

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КОНЦЕНТРАТОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ ТИПА ТРЕЩИН И
УПРУГИХ СТРИНГЕРОВ С УПРУГИМ КЛИНОВИДНЫМ ТЕЛОМ ПРИ
АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Григорян М.С., Саакян А.В.

Ключевые слова: упругий клин, трещина, стрингер, антиплоская деформация, преобразование Меллина, интегральное уравнение.

Grigoryan M.S., Sahakyan A.V.

On the Interaction of Stress Concentrators Such as Cracks and Stringers with an Elastic Wedge-Shaped Body under Antiplane Deformation

Key Words: elastic wedge, crack, stringer, antiplane deformation, Mellin transformation, integral equation.

The problem of contact interaction of two identical stringers with an elastic wedge of arbitrary angle of solution, when a system of cracks is located on the bisector of the wedge, is considered under conditions of antiplane deformation. The stringers are symmetrically bisected to the faces of the wedge. Stringers and crack banks are loaded with tangential forces causing antiplane deformation (longitudinal shear) of the wedge. Using the Mellin integral transformation, the solution of the problem is reduced to a system of two singular integral equations (SIE), from which the tangential contact stresses under the stringers and the dislocation densities at the crack banks are determined. The determining system of the SIE is solved by the numerical-analytical method of mechanical quadratures. A numerical analysis was carried out in the case where there is only one crack on the bisector of the wedge. Graphs were constructed illustrating the dependence of the main required quantities on the wedge opening angle and the distance between the wedge tip and the crack.

Գրիգորյան Մ.Ս., Սահակյան Ա.Վ.

Ճաքերի և առաձգական վերադիրների տիպի լարումների կենտրոնացուցիչների ու առաձգական սեպաձև մարմնի փոխազդեցությունը հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ

Հիմնաբառեր՝ առաձգական սեպ, ճաք, վերադիր, հակահարթ դեֆորմացիա, Մելլինի ինտեգրալ ձևափոխություն, ինտեգրալ հավասարումներ:

Հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում դիտարկվում է կամայական անկյունային բացվածքով առաձգական սեպի և երկու միանման վերադիրների կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրը, երբ սեպի կիսորդի վրա առկա է ճաքերի համակարգ: Վերադիրները կիսորդի նկատմամբ համաչափ ամրացված են սեպի եզրերին: Վերադիրները և ճաքերի ափերը բեռնված են շոշափող ուժերով՝ առաջացնելով հակահարթ դեֆորմացիա (երկայնական սահբ): Մելլինի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ խնդրի լուծումը բերվում է երկու սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումներից (ՄԻՀ) կազմված համակարգի, որտեղից որոշվում են շոշափող կոնտակտային լարումները վերադիրների տակ և դիսլոկացիաների խտությունը ճաքերի ափերին: Որոշիչ ՄԻՀ համակարգը լուծվում է մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի թվային-վերլուծական մեթոդով: Կատարվել է թվային վերլուծություն, երբ սեպի կիսորդի վրա առկա է միայն մեկ ճաք: Կառուցվել են գրաֆիկներ, որոնք պատկերում են հիմնական որոնվող մեծությունների կախվածությունը սեպի բացվածքից և սեպի զազաթի և ճաքի միջև եղած հեռավորությունից:

В условиях антиплоской деформации рассматривается задача о контактном взаимодействии двух одинаковых стрингеров с упругим клином произвольного угла раствора, когда на биссектрисе клина расположена система трещин. Стрингеры скреплены с гранями клина симметрично относительно биссектрисы. Стрингеры и берега трещин нагружены касательными силами, вызывающими антиплоскую деформацию (продольный сдвиг) клина. При помощи интегрального преобразования Меллина решение задачи сводится к системе из двух сингулярных интегральных уравнений (СИУ), откуда определяются

касательные контактные напряжения под стрингерами и плотности дислокаций на берегах трещин. Определяющая система СИУ решается численно-аналитическим методом механических квадратур. Проведен численный анализ в случае, когда на биссектрисе клина имеется только одна трещина. Построены графики иллюстрирующие зависимость основных искомым величин от угла раствора клина и расстояния между вершиной клина и трещиной.

Введение. Задачи о контактном взаимодействии стрингеров с массивными упругими телами в теоретическом аспекте тесно связаны с классическими контактными и смешанными граничными задачами математической теории упругости, представляют их развитие и обобщение. В практическом аспекте такие задачи, будучи связаны с важными вопросами о передаче нагрузок от тонкостенных элементов к массивным деформируемым телам, часто встречаются в расчетах машиностроительных конструкций, при проектировании летательных аппаратов, в тензометрии, в строительном деле и в других областях инженерной практики. Из-за своей теоретической и практической значимости вопросы о контакте стрингеров с массивными деформируемыми телами стали предметом исследования многих авторов. Первые работы в этой области восходят к известной работе Мелана [1], где рассмотрены две фундаментальные задачи о передаче горизонтальной сосредоточенной силы от бесконечного в обоих направлениях стрингера к полубесконечной пластине или бесконечной пластине и предложена модель одномерного упругого континуума стрингера. Впоследствии, в смысле обобщения и развития идей работы [1], значительный прогресс был достигнут в работах [2-7]. В этом направлении укажем также на работы [8-14]. Стрингеры используются также для предотвращения распространения трещин в упругих телах. Такая задача рассмотрена в статье [15].

