

**О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В СМЕШАННОЙ 3D КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ
ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ**

Агаловян Л.А., Япуджян В.Т.

Ключевые слова: ортотропная пластинка, трехмерная задача, асимптотическое решение, пограничный слой.

Aghalovyan L.A., Yapujyan V.T.
On the Boundary Layer in Mixed 3D Boundary Problem of an Orthotropic Plate

Keywords: orthotropic plate, three-dimensional problem, asymptotic solution, boundary layer.

The boundary layer is studying in a mixed 3D boundary problem of the orthotropic plate. It is shown that the values of the boundary layer decrease exponentially with distance from the lateral surface into the interior of the plate. The asymptotic method shows that the boundary layer splits into plane and anti-plane boundary layers, which are independent in the initial approximation. The corresponding equations for determining the corresponding components of the stress tensor and the displacement vector are derived. Characteristic equations for determining the values of the exponential decreasing index are derived. The procedure for conjugating the solutions of the external problem and the boundary layer is described.

Աղալովյան Լ.Ա., Յափուջյան Վ.Տ.
Օրթոտրոպ սալի 3D խառը եզրային խնդրում սահմանային շերտի մասին

Հիմնաբառեր՝ օրթոտրոպ սալ, եռաչափ խնդիր, ասիմպտոտիկ լուծում, սահմանային շերտ:

Օրթոտրոպ սալի 3D խառը եզրային խնդրում ուսումնասիրվում է սահմանային շերտը: Ցույց է տրված, որ սահմանային շերտի մեծությունները սալի կողմնային մակերևույթից դեպի խորքը հետանալիս նվազում են էքսպոնենցիալ ձևով: Ասիմպտոտիկ եղանակով ցույց է տրված, որ սահմանային շերտը տրոհվում է հարթ և հակահարթ սահմանային շերտերի, որոնք էլակետային մոտավորության դեպքում անկախ են: Լարումների թեկնգործի և տեղափոխության վեկտորի համապատասխան բաղադրիչների որոշման համար դուրս են բերված համապատասխան հավասարումներ: Էքսպոնենցիալ նվազման ցուցչի արժեքների որոշման համար ստացված են բնութագրիչ հավասարումներ: Շարադրված է արտաքին խնդրի և սահմանային շերտի լուծումների լծորդման ընթացակարգը:

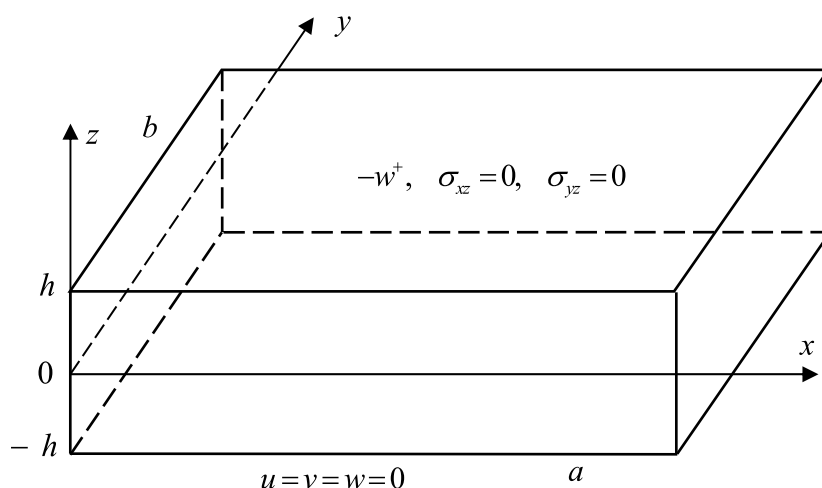
Изучается пограничный слой в смешанной 3D задаче ортотропной пластинки. Показано, что величины пограничного слоя экспоненциально убывают при удалении от боковой поверхности во внутрь пластинки. Асимптотическим методом показано, что пограничный слой распадается на плоский и антиплоский пограничные слои, которые в исходном приближении независимы. Выведены соответствующие уравнения для определения соответствующих компонент тензора напряжений и вектора перемещения. Выведены характеристические уравнения для определения значений показателя экспоненциального убывания. Изложена процедура сопряжения решений внешней задачи и пограничного слоя.

Введение. В классической и уточненных теориях пластин и оболочек рассматривается лишь один класс краевых задач. Считается, что на лицевых поверхностях пластинки или оболочки заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений [1,2,3]. Для решения иных классов задач теории упругости, в частности, второй и смешанной, гипотезы этих теорий неприменимы. Асимптотический метод

решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений оказался эффективным для решения подобных задач. Установлена принципиально новая асимптотика, позволившая решить статические и динамические задачи подобных типов [4-7]. Решение задачи (I) складывается из двух типов решений: внешнего решения (I^{out}) и решения для пограничного слоя (I_b). Решение внешней статической задачи для ортотропной пластинки, когда на верхней лицевой поверхности заданы значения нормального перемещения, соответствующие тангенциальные компоненты тензора напряжений равны нулю, а нижняя грань пластинки жестко закреплена, найдено в [8]. В данной работе построено решение для пограничного слоя, изложена процедура сопряжения решений внешней задачи и пограничного слоя.

