ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 76, №3, 2023 Механика
УДК 539.3 **DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.3-47**

СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ УМЕРЕННЫХ РАЗМЕРОВ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ, СЖАТОЙ ПО ПОТОКУ ГАЗА

Мартиросян С. Р.

Ключевые слова: прямоугольная пластинка, первоначальные сжимающие силы, сверхзвуковое обтекание, аэроупругая устойчивость, сосредоточенные инерционные массы и моменты, аналитический метод решения

Martirosyan S.R.

Supersonic flutter of a rectangular plate of moderated sizes with a free edge compressed by a gas flow

Key words: rectangular plate, the initial compressive forces, supersonic overrunning, aeroelastic stability, concentrated inertial masses and moments, analytical solution method

In the article, in a linear formulation, the influence of the initial compressive forces in the middle surface of a moderately sized rectangular elastic plate with one free edge on the stability of the unperturbed state of equilibrium of the "plate-flow" system is studied under the assumption that the compressive forces are directed along the gas flow running on the free edge of the plate, on which there are concentrated inertial masses and moments. An analytical solution of the stability problem is obtained. It is shown that the initial compressive forces lead to a decrease in the stability of the “plate–flow” system.

Մարտիրոսյան Ս.Ռ.

Գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ սեղմված մեկ ազատ եզրով ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին

Հիմնաբառեր՝ ուղղանկյուն սալ, առաձգական կայունություն, գերձայնային շրջհոսում, նախնական սեղմող ուժեր, իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, անալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է ուղղանկյուն առաձգական սալի եզրերին նախապես կիրարված սեղմող ուժերի ազդեցությունը «սալ–հոսք» համակարգի չխոտորված հավասարակշռության վիճակի կայունության վրա, երբ սեղմող ուժերը ուղղված են գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ, որը վրավազք է կատարում սալի ազատ եզրին: Ենթադրվում է նաև, որ սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: Գնահատված է սեղմող ուժերի ապակայունացման ազդեցությունը համակարգի վրա:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначальных сжимающих сил в срединной поверхности прямоугольной упругой пластинки умеренных размеров с одним свободным краем на устойчивость невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка–поток» в предположении, что сжимающие силы направлены по потоку газа, набегающим на свободный край пластинки, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты. Получено аналитическое решение задачи устойчивости. Показано, что первоначальные сжимающие силы приводят к понижению устойчивости системы “пластинка–поток”.

Введение. Рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение [1, 2]. Исследованию этих задач посвящено большое количество работ, обзор которых, в частности, содержится в монографиях [1– 4]. Теоретические исследования позволяют выявить различные виды потери устойчивости динамической системы «пластинка–поток», обусловленные характером деформаций: локализованная дивергенция, дивергенция панели (эйлерова и не эйлерова), панельный флаттер. А также, позволяют дать оценку влиянию комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им.

В предлагаемой статье исследуется влияние первоначальных сжимающих сил на устойчивость невозмущённого состояния равновесия линейной динамической системы «пластинка–поток» в предположении, что обтекаемая сверхзвуковым потоком газа прямоугольная пластинка умеренных размеров с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями первоначально сжата силами, направленными по потоку газа, набегающим на её свободный край, при наличии на нём сосредоточенных инерционных масс и моментов поворота.

Получено аналитическое решение задачи устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка-поток» с помощью алгоритма, изложенного в [11].

Установлено, что в этом случае, как и в случае панели с ненагруженными краями [11], а также с краями, нагруженными растягивающими усилиями [14], при малых значениях параметра отношения ширины пластинки (сторона пластинки по потоку) к её длине система теряет устойчивость в виде дивергенции панели (эйлеровой и не эйлеровой) и в виде панельного флаттера; а при больших значениях – теряет лишь только статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели или локализованной дивергенции.

Определены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости [9]. При переходе через «опасные» границы происходит потеря прочности и возникновение усталостных трещин в материале пластинки [1, 2].