В связи с последним следует отметить, что в механике композитов, а также в разнообразных вопросах прикладной механики, часто встречаются задачи об определении характеристик напряженно-деформированного состояния деформируемых тел при одновременном наличии в них двух концентраторов напряжений типа трещин и стрингеров или тонкостенных упругих включений. Результаты исследования таких задач используются в расчетах композитных конструкций. Исходя из сказанного, в настоящей статье в условиях антиплоской деформации рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии упругого клина с произвольным углом раствора, когда грани клина симметрично относительно полуплоскости, делящей его пополам и содержащей конечное число тоннельных трещин конечной ширины, усилены двумя одинаковыми бесконечными ленточными стрингерами конечной ширины. Стрингеры и берега трещин нагружены касательными силами, вызывающими антиплоскую деформацию клина. При помощи интегрального преобразования Меллина решение рассматриваемой задачи сводится к решению системы СИУ из двух уравнений относительно неизвестных касательных контактных напряжений и плотностей дислокаций на берегах трещин. Определяющая система СИУ решается численно-аналитическим методом механических квадратур, основанном на использовании квадратурных формул типа Гаусса для сингулярных интегралов с ядром Коши и интегралов со слабой особенностью типа сигнум-функции. Для простоты и наглядности получаемых результатов рассмотрен случай одной трещины. Проведен численный анализ основных характеристик задачи. Выявлены характерные закономерности их изменения.

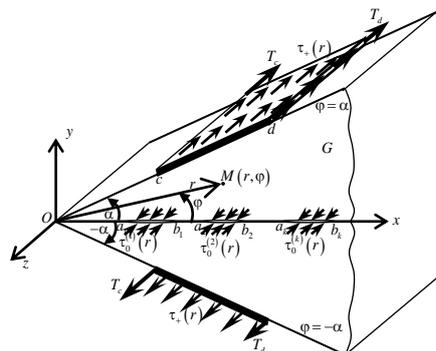
1. **Постановка задачи и вывод основных определяющих уравнений.** Пусть упругий клин $\Omega = \{0 \leq r < \infty; -\alpha < \varphi < \alpha; -\infty < z < \infty\}$, отнесенный к цилиндрической системе координат r, φ, z , с модулем сдвига G и углом раствора 2α ($0 < \alpha < \pi$) по своим граням $\varphi = \pm\alpha$, симметрично относительно средней полуплоскости клина $\varphi = 0$, на некотором расстоянии от ребра клина, усилен двумя одинаковыми стрингерами ленточного типа $\omega_{\pm} = \{0 < c \leq r \leq d; \varphi = \pm\alpha; -\infty < z < \infty\}$, обладающими модулем сдвига G_0 и высотой h ($h \ll d - c$).

Пусть, далее, на средней полуплоскости клина $\varphi = 0$ расположена система из произвольного конечного числа сквозных трещин конечной ширины $D = \bigcup_{k=1}^N \omega_k$;

$\omega_k = \{0 < a_k \leq r \leq b_k; -\infty < z < \infty\}$. Предполагается, что верхние (+) и нижние (-) берега трещин в направлении оси Oz симметрично нагружены равномерно распределенными по этой же оси касательными силами интенсивности $\tau_0^{(k)}(r)$, т.е.

$$\tau_{\varphi z}(r, \varphi) \Big|_{\varphi=\pm 0} = -\tau_0^{(k)}(r) \quad (r \in (a_k, b_k)),$$

где $\tau_{\varphi z}(r, \varphi)$ - касательное напряжение внутри клина, а свободные грани стрингеров нагружены касательными силами интенсивности $\tau_+(r)$, направленными по оси Oz и равномерно распределенными вдоль этой оси. Кроме того, по срединным линиям кромок стрингеров вдоль оси Oz действуют равномерно распределенные сосредоточенные силы T_c и T_d соответственно. При описанном нагружении упругий клин с трещинами, усиленный стрингерами, будет находиться в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси Oz с базовой плоскостью r, φ (фиг. 1).



Фиг. 1. Схематическое представление задачи

Требуется определить касательные контактные напряжения под стрингерами $\tau_-(r)$ ($c < r < d$), плотности дислокаций на берегах трещин и коэффициенты инстенсивности напряжений в вершинах трещин.

Для определения этих характеристик поставленной задачи выведем соответствующие определяющие уравнения в базовом сечении $z = 0$. С этой целью и ввиду симметрии относительно биссектрисы клина сначала рассмотрим следующую первую граничную задачу для верхней половины клина $\Omega_+ = \{0 \leq r < \infty; 0 < \varphi < \alpha\}$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (0 \leq r < \infty; 0 < \varphi < \alpha)$$

$$\tau_{\varphi z} \Big|_{\varphi=+0} = \frac{G}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=+0} = -T(r); \quad \tau_{\varphi z} \Big|_{\varphi=\alpha-0} = \frac{G}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\alpha-0} = -h(r) \quad (0 < r < \infty) \quad (1.1)$$

$$\tau_{\varphi z}^2 + \tau_{rz}^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty$$

Здесь $w = w(r, \varphi)$ -единственная, отличная от нуля, компонента упругих перемещений точек клина в направлении оси Oz , удовлетворяющая в области клина уравнению Лапласа, а

$$T(r) = \begin{cases} \tau_0(r) & (r \in L); \quad L = \bigcup_{k=1}^N (a_k, b_k); \\ \tau(r) & (r \in L'); \quad L' = [0, \infty) \setminus L; \end{cases} \quad (1.2)$$

$$h(r) = \begin{cases} \tau_-(r) & (c < r < d); \\ 0 & r \in [0, \infty) \setminus (c, d). \end{cases}$$

При этом функции $T(r)$ и $h(r)$ в граничной задаче (1.1) считаются наперед заданными, т.е. известными функциями.

Решение этой граничной задачи построим методом интегрального преобразования Меллина и с этой целью введем трансформанты Меллина

$$\bar{w}(p, \varphi) = \int_0^{\infty} w(r, \varphi) r^{p-1} dr; \quad (1.3)$$

$$\{\bar{\tau}_{\varphi z}(p, \varphi); \bar{T}(p); \bar{h}(p)\} = \int_0^{\infty} \{\tau_{\varphi z}(r, \varphi); T(r); h(r)\} r^p dr.$$

Здесь, следуя [16,17], считается, что напряжения на бесконечности имеют порядок $1/r$, а на ребре клина при $r \rightarrow 0$ – порядок $r^{-\varepsilon}$ ($0 \leq \varepsilon < 1$).

