Отсюда очевидно следует, что в исходной задаче, как и в [15, 17, 20], критическая скорость локализованной дивергенции не зависит от параметра отношения коэффициентов, характеризующих сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c. Сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота влияют только на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности её свободного края $x = 0$.

Найдены критические скорости локализованной дивергенции, в предположении, что в пластинке в момент «выпучивания» возникают только напряжения изгиба.

Показано, что критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$ является монотонно убывающей функцией от коэффициентов напряжения β_x^2 и Пуассона ν: на промежутке $\beta_x^2 \in \left[0, 0.6\right]$ убывает примерно в 2–2.5 раза, в сравнении с панелью с ненагруженными краями [15], а в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν – меньше примерно в 3.7 – 5.3 раза. Это означает, что в случае достаточно широких пластин $\left(\gamma \geq 2.9\right)$ и полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$) первоначальные сжимающие усилия, направленные по потоку газа, приводят к существенному понижению устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка – поток».

Установлено, что невозмущённое состояние равновесия системы в случае достаточно широких стальных пластинок относительной толщины $2hb^{-1} > 0.014$ – устойчиво во всём интервале сверхзвуковых скоростей.

Таким образом, первоначальные сжимающие усилия в достаточно широких пластинках и полубесконечной пластине–полосе $\left(\gamma\in\left[2.9,\infty\right]\right)$, направленные по сверхзвуковому потоку газа, приводят к существенному понижению устойчивости динамической системы «пластинка – поток», в спавнении с системой с ненагруженной панелью [15].

Сравнительный анализ результатов данной работы и работ [15–20] позволяет установить границы применимости метода Эйлера, наряду с применением динамического метода. Сопоставление результатов решения задачи устойчивости динамических систем «пластинка–поток» в случае достаточно широких пластинок и полубесконечной пластины–полосы, полученных применением обоих методов, указывает на их хорошее совпадение [15, 17, 20]. Поэтому, при решении подобных задач применение метода Эйлера, как наиболее удобного и простого, вполне оправдано.

Изложенный в данной работе графоаналитический метод исследования может быть применён для получения аналитического решения широкого класса задач устойчивости упругих систем, в частности, при комбинированном нагружении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел.– М: Наука. 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под. ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968.
6. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа // Акустический журнал. 1960. Т. 6. . № 1. С. 124–126.
7. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 38– 46.
8. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
9. Ashley G H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N12. P. 1109–1118.
10. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
11. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука. 1979. 384 с.
12. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
13. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.– Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
14. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip, Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65(1). С. 29–34.

15. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
16. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, сжатой по направлению потока газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 4, с.44–68.
17. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об устойчивости широкой панели со свободным краем, сжатой в направлении, перпендикулярном к скорости сверхзвукового потока газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов // Изв. НАН Армении, Механика. 2021. Т.74 (3), с. 19-36
18. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлинённой прямоугольной пластинки со свободным краем, сжатой по потоку газа // Изв. НАН Армении, Механика. 2023. Т.76 (2), с. 44–58. DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.2- 44.
19. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер прямоугольной пластинки умеренных размеров с одним свободным краем, сжатой по потоку газа // Изв. НАН Армении. Механика. 2023. Т.76 (в печати)
20. Мартиросян С.Р. Об устойчивости широкой панели со свободным краем, растянутой по сверхзвуковому потоку газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов // Изв. НАН Армении. Механика. 2023. Т.76 (1), с. 37–55. DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.1-37.

Сведения об авторе:
Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 16.10.2023