Дана точная оценка влиянию первоначальных сжимающих сил на устойчивость невозмущённого состояния равновесия системы в зависимости от её «существенных» параметров и от относительной толщины пластинки. Показано, что сжимающие силы, направленные по потоку газа, приводят к существенному понижению устойчивости системы «пластинка-поток» по сравнению с сжимающими силами, направленными перпендикулярно скорости потока [16]: имеет место не только падение значений критических скоростей и коэффициента напряжения, но и смещение границы между областями дивергенции панели и локализованной дивергенции в направлении больших значений параметра отношения сторон.

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

Предлагаемая статья является продолжением работы [15] и входит в цикл работ, посвящённых исследованию влияния первоначальных растягивающих и сжимающих сил на устойчивость невозмущённого состояния равновесия линейной динамической системы «пластинка–поток», в частности, [13–16].

Результаты работы могут быть использованы при обработке данных экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$, $ab^{-1} \in (0.193; 2.9)$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа принимается плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x = 0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 7].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию сжимающих сил $N_x = 2h\sigma_x$, равномерно распределённых по краям $x = 0$ и $x = a$ пластинки; сжимающие усилия σ_x предполагаются постоянными во всей срединной поверхности пластинки и неменяющимися с изменением её прогиба $w = w(x, y, t)$ [1, 2].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызывает избыточное давление δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой $\delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$ «поршневой теории», где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [6]. Будем полагать, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$.

Дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности сжатой прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории», а также, малости интенсивности $m\,\partial^2 w/\partial t^2$ распределённой массы пластинки m в сравнении с интенсивностями $m_c\,\partial^2 w/\partial t^2$ и $I_c\,\partial^2 w/\partial t^2$, учитываемых в граничных условиях, будет описываться соотношением [1, 2, 7, 8]:

$$D\Delta^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x, y, t); \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1, 2, 7]:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \tag{1.2}$$

$$D\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+N_x\frac{\partial w}{\partial x}=-m_c\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\quad \text{при } x=0\,;$$

$$w=0\,,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\quad \text{при}\ \ x=a\,; \tag{1.3}$$

$$w=0\,,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0\quad \text{при } y=0 \text{ и } y=b\,; \tag{1.4}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа – в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V\in(a_0M_0,a_0M_{2\cos m.})\,,\ M_0=\sqrt{2}\,,\ M_{2\cos m.}\approx 33.85\,; \tag{1.5}$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) в предположении, что

$$\sigma_x<(\sigma_x)_{cr.}\,, \tag{1.6}$$

$(\sigma_x)_{cr.}$ – критические значения сжимающих усилий, которые могут произвести «выпучивание» упругой поверхности пластинки в отсутствии обтекания $(V=0)$.

Анализ устойчивости невозмущённого движения системы (1.1) – (1.4) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) – (1.4) для прогиба $w(x,y,t)$ в интервале (1.5) при условии (1.6).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.4) будем исследовать в случае прямоугольных пластинок умеренной размерности [1, 2, 11,14]:

$$\gamma=ab^{-1}\in\left(0.193, 2.9\right), \tag{1.7}$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b.

Заметим, что согласно обозначению (1.7) значениям $\gamma=0$ и $\gamma=\infty$ соответствуют два предельных случая прямоугольной пластинки, соответственно, бесконечно удлинённая пластинка и полубесконечная пластина–полоса.

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.4). Сведём задачу устойчивости (1.1) – (1.4) к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде гармонических колебаний [1,2,11]:

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp(\mu_n rx+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y)\,,\ \mu_n=\pi nb^{-1}, \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое движение системы (1.1) – (1.4) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\,\lambda<0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\,\lambda>0$) [1, 2, 10]. Критическая скорость потока газа V_{cr}, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\mathrm{Re}\,\lambda = 0$) [1, 2, 10].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» [12]:

$$r^4 - 2\cdot(1-\beta_x^2)\cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + 1 = 0\,, \tag{2.2}$$