Тогда в комплексной плоскости $p = \sigma + i\varepsilon$ получается полоса регулярности интегралов (1.3) ($\varepsilon - 1 < \text{Re } p < 0$), где они сходятся. Эта полоса обычно оказывается шире указанной.

Теперь, применив к двухмерной граничной задаче (1.1) преобразование Меллина, придем к следующей одномерной граничной задаче в трансформантах Меллина:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{w}}{d\varphi^2} + p^2 \bar{w} = 0 & (0 < \varphi < \alpha); \\ \left. \frac{d\bar{w}}{d\varphi} \right|_{\varphi=+0} = -\frac{\bar{T}(p)}{G}; & \left. \frac{d\bar{w}}{d\varphi} \right|_{\varphi=\alpha-0} = -\frac{h(p)}{G}. \end{cases}$$

Решение этой граничной задачи представляется формулой

$$\bar{w}(p, \varphi) = -\frac{1}{Gp \sin(p\alpha)} \left[\cos(p(\varphi - \alpha)) \bar{T}(p) - \cos(p\varphi) \bar{h}(p) \right] \quad (0 \leq \varphi \leq \alpha).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} -p\bar{w}(p, 0) &= \frac{1}{G \sin(p\alpha)} \left[\cos(p\alpha) \bar{T}(p) - \bar{h}(p) \right]; \\ -p\bar{w}(p, \alpha) &= \frac{1}{G \sin(p\alpha)} \left[\bar{T}(p) - \cos(p\alpha) \bar{h}(p) \right]. \end{aligned}$$

Полагая здесь

$$\bar{\varphi}_0(p) = -p\bar{w}(p, 0); \quad \bar{\varphi}_\alpha(p) = -p\bar{w}(p, \alpha),$$

будем иметь

$$\bar{\varphi}_0(p) = \frac{1}{G} \left[\operatorname{ctg}(p\alpha) \bar{T}(p) - \frac{\bar{h}(p)}{\sin(p\alpha)} \right]; \quad (1.4)$$

$$\bar{\varphi}_\alpha(p) = \frac{1}{G} \left[\frac{\bar{T}(p)}{\sin(p\alpha)} - \operatorname{ctg}(p\alpha) \bar{h}(p) \right]. \quad (1.5)$$

Теперь из (1.4) определим $\bar{T}(p)$:

$$\bar{T}(p) = G\bar{\varphi}_0(p) \operatorname{tg}(p\alpha) + \frac{\bar{h}(p)}{\cos(p\alpha)} \quad (1.6)$$

и к нему применим формулу обратного преобразования Меллина

$$T(r) = \frac{G}{2\pi ir} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{\varphi}_0(p) \operatorname{tg}(p\alpha) r^{-p} dp + \frac{1}{2\pi ir} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\bar{h}(p)}{\cos(p\alpha)} r^{-p} dp.$$

Здесь прямая линия интегрирования $C = (c - i\infty, c + i\infty)$ параллельна мнимой оси и расположена в полосе регулярности $\varepsilon - 1 < \operatorname{Re} p < 0$. Так как в данном случае ближайшими к мнимой оси нулями функции $\cos(p\alpha)$ будут точки $p = \pm \pi/2\alpha$, то в качестве полосы регулярности можно взять более широкую полосу $-\pi/2\alpha < \operatorname{Re} p < \pi/2\alpha$. Тогда интегрирование можно произвести по мнимой оси. Следовательно, полагая

$$c = 0, p = is; \bar{\varphi}_0(p) = \int_0^\infty \varphi_0(r_0) r_0^p dr_0; \bar{h}(p) = \int_0^\infty h(r_0) r_0^p dr_0,$$

после простых преобразований получим

$$T(r) = -\frac{G}{\pi r} \int_0^\infty \varphi_0(r_0) dr_0 \int_0^\infty \text{th}(s\alpha) \sin(sp) ds + \frac{1}{\pi r} \int_0^\infty h(r_0) dr_0 \int_0^\infty \frac{\cos(sp)}{\text{ch}(s\alpha)} ds \left(\rho = \ln \frac{r_0}{r} \right).$$

Далее, для вычисления внутренних синус и косинус интегралов Фурье воспользуемся известными формулами из [18] (стр. 85, ф-ла 2.9 (4) и стр. 37, ф-ла 1.9 (1)). В результате будем иметь:

$$T(r) = -\frac{Gr^{\pi/2\alpha}}{\alpha r} \int_L r_0^{\pi/2\alpha} \varphi_0(r_0) dr_0 \frac{r^{\pi/2\alpha}}{r_0^{\pi/\alpha} - r^{\pi/\alpha}} + \frac{r^{\pi/2\alpha}}{\alpha r} \int_0^\infty r_0^{\pi/2\alpha} h(r_0) dr_0 \frac{r^{\pi/2\alpha}}{r_0^{\pi/\alpha} + r^{\pi/\alpha}}; \quad (1.7)$$

$$\varphi_0(r) = \frac{dw(r, 0)}{dr}.$$

Обращаясь теперь к формуле (1.5) и приняв во внимание (1.6), вполне аналогичным образом, по формуле обратного преобразования Меллина находим

$$\varphi_\alpha(r) = \frac{dw(r, \alpha)}{dr} = \frac{r^{\pi/2\alpha}}{\alpha r} \int_L r_0^{\pi/2\alpha} \varphi_0(r_0) dr_0 \frac{r^{\pi/2\alpha}}{r_0^{\pi/\alpha} + r^{\pi/\alpha}} - \frac{r^{\pi/2\alpha}}{G\alpha r} \int_0^\infty r_0^{\pi/2\alpha} h(r_0) dr_0 \frac{r^{\pi/2\alpha}}{r_0^{\pi/\alpha} - r^{\pi/\alpha}} \quad (0 < r < \infty). \quad (1.8)$$

Обратимся теперь к стрингерам и, в соответствии с моделью Мелана для стрингера, запишем его дифференциальное уравнение деформирования при антиплоской деформации:

$$hG_0 \frac{d^2 w_0}{dr^2} = \tau_-(r) - \tau_+(r) \quad (c < r < d), \quad (1.9)$$

где $w_0 = w_0(r)$ - перемещения точек стрингера по оси Oz . Уравнение (1.9), как в случае плоской деформации упругого слоя [19], получается из точного решения первой граничной задачи для упругого слоя при антиплоской деформации при помощи интегрального преобразования Фурье.