1. Основные уравнения и постановка задачи

Требуется найти решение уравнений равновесия теории упругости для ортотропной прямоугольной пластинки, занимающая область $D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h, h \ll l, l = \min(a, b)\}$ (Фиг. 1):



Фиг. 1

$$\frac{\partial \sigma_{jx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{jy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{jz}}{\partial z} + F_j(x, y, z) = 0, \quad j = x, y, z, \quad (1.1)$$

при соотношениях упругости

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz}; & \varepsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz}; \\ \varepsilon_{zz} &= a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz}; & \varepsilon_{xy} &= a_{66}\sigma_{xy}; & \varepsilon_{xz} &= a_{55}\sigma_{xz}; & \varepsilon_{yz} &= a_{44}\sigma_{yz}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

и при граничных условиях

$$\begin{aligned}
w &= -w^+(x, y); \quad \sigma_{xz} = 0; \quad \sigma_{yz} = 0, \quad \text{при } z = h, \\
u &= 0; \quad v = 0; \quad w = 0, \quad \text{при } z = -h,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Условия на баковых поверхностях пластинки будем конкретизировать позже.

2. Решение внешней задачи

Для решения поставленной задачи в уравнениях (1.1) и (1.2) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям:

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \eta = \frac{y}{l}; \quad \zeta = \frac{z}{h}; \quad U = \frac{u}{l}; \quad V = \frac{v}{l}; \quad W = \frac{w}{l}. \tag{2.1}$$

В результате получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему [8], решение которой складывается из решений внешней задачи (I^{out}) и пограничного слоя (I_b)

$$I = I^{out} + I_b. \tag{2.2}$$

Решение внешней задачи отыскивается в виде

$$I^{out} = \varepsilon^{q_i+s} I^{(s)}, \quad s = \overline{0, N}, \tag{2.3}$$

где $q_i = -1$ для $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$, $q_i = 0$ для U, V, W , $s = \overline{0, N}$ означает суммирование по целочисленным значениям s от нуля до числа приближений N . Подставив (2.3) в преобразованную систему уравнений равновесия и соотношения упругости, и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при ε , получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{jx}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{jz}^{(s)}}{\partial \zeta} + F_j^{(s)} &= 0, \quad F_j^{(0)} = \frac{h^2}{l} F_j, \quad F_j^{(s)} = 0, \quad s \neq 0; \\
\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} &= a_{11} \sigma_{xx}^{(s)} + a_{12} \sigma_{yy}^{(s)} + a_{13} \sigma_{zz}^{(s)}; \quad \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} = a_{12} \sigma_{xx}^{(s)} + a_{22} \sigma_{yy}^{(s)} + a_{23} \sigma_{zz}^{(s)}; \\
\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{13} \sigma_{xx}^{(s)} + a_{23} \sigma_{yy}^{(s)} + a_{33} \sigma_{zz}^{(s)}; \quad \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} = a_{66} \sigma_{xy}^{(s)}; \\
\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{55} \sigma_{xz}^{(s)}; \quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{44} \sigma_{yz}^{(s)}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Из системы (2.4) можно напряжения выразить через перемещения:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{(s)} &= \frac{1}{a_{66}} \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right); \quad \sigma_{xx}^{(s)} = \alpha_1 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - \alpha_2 \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} + \alpha_3 \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}; \\
\sigma_{xz}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}} \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} \right); \quad \sigma_{yy}^{(s)} = -\alpha_2 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + \alpha_4 \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} - \alpha_5 \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta};
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yz}^{(s)} &= \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} \right); \quad \sigma_{zz}^{(s)} = \alpha_3 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - \alpha_5 \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} + \alpha_6 \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}; \\ \alpha_1 &= \frac{(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)}{\Delta}; \quad \alpha_2 = \frac{(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23})}{\Delta}; \quad \alpha_3 = \frac{(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{\Delta}; \quad \alpha_4 = \frac{(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)}{\Delta}; \\ \alpha_5 &= \frac{(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})}{\Delta}; \quad \alpha_6 = \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{\Delta}.\end{aligned}$$