корни $r_{1,2} \in R$ и $r_{3,4} \in W$ которого описываются соотношениями:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1+\beta_x^2)}\,,\ r_1 < 0\,,\ r_2 < 0\,; \tag{2.3}$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1+\beta_x^2)}\,,\ q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right).$$

Здесь, α_n^3 – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3} \in (a_0^2\rho_0 M_0 D^{-1}\mu_n^{-3},\ a_0^2\rho_0 M_{2\cos m.} D^{-1}\mu_n^{-3})\,, \tag{2.4}$$

в силу условия (1.5) и обозначения (2.4);

β_x^2 – коэффициент напряжения, характеризующий консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2\cdot N_x\, D^{-1}\mu_n^{-2} = h\sigma_x D^{-1}\mu_n^{-2} < (\beta_x^2)_{cr.}\ \text{(табл.1)}; \tag{2.5}$$

$q = q\left(V\right) \in R$ – единственный действительный корень кубического уравнения

$$8\cdot(q+1-\beta_x^2)(q^2-1) - \alpha_n^6 = 0\,; \tag{2.6}$$

$$q = q\left(V\right) \in \left(q_0,\ q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right),\ q_0 = \left(\beta_x^2 - 1) + 2\sqrt{(\beta_x^2-1)^2 + 3}\right)\Big/3\ \text{(табл. 2)}. \tag{2.7}$$

Таблица 1.

γ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.2	0.9392	0.8108	0.7589	0.6804	0.540
0.3	1.0178	0.8839	0.8293	0.7459	0.6040
0.5	1.2447	1.0869	1.0215	0.6391	0.5122
0.8	1.4541	1.2744	1.1993	1.0835	0.8828
1.0	1.4039	1.2497	1.1829	1.0774	0.8887
2.0	1.3681	1.2189	1.1550	1.0547	0.8749
≥ 2.9	1.3672	1.2188	1.1550	1.0547	0.8750

В таблице 1 приведены критические значения коэффициента напряжения: $(\beta_x^2)_{cr} = (\beta_x^2)_{cr}\left(n, \gamma, \nu\right)$ – решения дисперсионного уравнения исходной задачи устойчивости в отсутствии обтекания $\left(V = 0\right)$ при $n = 1$ и $m_c = 0, I_c = 0$, найденные с точностью до порядка 10^{-4} в [12].

Таблица 2.

β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
q_0	1	1.001	1.005	1.012	1.022	1.035	1.052	1.072

Тогда, в соответствии с выражениями (2.3), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда:

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4}C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y)\,. \tag{2.8}$$

Подставляя выражение (2.4) в кубическое уравнение (2.6), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q)=2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)}\pi^3 n^3\gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}\,,\gamma\in\left(0.193,2.9\right), \tag{2.9}$$

позволяющую по известному значению параметра $q=q\left(n,\gamma,\beta_x^2,\nu\right)$ определить приведённую скорость потока газа $V\left(q\right)\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$.

Учитывая условия (1.5), из выражения (2.9) согласно формуле цилиндрической жёсткости $D=E\cdot(2h)^3\Big/\Big(12\left(1-\nu^2\right)\Big)$ следует, что

$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)\in(V(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3),a_0M_{2\cos m}\Psi)\subseteq(a_0M_0,a_0M_{2\cos m.})\Psi$,

когда $V(q_0)\geq a_0M_0$;

$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)\in(a_0M_0,a_0M_{2\cos m.})\Psi$, когда $V(q_0)<a_0M_0$;

$$\Psi=12(1-\nu^2)a_0\rho_0E^{-1}(2ha^{-1})^{-3},\ M_0=\sqrt{2},\ M_{2\cos m.}\approx 33.85\,. \tag{2.10}$$

Таблица 3.