Далее, обе части (1.9) проинтегрируем по r от c до r , а затем от r до d :

$$hG_0 \frac{dw_0}{dr} = T_c + \int_c^r [\tau_-(s) - \tau_+(s)] ds; \quad (1.10)$$

$$hG_0 \frac{dw_0}{dr} = -T_d - \int_r^d [\tau_-(s) - \tau_+(s)] ds \quad (c \leq r \leq d).$$

Отметим, что в сечениях стрингера действуют направленные по оси Oz усилия

$$S(r) = h\tau_{rz} = hG_0 \frac{dw_0}{dr}$$

и, согласно (1.10),

$$S(c) = T_c, \quad S(d) = T_d.$$

Складывая равенства (1.10), получим

$$\frac{dw_0}{dr} = \frac{1}{2hG_0} \left\{ T_c - T_d + \int_c^d \text{sign}(r - r_0) [\tau_-(r_0) - \tau_+(r_0)] dr_0 \right\} \quad (c \leq r \leq d). \quad (1.11)$$

Условие равновесия стрингера имеет вид:

$$\int_c^d \tau_-(r_0) dr_0 = T_d + T_c + \int_c^d \tau_+(r_0) dr_0. \quad (1.12)$$

Теперь реализуем условия поставленной задачи на берегах трещин и на стрингерах:

$$T(r) = \tau_0^{(k)}(r) \quad (r \in (a_k, b_k), k = \overline{1, N}); \quad \frac{dw_0}{dr} = \frac{dw(r, \alpha)}{dr} \quad (c < r < d).$$

В результате, на основании (1.7), (1.8) и (1.11) относительно неизвестных функций $\Phi_0(r)$ и $\tau_-(r)$ придем к следующей системе из двух СИУ:

$$\begin{aligned} & -\frac{Gr^{\pi/2\alpha}}{\alpha r} \sum_{k=1}^N \int_{a_k}^{b_k} \frac{r_0^{\pi/2\alpha} \Phi_0^{(k)}(r_0) dr_0}{r_0^{\pi/\alpha} - r^{\pi/\alpha}} + \frac{r^{\pi/2\alpha}}{\alpha r} \int_c^d \frac{r_0^{\pi/2\alpha} \tau_-(r_0) dr_0}{r_0^{\pi/\alpha} + r^{\pi/\alpha}} = \tau_0^{(k)}(r) \quad (r \in (a_k, b_k)) \\ & \frac{r^{\pi/2\alpha}}{\alpha r} \sum_{k=1}^N \int_{a_k}^{b_k} \frac{r_0^{\pi/2\alpha} \Phi_0^{(k)}(r_0) dr_0}{r_0^{\pi/\alpha} + r^{\pi/\alpha}} - \frac{r^{\pi/2\alpha}}{\alpha Gr} \int_c^d \frac{r_0^{\pi/2\alpha} \tau_-(r_0) dr_0}{r_0^{\pi/\alpha} - r^{\pi/\alpha}} = \\ & = \frac{1}{2hG_0} \left\{ T_c - T_d + \int_c^d \text{sign}(r - r_0) [\tau_-(r_0) - \tau_+(r_0)] dr_0 \right\} \quad (c < r < d) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь интегралы с ядром $1/(r_0^{\pi/\alpha} - r^{\pi/\alpha})$ при $r_0 = r$ следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Решение системы СИУ должно удовлетворять условию равновесия стрингера (1.12) и следующим условиям

$$\int_{a_k}^{b_k} \Phi_0^{(k)}(r_0) dr_0 = 0 \quad (k = \overline{1, N}), \quad (1.14)$$

выражающим условия непрерывности перемещений в концевых точках трещин.

Далее, принципиально не нарушая общность постановки задачи, для простоты ограничимся одной трещиной и примем $L = (a, b)$, а затем в (1.13) введем ядро Коши. С этой целью в (1.13) перейдем к новым переменным t, u , полагая

$$u = r_0^{\pi/\alpha}, \quad t = r^{\pi/\alpha} \Rightarrow r_0 = u^{\alpha/\pi}, \quad r = t^{\alpha/\pi}.$$

Тогда, после элементарных преобразований, (1.13) преобразуется в следующую систему СИУ:

$$\int_{a_0}^{b_0} \frac{u^{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2}} \Phi_0(u^{\alpha/\pi})}{u - t} du - \frac{1}{G} \int_{c_0}^{d_0} \frac{u^{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2}} \tau_-(u^{\alpha/\pi})}{u + t} du = -\frac{\pi \tau_0(t^{\alpha/\pi})}{t^{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2}} G} \quad (a_0 < t < b_0)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{a_0}^{b_0} \frac{u^{\frac{\alpha}{\pi}-\frac{1}{2}} \Phi_0(u^{\alpha/\pi})}{u+t} du - \frac{1}{G} \int_{c_0}^{d_0} \left[\frac{1}{u-t} - \frac{\alpha G}{2hG_0} \frac{t^{\frac{\alpha}{\pi}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{u}} \operatorname{sign}(u-t) \right] u^{\frac{\alpha}{\pi}-\frac{1}{2}} \tau_0(u^{\alpha/\pi}) du = \\
& = \frac{\pi}{2hG_0 t^{\frac{\alpha}{\pi}-\frac{1}{2}}} \left[T_c + T_d + \frac{\alpha}{\pi} \int_{c_0}^{d_0} \operatorname{sign}(u-t) u^{\alpha/\pi-1} \tau_+(u^{\alpha/\pi}) du \right] \quad (c_0 < t < d_0) \\
& (a_0 = a^{\pi/\alpha}, b_0 = b^{\pi/\alpha}, c_0 = c^{\pi/\alpha}, d_0 = d^{\pi/\alpha}) \tag{1.15}
\end{aligned}$$