Подставив значения $\sigma_{jz}^{(s)}$ в уравнения равновесия (2.4), для определения перемещений получаются уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} &= R_U^{(s)}, \quad R_U^{(s)} = -a_{55} F_x^{(s)} - a_{55} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(s-1)}}{\partial \xi} - a_{55} \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}; \\ \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} &= R_V^{(s)}, \quad R_V^{(s)} = -a_{44} F_y^{(s)} - a_{44} \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial \xi} - a_{44} \frac{\partial \sigma_{yy}^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}; \\ \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \zeta^2} &= R_w^{(s)}, \quad R_w^{(s)} = -\frac{1}{\alpha_6} F_z^{(s)} - \frac{1}{\alpha_6} \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\alpha_6} \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{\alpha_3}{\alpha_6} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\alpha_5}{\alpha_6} \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}.\end{aligned} \quad (2.6)$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}U^{(s)} &= \int_0^\zeta d\zeta \int_0^\zeta R_U^{(s)} d\zeta + \zeta A_1^{(s)}(\xi, \eta) + A_2^{(s)}(\xi, \eta); \quad V^{(s)} = \int_0^\zeta d\zeta \int_0^\zeta R_V^{(s)} d\zeta + \\ &+ \zeta B_1^{(s)}(\xi, \eta) + B_2^{(s)}(\xi, \eta); \quad W^{(s)} = \int_0^\zeta d\zeta \int_0^\zeta R_w^{(s)} d\zeta + \zeta C_1^{(s)}(\xi, \eta) + C_2^{(s)}(\xi, \eta);\end{aligned} \quad (2.7)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.3), определим неизвестные функции $A_i^{(s)}$, $B_i^{(s)}$, $C_i^{(s)}$ в решении (2.7):

$$\begin{aligned}A_1^{(s)} &= -\left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=1} - \int_0^1 R_U^{(s)} d\zeta; \quad A_2^{(s)} = -\int_0^{-1} d\zeta \int_0^\zeta R_U^{(s)} d\zeta - \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=1} - \int_0^1 R_U^{(s)} d\zeta; \\ B_1^{(s)} &= -\left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} \right)_{\zeta=1} - \int_0^1 R_V^{(s)} d\zeta; \quad B_2^{(s)} = -\int_0^{-1} d\zeta \int_0^\zeta R_V^{(s)} d\zeta - \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} \right)_{\zeta=1} - \int_0^1 R_V^{(s)} d\zeta; \\ C_1^{(s)} &= -\frac{1}{2} \left(w^{+(s)} + \int_0^1 d\zeta \int_0^\zeta R_w^{(s)} d\zeta - \int_0^{-1} d\zeta \int_0^\zeta R_w^{(s)} d\zeta \right), \quad w^{+(0)} = w^+/l, \quad w^{+(s)} = 0, s \neq 0; \\ C_2^{(s)} &= -\frac{1}{2} \left(w^{+(s)} + \int_0^1 d\zeta \int_0^\zeta R_w^{(s)} d\zeta + \int_0^{-1} d\zeta \int_0^\zeta R_w^{(s)} d\zeta \right).\end{aligned} \quad (2.8)$$

Если функция w^+ является алгебраическим многочленом, итерация обрывается, в результате получаем математически точное решение во внешней задаче. Однако это решение, как правило, не будет удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности пластинки. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя.

3. О пограничном слое пластинки

Рассмотрим пограничный слой, который возникает у боковой поверхности $\xi = 0$ ($x = 0$). Аналогичным образом можно построить решение пограничного слоя, возникающего при остальных боковых поверхностях. Для построения решения пограничного слоя вблизи боковой поверхности $\xi = 0$, в уравнениях равновесия и соотношениях упругости, преобразованных формулой (2.1), введем новую замену переменной $\gamma = \xi/\varepsilon$, в результате получим систему:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xzb}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_{xyb}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xzb}}{\partial \zeta} &= 0; & \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xyb}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_{yyb}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{yzb}}{\partial \zeta} &= 0; \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xzb}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_{yzb}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zzb}}{\partial \zeta} &= 0; & \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_b}{\partial \gamma} &= a_{11} \sigma_{xzb} + a_{12} \sigma_{yyb} + a_{13} \sigma_{zzb}; \\ \frac{\partial V_b}{\partial \eta} &= a_{12} \sigma_{xzb} + a_{22} \sigma_{yyb} + a_{23} \sigma_{zzb}; & \varepsilon^{-1} \frac{\partial W_b}{\partial \zeta} &= a_{13} \sigma_{xzb} + a_{23} \sigma_{yyb} + a_{33} \sigma_{zzb}; \\ \frac{\partial U_b}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V_b}{\partial \gamma} &= a_{66} \sigma_{xyb}; & \varepsilon^{-1} \frac{\partial W_b}{\partial \gamma} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_b}{\partial \zeta} &= a_{55} \sigma_{xzb}; & \frac{\partial W_b}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V_b}{\partial \zeta} &= a_{44} \sigma_{yzb}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поскольку неоднородные граничные условия (1.3) уже удовлетворены, напряжения и перемещения пограничного слоя (им приписан индекс $\ll b \gg$ (boundary)) должны удовлетворять соответствующим однородным (нулевым) граничным условиям:

$$\begin{aligned} W_b(\zeta=1) &= 0; & \sigma_{xzb}(\zeta=1) &= 0; & \sigma_{yzb}(\zeta=1) &= 0; \\ U_b(\zeta=-1) &= 0; & V_b(\zeta=-1) &= 0; & W_b(\zeta=-1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Величины пограничного слоя, при удалении от поверхности $\xi = 0$ в глубину пластинки должны стремительно убывать. Учитывая это, решение для пограничного слоя будем искать в виде:

$$I_b = \varepsilon^{q_i+s} I_b^{(s)}(\eta, \zeta) \exp(-\lambda\gamma), \quad s = \overline{0, N}, \quad (3.3)$$