$2ha^{-1}$ \ ν	0.125	0.3	0.5
0,006	(54.81, 1311.78)	(50.52, 1208.98)	(41.63, 996.35)
0,007	(34.45, 811.07)	(32.00, 753.37)	(26.15, 615.52)
0,008	(23.12, 544.34)	(21.48, 505.62)	(17,55, 413.10)
0,009	(16.22, 381.76)	(15.06, 354.59)	(12.31, 289.71)
0.010	(11.84, 283.45)	(10.91, 261.25)	(8.99, 215.32)
0.012	(6.85, 164.01)	(6.32, 151.20)	(5.20, 124.60)
0,013	(5,39, 126.87)	(5.01, 117.84)	(4.09, 96.28)
0,014	(4.31, 101.46)	(4.00, 94.24)	(3.27, 76.99)
0.015	(3.51, 84.04)	(3.23, 77.33)	(2.67, 63.81)

Подставляя значения относительной толщины пластинки $2ha^{-1}\in\left[0.006,\,0.015\right]$ в выражения (2.10) получаем интервалы $d\left(2ha^{-1},\nu\right)=(a_0M_0,\,a_0M_{2\cos m})\Psi$

допустимых значений приведённой скорости $VD^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5) для стальных пластинок (табл. 3) [13–15].

3. Достаточный признак потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4). Подставляя общее решение (2.8) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.3), в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель, описывается биквадратным уравнением относительно собственного значения λ [15]:

$$\chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + \left(\chi_n A_1 + \delta_n A_2\right)\lambda^2 + A_3 = 0 \ , \qquad (3.1)$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}, \ \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1}, \ \delta_n > 0 \, , \ \chi_n > 0 \, , \qquad (3.2)$$

δ_n и γ_n – приведённые значения сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки;

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2) = \qquad (3.3)$$

$$= \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\left(1 - \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot \pi n\gamma\right) B_1 B_2 -$$

$$-2B_2\left(q+1-\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1}\right)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot \pi n\gamma) sh(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2) -$$

$$-2B_1\left(q+1-\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1}\right)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot \pi n\gamma) ch(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2) \, ;$$

$$A_1 = A_1(q, n, \gamma, \beta_x^2) = \qquad (3.4)$$

$$= 2(q+1-\beta_x^2)\Big[(q - \sqrt{q^2-1}) + (q + \sqrt{q^2-1})\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma\Big] B_1 B_2 +$$

$$+2B_2\Big[\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)}\cdot\left(q+1-\beta_x^2 + \sqrt{(q^2-1}\right) sh(\pi n\gamma B_1) +$$

$$+2B_1((2q-1)(q+1) - q\beta_x^2)\, ch(\pi n\gamma B_1)\Big]\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma) +$$

$$+2\Big[B_1\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)}\left(q+1-\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1}\right) ch(\pi n\gamma B_1) +$$

$$+(q+1-\beta_x^2)(q-1-q\beta_x^2) sh(\pi n\gamma B_1)\Big]\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma) \, ;$$

$$A_2 = A_2(q, n, \gamma, \beta_x^2) = \qquad (3.5)$$

$$= 2(q+1-\beta_x^2)\left(1 + \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\right) B_1 B_2 -$$

$$-4(q+1-\beta_x^2)B_1B_2ch(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)+$$
$$+2(3(q^2-1)+2\beta_x^2-\beta_x^4)sh(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma);$$
$$A_3 = A_3(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2) = \tag{3.6}$$
$$=\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2-\right.$$
$$\left.-2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)\right\}B_1B_2-\sqrt{2\left(q+1-\beta_x^2\right)}\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-\right.$$
$$\left.-\left(1-\nu\right)^2-2\beta_x^2\left(q+\sqrt{q^2-1}\right)\right\}B_1B_2\ \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma+$$
$$+\ 2B_2\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\left\{\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1}-\right.\right.$$
$$-(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)-(2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1}-2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2-$$
$$\left.-2((2q-1)(\mathrm{q}+1)-q\sqrt{q^2-1}-q\beta_x^2)\nu+\ (\mathrm{q}+1-\beta_x^2+\sqrt{q^2-1})\,\nu^2\right]sh(\pi n\gamma B_1)+$$
$$\left.+2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)}(q+1-\beta_x^2)\,B_1ch\left(\pi n\gamma B_1\right)\right\}\cdot\cos(\pi n\gamma B_2)+$$
$$+2\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\left\{-B_1\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1}+\right.\right.$$
$$+(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)+(2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1}-2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2+$$
$$\left.+\ 2((2q-1)(\mathrm{q}+1)+q\sqrt{q^2-1}-q\beta_x^2)\nu-(\mathrm{q}+1-\beta_x^2-\sqrt{q^2-1})\,\nu^2\right]ch(\pi n\gamma B_1)-$$
$$\left.-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)\left(q^2-1\right)}(3(q^2-1)+2\beta_x^2-\beta_x^4)\cdot sh\left(\pi n\gamma B_1\right)\right\}\sin\left(\pi n\gamma B_2\right);$$
$$B_1=\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1+\beta_x^2)},\ \ B_2=\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1+\beta_x^2)}. \tag{3.7}$$