Отнесем все линейные величины к полуширине ленточного стрингера $\frac{d-c}{2}$ и введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned}
X(u) &= u^{\alpha/\pi-1/2} \Phi_0(u^{\alpha/\pi}), \quad \Psi(u) = \frac{1}{G} u^{\alpha/\pi-1/2} \tau_-(u^{\alpha/\pi}), \quad \omega(u) = \frac{u^{\alpha/\pi-1}}{G} \tau_+(u^{\alpha/\pi}), \\
\lambda &= \frac{(d-c)G}{4hG_0}, \quad T_c^0 = \frac{2T_c}{(d-c)G}, \quad T_d^0 = \frac{2T_d}{(d-c)G}, \quad f(t) = \frac{t^{\alpha/\pi-1/2}}{G} \tau_0(t^{\alpha/\pi}), \\
g(t) &= \lambda \left[T_c^0 - T_d^0 + \frac{\alpha}{\pi} \int_{c_0}^{d_0} \operatorname{sign}(u-t) \omega(u) u^{1-\alpha/\pi} du \right] t^{\alpha/\pi-1/2}.
\end{aligned}$$

В этих обозначениях система СИУ (1.15) примет вид

$$\begin{aligned}
& \int_{a_0}^{b_0} \frac{X(u) du}{u-t} - \int_{c_0}^{d_0} \frac{\Psi(u) du}{u+t} = -\pi f(t) \quad (a_0 < t < b_0) \tag{1.16} \\
& \int_{a_0}^{b_0} \frac{X(u) du}{u+t} - \int_{c_0}^{d_0} \left[\frac{1}{u-t} - \lambda \alpha \frac{t^{\alpha/\pi-1/2}}{\sqrt{u}} \operatorname{sign}(u-t) \right] \Psi(u) du = \pi g(t) \quad (c_0 < t < d_0)
\end{aligned}$$

Далее, каждый из интегралов (a_0, b_0) , (c_0, d_0) сведем к интервалу $(-1, 1)$ и, после несложных преобразований, в новых переменных система СИУ (1.15) запишется в форме

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \frac{X_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} - \int_{-1}^1 \frac{\Psi_0(\eta) d\eta}{\eta + \beta\xi + \gamma} = -f_0(\xi) \quad (-1 < \xi < 1) \\
& \int_{-1}^1 \frac{X_0(\eta) d\eta}{\eta + \xi/\beta + \delta} - \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\eta - \xi} - \lambda \alpha K(\xi, \eta) \operatorname{sign}(\eta - \xi) \right] \Psi_0(\eta) d\eta = g_0(\xi) \tag{1.17}
\end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
X_0(\xi) &= X\left(\frac{1}{2}[(b_0 - a_0)\xi + b_0 + a_0]\right); & \beta &= \frac{b_0 - a_0}{d_0 - c_0}; & \gamma &= \frac{a_0 + b_0 + c_0 + d_0}{d_0 - c_0}, \\
\Psi_0(\xi) &= \Psi\left(\frac{1}{2}[(d_0 - c_0)\xi + d_0 + c_0]\right); & \delta &= \frac{a_0 + b_0 + c_0 + d_0}{b_0 - a_0} \\
g_0(\xi) &= \pi g\left(\frac{1}{2}[(d_0 - c_0)\xi + d_0 + c_0]\right); & f_0(\xi) &= \pi f\left(\frac{1}{2}[(b_0 - a_0)\xi + b_0 + a_0]\right); \\
K(\xi, \eta) &= \frac{d_0 - c_0}{\sqrt{2}[(d_0 - c_0)\eta + d_0 + c_0]} \left\{ \frac{1}{2}[(d_0 - c_0)\xi + d_0 + c_0] \right\}^{\alpha/\pi - 1/2}.
\end{aligned}$$

Преобразуем также условия на трещинах (1.14) и условие равновесия стрингера (1.12). Условия (1.14) в случае одной трещины $L=(a, b)$ сводятся к следующему одному условию:

$$\int_a^b \varphi_0(r_0) dr_0 = 0.$$

которое в новых обозначениях имеет вид:

$$\int_{-1}^1 \frac{X_0(\eta) d\eta}{\sqrt{\beta_0 + \eta}} = 0 \quad \left(\beta_0 = \frac{b_0 + a_0}{b_0 - a_0} \right). \quad (1.18)$$

Вполне аналогичным образом условие (1.12) преобразуется к виду

$$\int_{-1}^1 \frac{\Psi_0(\eta) d\eta}{\sqrt{\gamma_0 + \eta}} = S_0; \quad (1.19)$$

$$S_0 = \pi \sqrt{\frac{2}{d_0 - c_0}} \left(\frac{T_d^0}{\alpha} + \frac{T_c^0}{\alpha} + T_+^0 \right); \quad \gamma_0 = \frac{d_0 + c_0}{d_0 - c_0}; \quad T_+ = \frac{1}{G} \int_c^d \tau_+(r_0) dr_0.$$

Таким образом, окончательно, решение описанной выше задачи о взаимодействии концентраторов напряжений типа стрингеров и трещин с упругим клином при антиплоской деформации и при симметрическом нагружении сводится к решению определяющей системы из двух СИУ (1.17) при условиях (1.18)-(1.19).

2. Решение определяющей системы СИУ (1.17)-(1.19). Решение этой системы построим известным численно-аналитическим методом решения СИУ [20,21], основанном на применении квадратурных формул Гаусса по чебышевским узлам для вычисления сингулярных, с ядром Коши и со слабой особенностью типа сигнум-функции, и обычных интегралов. Нетрудно проверить, что обе искомые функции системы СИУ (1.17) имеют корневую особенность на концах интервала интегрирования, следовательно, их можно представить в виде:

$$X_0(\eta) = \frac{\Phi_0(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}; \quad \Psi_0(\eta) = \frac{\Psi_0(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} \quad (-1 < \eta < 1), \quad (2.1)$$

где $\Phi_0(\eta)$ и $\Psi_0(\eta)$ - гельдеровские функции на отрезке $[-1, 1]$.