где $q_i = -1$ для $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$, $q_i = 0$ для U, V, W , $\text{Re } \lambda > 0$.

Подставив (3.3) в систему (3.1) для определения неизвестных коэффициентов $I_b^{(s)}$, получим систему

$$-\lambda \sigma_{xzb}^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{xyb}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xzb}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0; \quad -\lambda \sigma_{xyb}^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{yyb}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{yzb}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0;$$

$$\begin{aligned}
-\lambda\sigma_{xzb}^{(s)} + \frac{\partial\sigma_{yzb}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{zzb}^{(s)}}{\partial\zeta} &= 0; \quad -\lambda U_b^{(s)} = a_{11}\sigma_{xxb}^{(s)} + a_{12}\sigma_{yyb}^{(s)} + a_{13}\sigma_{zzb}^{(s)}; \\
\frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial\eta} &= a_{12}\sigma_{xxb}^{(s)} + a_{22}\sigma_{yyb}^{(s)} + a_{23}\sigma_{zzb}^{(s)}; \quad \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{13}\sigma_{xxb}^{(s)} + a_{23}\sigma_{yyb}^{(s)} + a_{33}\sigma_{zzb}^{(s)}; \\
\frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial\eta} - \lambda V_b^{(s)} &= a_{66}\sigma_{xyb}^{(s)}; \quad -\lambda W_b^{(s)} + \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{55}\sigma_{xzb}^{(s)}; \quad \frac{\partial W_b^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V_b^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{44}\sigma_{yzb}^{(s)}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Из этой системы напряжения можно выразить через перемещения по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_{xxb}^{(s)} &= -\alpha_1\lambda U_b^{(s)} - \alpha_2\frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial\eta} + \alpha_3\frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta}; \quad \sigma_{yyb}^{(s)} = \alpha_2\lambda U_b^{(s)} + \alpha_4\frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial\eta} - \alpha_5\frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta}; \\
\sigma_{zzb}^{(s)} &= -\alpha_3\lambda U_b^{(s)} - \alpha_5\frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial\eta} + \alpha_6\frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta}; \quad \sigma_{xyb}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left(\frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial\eta} - \lambda V_b^{(s)}\right); \\
\sigma_{xzb}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}}\left(-\lambda W_b^{(s)} + \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial\zeta}\right); \quad \sigma_{yzb}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}}\left(\frac{\partial W_b^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V_b^{(s)}}{\partial\zeta}\right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Подставив значения $\sigma_{xxb}^{(s)}$, $\sigma_{xzb}^{(s)}$, $\sigma_{zzb}^{(s)}$ в первое и третье уравнения системы (3.4), для определения $U_b^{(s)}$, $W_b^{(s)}$, получим систему:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_b^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \alpha_1 a_{55} \lambda^2 U_b^{(s)} - a_{55} \lambda \left(\alpha_3 + \frac{1}{a_{55}} \right) \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta} &= R_{Ub}^{(s-1)}; \\
\frac{\partial^2 W_b^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \frac{\lambda^2}{a_{55} \alpha_6} W_b^{(s)} - \frac{\lambda}{\alpha_6} \left(\alpha_3 + \frac{1}{a_{55}} \right) \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial\zeta} &= R_{Wb}^{(s-1)}; \\
R_{Ub}^{(s-1)} &= -a_{55} \left(\alpha_2 \lambda \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial \sigma_{xyb}^{(s-1)}}{\partial\eta} \right); \quad R_{Wb}^{(s-1)} = -\frac{1}{\alpha_6} \left(\frac{\partial \sigma_{yzb}^{(s-1)}}{\partial\eta} - \alpha_5 \frac{\partial^2 V_b^{(s-1)}}{\partial\eta \partial\zeta} \right).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Подставив значения $\sigma_{xyb}^{(s)}$, $\sigma_{yzb}^{(s)}$ во второе уравнение (3.4), для определения $V_b^{(s)}$, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 V_b^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \frac{a_{44} \lambda^2}{a_{66}} V_b^{(s)} = R_{Vb}^{(s-1)}, \quad R_{Vb}^{(s-1)} = -a_{44} \left(-\frac{\lambda}{a_{66}} \frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial \sigma_{yyb}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{1}{a_{44}} \frac{\partial^2 W_b^{(s-1)}}{\partial\eta \partial\zeta} \right). \tag{3.7}$$