При допустимых значениях коэффициента напряжения $\beta_x^2<(\beta_x^2)_{cr.}$ (табл. 1), когда $q=q(V)\in\left(q_0,\ q\left(a_0M_{2\cos m.}\right)\right)$ (табл. 2), имеем [15]:

$$B_1=B_1(q,\beta_x^2)>0\,,\ B_2=B_2(q,\beta_x^2)>0\,, \tag{3.8}$$

откуда следует справедливость неравенств

$$A_0=A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2)>0\,, A_2=A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2)>0\,,\ n\geq 1,\ \gamma\in\left(0{,}193, 2.9\right). \tag{3.9}$$

Вводя обозначение

$$k_n=\chi_n\cdot\delta_n^{-1}=I_c\left(\pi n\gamma\right)^2\cdot\left(m_ca^2\right)^{-1}, \tag{3.10}$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.9), перепишется в виде

$$\lambda^4+(k_nA_1+A_2)\chi_n^{-1}A_0^{-1}\lambda^2+\chi_n^{-1}\delta_n^{-1}A_0^{-1}A_3=0\,,\ \delta_n>0\,,\ \chi_n>0\,,\ k_n>0\,. \tag{3.11}$$

Заметим, что непосредственной подстановкой $\beta_x^2 = 0$ в уравнение (3.11) можно убедиться в его тождественности уравнению, полученному в работе [11].

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.4) сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.11), определяющего собственные движения системы "пластинка–поток" в пространстве «существенных» параметров $\Im = \left\{q(V), n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n\right\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическое поведение возмущённого движения. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

Заметим, что уравнения (3.11) отличается от характеристических определителей, соответствующих задаче устойчивости системы при наличии первоначальных сил растяжения, знаком коэффициента β_x^2 [14].

4. **Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости.** Как и в работах [13–16], введём в рассмотрение в пространстве параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\Im_0\left(k_n A_1 + A_2 > 0, A_3 > 0, \Delta > 0\right)$ и области неустойчивости: $\Im_1\left(A_3 < 0, \Delta > 0\right)$, $\Im_2\left(k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 > 0, \Delta > 0\right)$ и $\Im_3\left(A_3 > 0, \Delta < 0\right)$.Здесь Δ – дискриминант биквадратного уравнения (3.11): $\Delta = \Delta(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4k_n A_0 A_3$.

В области устойчивости $\Im_0$ уравнение (3.11) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$: прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния; в области $\Im_1$ – имеет два действительных корня $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ и два чисто мнимых $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$, что характеризует эйлерову дивергенцию панели либо локализованную дивергенцию в зависимости от значений параметра $\gamma = ab^{-1}$; в области $\Im_2$ – имеет два отрицательных ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) и два положительных ($\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$) корня, что характеризует более ярко выраженную дивергенцию панели – не эйлерову дивергенцию. А в области $\Im_3$, по крайней мере, два корня уравнения (3.11) являются комплексно сопряжёнными числами с положительной вещественной частью: имеет место панельный флаттер.

Границами области устойчивости $\Im_0$ системы в пространстве её параметров $\Im$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ являются гиперповерхности $A_3 = 0$ и $\Delta = 0$ – определяющие условия апериодической и колебательной неустойчивости соответственно [9, 10]. Переходы ($\Im_0 \to \Im_3$) и ($\Im_2 \to \Im_3$) определяют «опасные границы» областей $\Im_0$ и $\Im_2$ [9].