Далее, следуя известной процедуре [20,21], (1.17) сведем к следующей, пока неполной, системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{n} \sum_{m=1}^n \frac{\Phi_0(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} - \frac{\pi}{n} \sum_{m=1}^n \frac{\Psi_0(\eta_m)}{(\eta_m + \beta \xi_k + \gamma)} [1 - R(\eta_m, -\beta \xi_k - \gamma)] &= -f_0(\xi_k) \\ \frac{\pi}{n} \sum_{m=1}^n \frac{\Phi_0(\eta_m)}{\eta_m + \xi_k / \beta + \delta} \left[1 - R\left(\eta_m, -\frac{\xi_k}{\beta} - \delta\right) \right] - & \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.2) \\ - \sum_{m=1}^n \left[\frac{\pi}{n} \frac{1}{\eta_m - \xi_n} - \lambda \alpha K(\xi_k, \eta_m) Q(\xi_k, \eta_m) \right] \Psi_0(\eta_m) &= g_0(\xi_k). \end{aligned}$$

Здесь n - любое натуральное число,

$$\eta_m = \cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2n}\right) \quad (m = \overline{1, n}); \quad \xi_k = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right) \quad (k = \overline{1, n-1})$$

чебышевские узлы, т.е. корни многочленов Чебышева первого рода $T_n(\eta)$ и второго рода $U_{n-1}(\xi)$ соответственно,

$$\begin{aligned} R(\eta_j, z) &= \frac{1}{U_{n-1}(\eta_j)} \left[U_{n-1}(z) - \text{sign}(z) \frac{T_n(z)}{\sqrt{z^2 - 1}} \right], \\ Q(\xi, \eta_i) &= \frac{2}{n} \left[-\arcsin \xi + 2\sqrt{1 - \xi^2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{T_m(\eta_i) U_{m-1}(\xi)}{m} \right]. \end{aligned}$$

Применив квадратурные формулы Гаусса и к условиям (1.18) и (1.19):

$$\frac{\pi}{n} \sum_{m=1}^n \frac{\Phi_0(\eta_m)}{\sqrt{\eta_m + \beta_0}} = 0; \quad \frac{\pi}{n} \sum_{m=1}^n \frac{\Psi_0(\eta_m)}{\sqrt{\eta_m + \gamma_0}} = S_0. \quad (2.3)$$

и добавив их к уравнениям (2.2), получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно $2n$ коэффициентов $\Phi_0(\eta_m)$ и $\Psi_0(\eta_m)$.

После решения СЛАУ (2.2)-(2.3), регулярные функции в (2.1) можно представить в виде интерполяционных многочленов Лагранжа:

$$\begin{aligned} \Phi_0(y) &= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \Phi_0(\eta_m) \left[1 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} T_j(\eta_m) T_j(y) \right] \\ \Psi_0(y) &= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \Psi_0(\eta_m) \left[1 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} T_j(\eta_m) T_j(y) \right] \quad (-1 < y < 1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Итак, решение определяющей системы СИУ (1.17)-(1.19) будет

$$\begin{aligned}
X_0(y) &= \frac{\Phi_0(y)}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \Phi_0(\eta_m) \left[1 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} T_j(\eta_m) T_j(y) \right] \\
\Psi_0(y) &= \frac{\Psi_0(y)}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \Psi_0(\eta_m) \left[1 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} T_j(\eta_m) T_j(y) \right]
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Очевидно, что при помощи последних формул, используя введенные ранее обозначения в обратном порядке, можно получить истинные контактные напряжения под стрингером и дислокацию берегов трещины.

Имея представление (2.5), можно вычислить коэффициенты интенсивности напряжений в концах трещины, коэффициенты концентрации контактных напряжений у концов стрингера, а также форму полуоткрытия трещины (смещение точек одного из берегов трещины в направлении оси Oz).

При помощи стандартной процедуры определения коэффициентов интенсивности напряжений [22, 23] найдем:

$$\begin{aligned}
K_{III}(a) &= GK_{III}^{(0)}(a), & K_{III}^{(0)}(a) &= \sqrt{\frac{2a}{d-c}} \sqrt{2\alpha \frac{b_0 - a_0}{a_0}} \Phi_0(-1) \\
K_{III}(b) &= GK_{III}^{(0)}(b), & K_{III}^{(0)}(b) &= -\sqrt{\frac{2b}{d-c}} \sqrt{2\alpha \frac{b_0 - a_0}{b_0}} \Phi_0(1)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Безразмерные коэффициенты концентрации контактных напряжений определим как:

$$K_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_0(-1), \quad K_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_0(1) \tag{2.6}$$

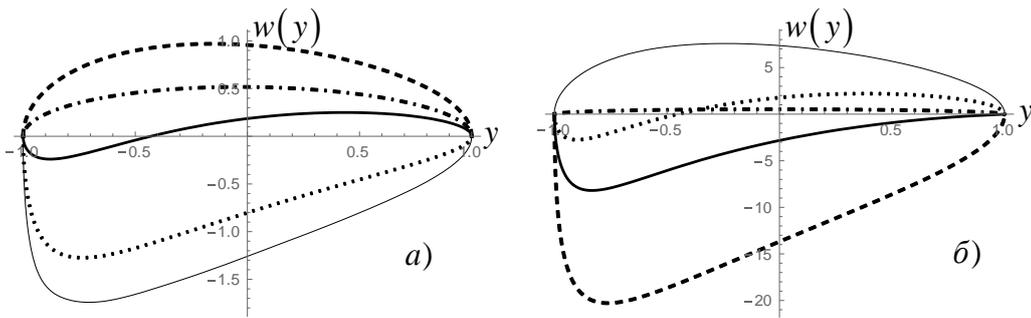
Для определения формы полуоткрытия трещины воспользуемся квадратурной формулой [21]:

$$\begin{aligned}
w(y) &= \frac{\alpha(b_0 - a_0)}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_0(\eta_i)}{\sqrt{(b_0 - a_0)\eta_i + b_0 + a_0}} \times \\
&\times \left[\arcsin y + \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{1-y^2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{T_m(\eta_i) U_{m-1}(y)}{m} \right]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Таким образом, основные искомые механические характеристики могут быть рассчитаны при помощи формул (2.4)-(2.7)