Систему (3.6) можно записать в виде:

$$l_1 U_b^{(s)} + l_2 W_b^{(s)} = R_{Ub}^{(s-1)}; \quad l_4 U_b^{(s)} + l_3 W_b^{(s)} = R_{Wb}^{(s-1)}; \tag{3.8}$$

$$l_1 = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \alpha_1 a_{55} \lambda^2; \quad l_2 = -a_{55} \lambda \left(\alpha_3 + \frac{1}{a_{55}} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta}; \quad l_3 = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\lambda^2}{a_{55} \alpha_6}; \quad l_4 = -\frac{\lambda}{\alpha_6} \left(\alpha_3 + \frac{1}{a_{55}} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Из (3.8), по обычной процедуре, исключив $W_b^{(s)}$, для определения $U_b^{(s)}$ получим уравнение:

$$(l_1 l_3 - l_2 l_4) U_b^{(s)} = \Psi_{Ub}^{(s-1)}, \quad \Psi_{Ub}^{(s-1)} = l_3 R_{Ub}^{(s-1)} - l_2 R_{Wb}^{(s-1)}. \quad (3.9)$$

После определения $U_b^{(s)}$, из системы (3.8) $W_b^{(s)}$ можно выразить через $U_b^{(s)}$ по формуле:

$$W_b^{(s)} = -\frac{\alpha_6 f_1}{\lambda^3} \frac{\partial^3 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^3} - \frac{f_2}{\lambda} \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\alpha_6 f_1}{\lambda^3} \frac{\partial R_{Ub}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \frac{a_{55} \alpha_6}{\lambda^2} R_{Wb}^{(s-1)}, \quad (3.10)$$

$$f_1 = \frac{a_{55}}{\alpha_3 a_{55} + 1}; \quad f_2 = \frac{a_{55} (\alpha_1 \alpha_6 f_1^2 - 1)}{f_1}.$$

Уравнение (3.9), используя значения операторов l_i , запишется в виде:

$$\frac{\partial^4 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^4} + \lambda^2 \left(\alpha_1 a_{55} - \frac{\alpha_3}{\alpha_6} (\alpha_3 a_{55} + 2) \right) \frac{\partial^2 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\alpha_1 \lambda^4}{\alpha_6} U_b^{(s)} = \Psi_{Ub}^{(s-1)}. \quad (3.11)$$

Решением (3.11) является

$$U_b^{(s)} = U_{b0}^{(s)} + U_{bu}^{(s)}, \quad (3.12)$$

где $U_{b0}^{(s)}$ решение однородного уравнения, а $U_{bu}^{(s)}$ частное решение уравнения (3.11).

Характеристическое уравнение однородного обыкновенного дифференциального уравнения, соответствующего (3.11), имеет вид:

$$k^4 + \lambda^2 \left(\alpha_1 a_{55} - \frac{\alpha_3}{\alpha_6} (\alpha_3 a_{55} + 2) \right) k^2 + \frac{\alpha_1 \lambda^4}{\alpha_6} = 0. \quad (3.13)$$

Обозначив $k^2 = t$ и решив уравнение (3.13), получим

$$t_{1,2} = \frac{\lambda^2}{2} \left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q} \right), \quad p = \alpha_1 a_{55} - \frac{\alpha_3}{\alpha_6} (\alpha_3 a_{55} + 2), \quad q = \frac{\alpha_1}{\alpha_6} > 0. \quad (3.14)$$

Возможны случаи:

a) $p^2 - 4q > 0$, но $p < 0$, тогда

$$t_1 > 0; \quad t_2 > 0; \quad k_{1,2} = \pm \sqrt{t_1}; \quad k_{3,4} = \pm \sqrt{t_2}, \quad (3.15)$$

b) $p^2 - 4q > 0$, $p > 0$, тогда

$$t_1 < 0; \quad t_2 < 0; \quad k_{1,2} = \pm\sqrt{-t_1}i; \quad k_{3,4} = \pm\sqrt{-t_2}i, \quad (3.16)$$

с) $p^2 - 4q < 0$, тогда

$$t_1 = \frac{\lambda^2}{2}(-p + i\sqrt{4q - p^2}); \quad t_2 = \frac{\lambda^2}{2}(-p - i\sqrt{4q - p^2}); \quad (3.17)$$

$$k_{1,2} = \pm\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\sqrt{-p + i\sqrt{4q - p^2}}; \quad k_{3,4} = \pm\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\sqrt{-p - i\sqrt{4q - p^2}}.$$

Следовательно, в случае а) будем иметь

$$U_b^{(s)} = A_{1U}^{(s)}(\eta)chk_1\zeta + A_{2U}^{(s)}(\eta)shk_1\zeta + A_{3U}^{(s)}(\eta)chk_3\zeta + A_{4U}^{(s)}(\eta)shk_3\zeta + U_{bu}^{(s-1)}, \quad (3.18)$$