На границе $A_3 = 0$ области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ система «пластинка-поток» при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели. Критические скорости $\{V_{cr.div}\}$, определяемые подстановкой первого и третьего корней уравнения $A_3 = 0$ в формулу (2.9), разграничивают области $\Im_0$ и $\Im_1$. При скоростях $V \geq V_{cr.div.}$ потока газа происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к эйлеровой дивергенции панели. Это приводит к возникновению дополнительных напряжений, приводящих к изменению плоской формы равновесия: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Критические скорости не эйлеровой дивергенции $\{V_{1,2}\}$ разграничивают области $\Im_1$ и $\Im_2$. При скоростях потока газа $V \geq V_{1,2}$ происходит “мягкий” переход из области $\Im_1$ в область $\Im_2$. Критические скорости $V_{1,2}$ определяются подстановкой второго корня уравнения $A_3 = 0$ в формулу (2.9) при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$ и $\Delta > 0$.

На границе $\Delta = 0$ области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, а так же, области $\Im_2$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, система при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl}$ теряет, соответственно, устойчивость в виде колебательной неустойчивости или переходит из состояния статической неустойчивости в состояние колебательной неустойчивости: имеет место панельный флаттер. Критические скорости панельного флаттера $\{V_{cr.fl.}\}$, определяемые подстановкой первого корня уравнения $\Delta = 0$ в формулу (2.9), разграничивают области $\Im_0$ и $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, или области $\Im_2$ и $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, в зависимости от значений параметров системы $n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n$. В обоих случаях при $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к флаттерным колебаниям – к колебаниям по нарастающей амплитуде. Однако, в первом случае начинает совершать флаттерные колебания относительно равновесного состояния плоская по форме пластинка, а во втором случае – «выпученная» (изогнутая по форме) пластинка. Критические скорости эйлеровой $V_{cr.div.}$ и не эйлеровой $V_{1,2}$ дивергенции панели и панельного флаттера $V_{cr.fl.}$ определяются с достаточной точностью подстановкой в формулу (2.9) искомых значений параметра $q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$.

5. **Численные результаты**. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых

$\{q(n,\gamma,\nu,\beta_x^2,k_n)\} \in \Im$, параметризованных надлежащим образом в $\Im$. В таблицах 4 – 12 проиллюстрированы численные результаты наиболее представительных из этого семейства кривых.

Численные расчеты показали, что при фиксированных значениях остальных параметров системы критические скорости дивергенции и флаттера являются монотонно возрастающими функциями от числа полуволн n: их наименьшему значению соответствует $n=1$.

Несмотря на зависимость качественных и количественных характеристик поведения возмущённого движения системы от параметра $\gamma \in (0.193, 2.9)$, тем не менее, можно выделить интервалы $(0.193, 0.33)$, $[0.33, 0.74)$ и $[0.74, 2.9)$, в которых качественные характеристики, примерно, одинаковы, в отличие от количественных характеристик, существенно зависящих от γ. Для наглядной иллюстрации динамики системы составлены цепочки переходов из области $\Im_l \subset \Im$ в область $\Im_k \subset \Im$, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5) [13–16].

Следует отметить существенную зависимость форм представления цепочек переходов от относительной толщины $2ha^{-1}$ и материала пластинок.

5.1. Из сопоставления численных результатов с данными таблицы 3 следует, что для стальных пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$ в интервале $\gamma \in (0.193, 0.33)$ невозмущённое состояние равновесия системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.5) неустойчиво при всех $\beta_x^2 < \left(\beta_x^2\right)_{cr.}$: имеет место эйлерова дивергенция панели (область $\Im_1$).