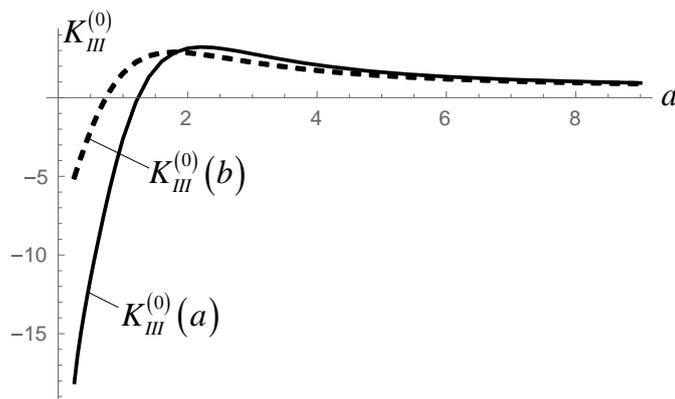
Численный анализ. Проведен численный анализ поставленной задачи, когда на средней линии клина имеется одна трещина. Учитывая многопараметровость задачи, значения некоторых параметров были приняты неизменными. Так, ширина и толщина ленточных стрингеров и их расположение относительно вершины клина, отношение модулей сдвига материалов клина G и стрингера G_0 , а также ширина сквозной трещины считались постоянными и имели следующие значения: $d - c = 2, h = 0.05, c = 1, G/G_0 = 0.01, b - a = 1$. В качестве внешней нагрузки взяты равномерно распределенные нагрузки единичной плотности, приложенные к

свободной грани стрингеров и к берегам трещины, такие, что обеспечивают условия продольного сдвига. Изменяемыми параметрами будут половина угла раствора клина α и расстояние левого конца трещины от вершины клина a . Все линейные величины, считаем отнесенными к полуширине стрингера $(d - c) / 2$.



Фиг. 2 Формы полуоткрытия трещины при $\alpha = \pi/3$ (фиг. *a*) и $\alpha = \pi/4$ (фиг. *б*).

На Фиг.2 приведены кривые, описывающие форму полуоткрытия трещины, понимаемого в смысле взаимного проскальзывания берегов трещины в направлении оси Oz , при различных местоположениях трещины относительно стрингеров, т.е. при разных значениях параметра $a = 0.25, 0.5, 1, 2, 15$, когда $\alpha = \pi/3$, соответственно сплошная тонкая, пунктирная, сплошная жирная, штриховая, штрихпунктирная линии на рисунке *a*), и при $a = 0.5, 1, 1.25, 2, 25$, когда $\alpha = \pi/4$, соответственно штриховая, сплошная жирная, пунктирная, сплошная тонкая, штрихпунктирная линии на рисунке *б*).



Фиг. 3 Кривые зависимости КИН от параметра a при $\alpha = \pi/3$.

Как видно из Фиг.2 расстояние трещины от вершины клина, при наличии стрингеров, достаточно сильно влияет на деформированное состояние вокруг

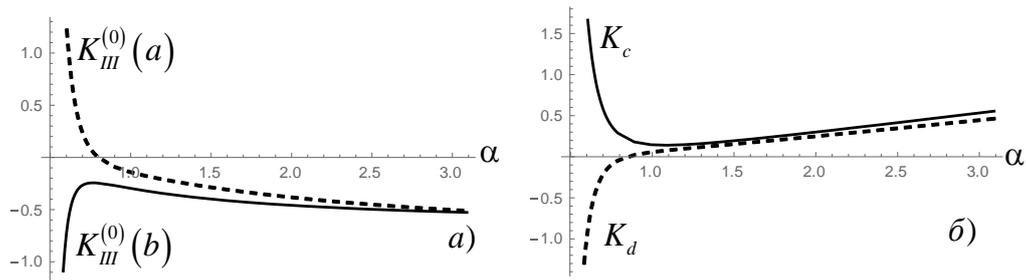
трещины. Чтобы выявить влияние только расстояния, был проведен аналогичный численный анализ при отсутствии стрингеров, который показал, что с увеличением расстояния асимметричная, более высокая у ближнего к вершине клина конца, кривая, оставаясь положительной, стремится к симметричной кривой, похожей на штрихпунктирные линии на Фиг.2. Изменение направления раскрытия есть результат исключительно наличия стрингеров и действующих на них внешних сил.

На Фиг.3 представлены кривые изменения КИН $K_{III}^{(0)}(a)$ и $K_{III}^{(0)}(b)$ при возрастании расстояния a между трещиной и вершиной клина.

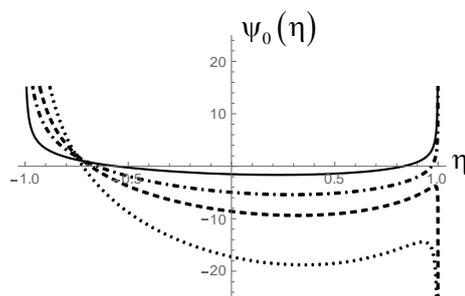
Согласно численному анализу, влияние трещины на распределение контактных напряжений под стрингерами практически несущественно и сказывается лишь при нахождении трещины между стрингерами, близко к вершине клина.

Перейдем к исследованию зависимости величин, определяемых формулами (2.4)-(2.7), от половины угла раствора клина α при фиксированном местоположении трещины $a = 1.5$.