в случае б)

$$U_b^{(s)} = B_{1U}^{(s)}(\eta)\cos\delta_1\zeta + B_{2U}^{(s)}(\eta)\sin\delta_1\zeta + B_{3U}^{(s)}(\eta)\cos\delta_2\zeta + B_{4U}^{(s)}(\eta)\sin\delta_2\zeta + U_{bu}^{(s-1)}; \quad (3.19)$$

$$\delta_1 = \sqrt{-t_1}; \quad \delta_2 = \sqrt{-t_2},$$

в случае с)

$$U_b^{(s)} = C_{1U}^{(s)}(\eta)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}}b_1\zeta ch\frac{\lambda}{\sqrt{2}}a_1\zeta + C_{2U}^{(s)}(\eta)\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}b_1\zeta sh\frac{\lambda}{\sqrt{2}}a_1\zeta + \quad (3.20)$$

$$+ C_{3U}^{(s)}(\eta)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}}b_1\zeta sh\frac{\lambda}{\sqrt{2}}a_1\zeta + C_{4U}^{(s)}(\eta)\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}b_1\zeta ch\frac{\lambda}{\sqrt{2}}a_1\zeta + U_{bu}^{(s-1)};$$

$$\sqrt{-p + i\sqrt{4q - p^2}} = a_1 + b_1i; \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\sqrt{q} - p}; \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\sqrt{q} + p}.$$

При $s = 0$ $U_{bu}^{(0)} = 0$. В случае а) по формулам (3.5), (3.10) и (3.18) определив $U_b^{(0)}, W_b^{(0)}, \sigma_{xzb}^{(0)}$ и удовлетворив граничным условиям (3.2) относительно U_b, W_b, σ_{xzb} , получим однородную алгебраическую систему относительно $A_{iU}^{(0)}$:

$$\frac{1}{\lambda}\left(k_1g_1A_{1U}^{(0)}shk_1 + k_1g_1A_{2U}^{(0)}chk_1 + k_3g_2A_{3U}^{(0)}shk_3 + k_3g_2A_{4U}^{(0)}chk_3\right) = 0;$$

$$k_1(g_1 + 1)A_{1U}^{(0)}shk_1 + k_1(g_1 + 1)A_{2U}^{(0)}chk_1 + k_3(g_2 + 1)A_{3U}^{(0)}shk_3 +$$

$$+ k_3(g_2 + 1)A_{4U}^{(0)}chk_3 = 0; \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{\lambda}\left(k_1g_1A_{1U}^{(0)}shk_1 - k_1g_1A_{2U}^{(0)}chk_1 + k_3g_2A_{3U}^{(0)}shk_3 - k_3g_2A_{4U}^{(0)}chk_3\right) = 0;$$

$$A_{1U}^{(0)}chk_1 - A_{2U}^{(0)}shk_1 + A_{3U}^{(0)}chk_3 - A_{4U}^{(0)}shk_3 = 0;$$

$$g_1 = \frac{\alpha_6 f_1}{\lambda^2} k_1^2 + f_2; \quad g_2 = \frac{\alpha_6 f_1}{\lambda^2} k_3^2 + f_2.$$

Эта система будет иметь ненулевое решение, если ее определитель равен нулю. В результате имеем трансцендентное уравнение

$$k_1^2 k_3 \frac{(g_1 - g_2)}{2\lambda^2} (g_1 (sh(2k_1 + k_3) + sh(2k_1 - k_3)) - g_2 (sh(2k_3 + k_1) + sh(2k_3 - k_1))) = 0. \quad (3.22)$$

Из трансцендентного уравнения (3.22) определяется λ . Это трансцендентное уравнение имеет счетное множество комплексных корней:

$$\lambda_n = \lambda_{1n} + \lambda_{2n} i. \quad (3.23)$$

Нас будут интересовать корни с реальной частью $\lambda_{1n} > 0$, ибо лишь тогда будем иметь быстро затухающее решение при удалении от торцов $\xi = 0$ вовнутрь пластинки.

Если λ_n является корнем уравнения (3.22), то $\overline{\lambda_n}$ тоже является корнем. Это позволяет окончательное решение представить в виде, куда входят лишь вещественные величины.

Из однородной системы (3.21) все функции $A_{iU}^{(0)}$ можно выразить через одну, например через $A_{4U}^{(0)}$. Тогда

$$A_{1U}^{(0)} = \frac{k_3 g_2 ch k_3}{k_1 g_1 sh k_1} A_{4U}^{(0)}; \quad A_{2U}^{(0)} = -\frac{k_3 g_2 ch k_3}{k_1 g_1 ch k_1} A_{4U}^{(0)}; \quad A_{3U}^{(0)} = cth k_3 A_{4U}^{(0)}. \quad (3.24)$$

Следовательно, будем иметь:

$$U_b^{(0)} = \left(\frac{k_3 g_2 ch k_3}{k_1 g_1 sh k_1} ch k_1 \zeta - \frac{k_3 g_2 ch k_3}{k_1 g_1 ch k_1} sh k_1 \zeta + cth k_3 ch k_3 \zeta + sh k_3 \zeta \right) A_{4U}^{(0)} = \overline{U}_b^{(0)}(\zeta) A_{4U}^{(0)}. \quad (3.25)$$

Обозначим

$$A_{4U}^{(0)} = \frac{1}{2} (A_{4U1}^{(0)} - i A_{4U2}^{(0)}), \quad (3.26)$$

тогда формула (3.25) представится в виде:

$$U_b^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\text{Re} \overline{U}_b^{(0)} + i \text{Im} \overline{U}_b^{(0)} \right) (A_{4U1}^{(0)} - i A_{4U2}^{(0)}). \quad (3.27)$$

Поскольку каждому решению (3.27) соответствует сопряженное решение, окончательно будем иметь:

$$U_b^{(0)} = \text{Re} \overline{U}_b^{(0)} A_{4U1}^{(0)} + \text{Im} \overline{U}_b^{(0)} A_{4U2}^{(0)}, \quad (3.28)$$

а для произвольного λ_n имеем решение:

$$U_{bn}^{(0)} = \operatorname{Re} \bar{U}_{bn}^{(0)} A_{4U1n}^{(0)} + \operatorname{Im} \bar{U}_{bn}^{(0)} A_{4U2n}^{(0)}. \quad (3.29)$$

где считается, что по повторяющемуся индексу n происходит суммирование по всем значениям, соответствующим значениям λ_n корней уравнения (3.22).

Используя (3.10), (3.18), (3.24) для $W_b^{(0)}$ получим

$$W_b^{(0)} = -\frac{k_3 g_2}{\lambda} \left(\frac{chk_3}{shk_1} shk_1 \zeta - \frac{chk_3}{chk_1} chk_1 \zeta + cthk_3 shk_3 \zeta + chk_3 \zeta \right) A_{4U}^{(0)} = \bar{W}_b^{(0)}(\zeta) A_{4U}^{(0)}. \quad (3.30)$$

По примеру $U_{bn}^{(0)}$, для $W_{bn}^{(0)}$ получим

$$W_{bn}^{(0)} = \operatorname{Re} \bar{W}_{bn}^{(0)} A_{4U1n}^{(0)} + \operatorname{Im} \bar{W}_{bn}^{(0)} A_{4U2n}^{(0)}. \quad (3.31)$$

Аналогичный вид имеют напряжения $\sigma_{xxbn}^{(0)}$, $\sigma_{xzbn}^{(0)}$, $\sigma_{zzbn}^{(0)}$.

Подобным образом рассматриваются случаи, соответствующие вариантам $b), c)$.

Решением уравнения (3.7) будет

$$V_b^{(s)} = A_{1V}^{(s)} \cos \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \zeta + A_{2V}^{(s)} \sin \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \zeta + V_{bq}^{(s-1)}. \quad (3.32)$$

Удовлетворив условиям (3.2) относительно σ_{yzb} , V_b , при $s = 0$, получим однородную алгебраическую систему относительно $A_{1V}^{(0)}$, $A_{2V}^{(0)}$:

$$A_{1V}^{(0)} \sin \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} - A_{2V}^{(0)} \cos \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} = 0; \quad A_{1V}^{(0)} \cos \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} - A_{2V}^{(0)} \sin \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} = 0. \quad (3.33)$$

Эта система имеет ненулевое решение, если

$$\cos 2\lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} = 0, \quad (3.34)$$

т.е.

$$\lambda_n = \frac{(1+2n)\pi}{4} \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}}. \quad (3.35)$$

Поэтому из системы (3.33) будет следовать

$$A_{1Vn}^{(0)} = \operatorname{tg} \frac{(1+2n)\pi}{4} A_{2Vn}^{(0)} = (-1)^n A_{2Vn}^{(0)}. \quad (3.36)$$

В итоге имеем

$$V_{bn}^{(0)} = \left((-1)^n \cos \frac{(1+2n)\pi}{4} \zeta + \sin \frac{(1+2n)\pi}{4} \zeta \right) A_{2Vn}^{(0)}. \quad (3.37)$$

Таким образом, при $s = 0$ мы получили две независимые системы, которым соответствуют две группы независимых значений λ_n , определяемые из уравнений (3.22) и (3.34). При $s > 0$ соответствующие системы (3.6), (3.7) становятся неоднородными и зависимыми. Поэтому, с позиций 3D задачи мы должны рассмотреть эти системы, когда λ_n есть корень уравнения (3.22) (обозначим λ_n^p) и λ_n корень уравнения (3.34) (обозначим λ_n^a). Таким образом мы будем иметь два типа решений: $I_b^{p(s)}$ и $I_b^{a(s)}$. При $s = 0$ $V_b^{p(0)}, \sigma_{yzb}^{p(0)} \equiv 0$, $U_b^{a(0)}, W_b^{a(0)} \equiv 0$. Следовательно общее решение будет иметь вид:

$$I^{(s)} = I^{out(s)} + I_b^{p(s)} + I_b^{a(s)}. \quad (3.38)$$

Решение (3.38) содержит необходимое число произвольных постоянных чтобы удовлетворить граничным условиям пространственной задачи на боковой поверхности $\xi = 0$.