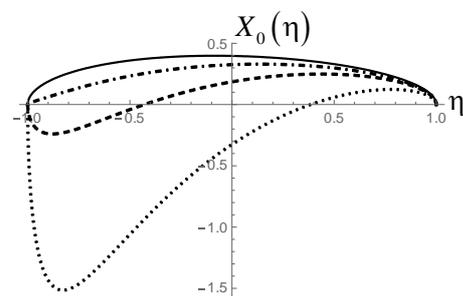
Как видно из Фиг.4, наибольшее влияние величины угла раствора клина наблюдается при малых углах, при $\alpha > \frac{\pi}{4}$, т.е. когда рассматриваемый клин занимает область, большую, чем четверть-плоскость, влияние изменения угла α существенно ослабевает.



Фиг. 4 Кривые зависимости коэффициентов $K_{III}^{(0)}(a), K_{III}^{(0)}(b), K_c, K_d$ от угла α .



Фиг. 5. Контактные напряжения



Фиг. 6. Полуоткрытие трещины

На Фиг.5 представлены кривые функции $\psi_0(\eta)$, описывающей контактные напряжения под стрингером, а на Фиг.6 – кривые функции $X_0(\eta)$, описывающей форму полураскрытия трещины, для четырех значений угла α : $\alpha = 7\pi/24$ - пунктирная линия, $\alpha = \pi/3$ - штриховая линия, $\alpha = 3\pi/8$ - штрихпунктирная линия, $\alpha = \pi/2$ - сплошная линия.

Выбор значений угла α также продиктован тем, что при малых значениях его влияние настолько большое, что графики для разных малых значений сильно разнятся и их совмещение на одном рисунке становится не результативным, а при бо́льших значениях графики очень близки друг к другу и их иллюстрация также мало результативна.

3. Заключение. В задаче антиплоского деформирования упругого клина, усиленного по граням ленточными стрингерами конечной ширины и малой толщины, которые расположены симметрично относительно биссектрисы угла раствора клина на некотором расстоянии от вершины клина, и содержащего трещину на линии симметрии, исследовано взаимовлияние этих двух видов концентраторов напряжений. Численный анализ показал, что влияние трещины на распределение контактных напряжений под стрингером очень незначительное и проявляется только при достаточном малом угле раствора клина и близком ее расположении к вершине трещины. Приведенные в виде графиков численные результаты, полученные при конкретных значениях входных параметров, могут послужить подсказкой о возможном поведении напряжений в опасных зонах при проектировании конструкций, узлы которых, в той или иной мере, можно смоделировать рассмотренной задачей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. – Ingr. Arch., 1932, Bd. 3, No2, S. 123–129.
2. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. – Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, v. 8, N 2, pp 164–178.
3. Муки Р. Стернберг Е. Передача нагрузки от краевого ребра жесткости к листу (пересмотр задачи Мелана). – Прикл. мех. Труды амер. общ. инж. – мех., сер. Е, 1967, т. 34, №3, стр. 233–242.
4. Alblas J.B., Kaupers W.J.J. On the diffusion of load from a stiffener into an infinite wedge-shaped plate. – Appl. Scientific Res. sect. A, 1965–1966, v. 15, №6, pp 429–439.
5. Bufler H. Zur Krafteinleitung in Scheiben über geschweißte oder geklebte Verbindungen. – Österr. Ing. – Arch., 1964, Bd. 18, N 3–4, S. 284–292.
6. Bufler H. Schiebe mit endlicher elastischer Versteilung. – VDI-Forschungsheft 485, Ausgabe B. 1961, Bd. 27, №3–4, S. 5–44.
7. Муки Р. Стернберг Е. Передача нагрузки от растягивающего поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. Прикл. мех. Труды амер. общ. инж. – мех., сер. Е, 1968, т. 35, №4, стр. 124–135.
8. Нуллер Б.М. Контактная задача для упругого клина, подкрепленного стержнем равного сопротивления. – ДАН СССР, 1975, т. 225, №3, стр. 532–534.

9. Нуллер Б.М. Упругий клин, подкрепленный на конечном участке стержнем переменного сечения. – Изв. АН СССР. МТТ, 1972, №5, стр. 98–100.
10. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982, 344 с.
11. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983, 488 с.
12. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. – ПММ, 1968, т. 32, вып. 4, стр. 632–646.
13. Механика контактных взаимодействий. Под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001, 670с.
14. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван, Из.-во «Гитутюн» НАН РА, 2014, 322с.
15. Greif R., Sanders J.L. The effect of a stringer on the stress in a cracked sheet. Journal of Applied Mechanics. 1965, vol.32, N1, pp. 59–66.
16. Matczynski M. Elastic wedges with discontinuous boundary conditions. Archiwum Mechaniki Stosowanej, 1963, 15, 833-855.
17. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968, 402 с.
18. Бейтмен Г., Эрдейи А и др. Таблицы интегральных преобразований. Т.1, М.: Наука, 1989, 344 с.
19. Партон В.З. Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981, 688с.
20. Erdogan F., Gupta G.D. Cook T.S. The Numerical Solutions of Singular Integral Equations. Methods of Analysis a Solution of Crack Problems, pp 368–425, Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
21. Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A. Quadrature formulas for integrals with a weak singularity in the kernel and a weight function of Jacobi polynomials with complex exponents. In Book: Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. Book series Advanced Structured Materials (STRUCTMAT, volume 185), Editors: H.Altенbach, S.Mkhitaryan, V.Nakobyan, A.Sahakyan.
22. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наукова думка, 1976, 443 с.
23. Саврук М.П. Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие в 4-х томах. Т.2 Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев, Наукова думка, 1988, 620 с.

Сведения об авторах:

Григорян Марине Самвеловна - Институт механики НАН РА,
Национальный университет архитектуры и строительства Армении
Тел.: +374 91 639758 **E-mail:** marinegrigoryan17@gmail.com

Саакян Аветик Вараздатович – д.ф.м.н., в.н.с. Института механики НАН РА
Тел.: +374 94 579348 **E-mail:** avetik.sahakyan@sci.am

Поступила в редакцию 18.11.2023.