Пусть боковая поверхность пластинки $\xi = 0$ жестко закреплена:

$$U(\xi=0) = 0; \quad V(\xi=0) = 0; \quad W(\xi=0) = 0. \quad (3.39)$$

В случае a), удовлетворив граничным условиям (3.39) относительно U, W , значения которых рассчитываются по формуле (3.38), без учета объемных сил будем иметь

$$\operatorname{Re} \bar{U}_{bn}^{(0)} A_{4U1n}^{(0)} + \operatorname{Im} \bar{U}_{bn}^{(0)} A_{4U2n}^{(0)} = 0; \quad -\frac{w^+}{2l} (\zeta + 1) + \operatorname{Re} \bar{W}_{bn}^{(0)} A_{4U1n}^{(0)} + \operatorname{Im} \bar{W}_{bn}^{(0)} A_{4U2n}^{(0)} = 0, \quad (3.40)$$

а относительно V :

$$\left((-1)^n \cos \frac{(1+2n)\pi}{4} \zeta + \sin \frac{(1+2n)\pi}{4} \zeta \right) A_{2Vn}^{(0)} = 0. \quad (3.41)$$

Из системы (3.40) значения постоянных $A_{4U1n}^{(0)}, A_{4U2n}^{(0)}$ можно определить лишь приближенно. Обычно используется метод коллокаций (совпадений). Выбирается некоторое количество точек торца, т.е. задаются значения их координат ζ , в результате получается система алгебраических уравнений и по формуле Крамера вычисляются значения постоянных $A_{4Uin}^{(0)}$. В зависимости от количества выбранных точек коллокаций, выбирается и количество корней λ_n трансцендентного уравнения (3.22). Аналогичным образом определяются значения постоянных $A_{2Vn}^{(0)}$.

При $s > 0$ системы (3.21), (3.33) становятся неоднородными. Это будет означать, что $U_b^{a(s)} \neq 0, W_b^{a(s)} \neq 0, V_b^{p(s)} \neq 0$, в результате плоский пограничный слой будет сопровождаться антиплоским пограничным слоем и наоборот.

Если в (3.21) вместо λ_n подставить значения (3.35), т.е. значения λ_n антиплоского погранслоя, то соответствующий определитель системы (3.21) при $s > 0$ будет отличным от нуля. Значения постоянных $A_{iU}^{(s)}$ также будут отличны от нуля. Это означает, что плоский основной погранслоем будет сопровождаться плоским погранслоем с показателем экспоненциального убывания антиплоского погранслоя. Аналогично, антиплоскому погранслою будет сопровождать антиплоский погранслоем с показателем плоского погранслоя. Величины сопровождающих пограничных слоёв порядком меньше от соответствующих величин основных погранслоёв.

В реальных расчетах обычно ограничиваются исходным приближением плоского и антиплоского пограничных слоёв.

Изложенная выше процедура сопряжения решений внешней задачи и пограничного слоя при условиях (3.39) остается в силе и при других пространственных граничных условиях при $\xi = 0$ (свободный край, шарнир и др.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. (1967) Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 266 с.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510 с.
3. Амбарцумян С.А. (1974) Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. Физматлит. 448 с.
4. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела // Межвуз. сб. Механика. Изд ЕГУ. 1982. Вып. 2. С. 7-12.
5. Агаловян Л.А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера: 13-ая Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Таллин. 1983. Часть первая (А-В). – С. 13-18.
6. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит. 1997. 414с.
7. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин. // Изв. Вузов. Северо-Кавказ. Регион. Естеств. Наук. 2000. №3. С. 8-11.
8. Япуджян В.Т. Об одной смешанной 3D задаче теории упругости для ортотропной пластинки. // Доклады НАН РА. Т.123. №2. 2023. С. 31-37.

Сведения об авторах

Агаловян Ленсер Абгарович – академик НАН РА, докт. физ.-мат. наук, зав. отделом Института механики НАН РА. Тел.: (+37410) 529630. E-mail: lagal@sci.am

Япуджян Варужан Тигранович – млад. науч. сотр. Института механики НАН РА
Тел.: (+37444) 990250. E-mail: varujan.yapujyan@mail.ru

Поступила в редакцию 28.09.2023