Цепочки переходов состояний системы будут вида:

$$\Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}} \Im_1 \text{ при } k_1 \in (0, 0.07); \tag{5.1}$$

$$\Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.fl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}} \Im_1 \text{ при } k_1 \in [0.07, 0.5);$$

$$\Im_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \Im_2 \xrightarrow{V_{cr.fl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}} \Im_1 \text{ при } k_1 \geq 0.5;$$

в частности, за исключением поведения систем, в которыхотносительная толщина пластинок $2ha^{-1} > 0.014$. В этом случае невозмущённое состояние равновесия системы неустойчиво на всём интервале (1.5) при всех k_1: имеет место эйлерова дивергенция панели.

Здесь, в соответствии с обозначением (3.10), $k_1 = I_c\pi^2\gamma^2\left(m_c a^2\right)^{-1}$.

Справедливо равенство: $V_0 = V_{1,2}$ – приведённые скорости $V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_{1.2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ исчисляются подстановкой второго корня уравнения $A_3 = 0$ в формулу (2.9). При этом при малых $k_1 \in [0.07, 0.5)$ имеет место переход от покоя к автоколебаниям, а при больших $k_1 \geq 0.5$ – начинает совершать автоколебания «изогнутая» пластинка.

В таблицах 4 – 6 приведены численные результаты для $\gamma = 0.3$. При этом, данные таблицы 4 соответствуют $\nu = 0.125; 0.3; 0.5$, а данные таблиц 5 и 6 – $\nu = 0.3$. В интервале $\gamma \in (0.193, 0.33)$ критические скорости $V_{crdiv} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона, в отличие от $V_{crfl} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$.

Таблица 4.

γ =0.3 \ β_x^2	0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$,	88.171 90,441 93,092	85,983 88,138 90,766	84.869 87.050 89.548	83.734 85.847 88.356	82.635 84.647 87.169	81.521 83.668 85.973
$V_{cr.div} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	491.582 477.203 461.320	488.276 474.081 458.535	486.602 472.512 457.041	484.930 470.938 455.669	483.258 469.386 454.195	481,586 467.772 452.763

Значения $V_0^* D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.3$ и $\nu = 0,3$. Таблица 5.

β_x^2 \ k_1	0.07	0.1	0.5	1.0	5.0	10.0
0.0	177.68	236.73	288.22	267.53	216.43	202.19
0.6	197.59	238.57	278.26	256.24	205.38	192.37

Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.3$ и $\nu = 0,3$. Таблица 6.

k_1 \ β_x^2	0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.07	148.530	135.126	130.606	126.137	121.717	118.657
0.1	110.485	106.154	104.116	102.087	100.071	98.066
0.5	93.440	91.472	90.491	89.510	88.531	87.519
1.0	104.431	102.385	101.365	100.619	99.699	98.842
5.0	134.631	132.670	131.690	130.711	129.800	128.822
10.0	144.313	142.026	141.370	140.367	139.364	138.362

Из данных таблиц 4 и 6 следует, что критические скорости дивергенции и флаттера являются убывающими функциями от коэффициента напряжения $\beta_x^2 \in [0, 0.6]$: критические скорости эйлеровой дивергенции убывают примерно на 2.3%, не эйлеровой дивергенции – на 8%; а критические скорости флаттера – примерно на 4.8 – 20%, что свидетельствует о понижении устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы.

Функция $V_0^* D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ является монотонно убывающей функцией от коэффициента Пуассона ν, в отличие от $V_{cr.fl.} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, которая возрастает, примерно, от 3% до 7.2% в пластинах из материалов с большим ν.

5.2. Невозмущённое состояние равновесия системы в интервале $\gamma \in [0.33, 0.74)$ является устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ для всех $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$, когда $\beta_x^2 \le 0.5$ и, соответственно, неустойчивым при больших β_x^2: имеет место эйлерова дивергенция панели. Цепочки переходов из одной области пространства параметров в другую будут вида:

$$(\Im_0) \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \Im_1,\ k_1 \in (0, 0.37); \tag{5.2}$$

$$(\Im_0) \xrightarrow{V_{cr.fl}^{(1)}} \Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.fl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \Im_1,\ k_1 \in [0.37, 1.0);$$

$$(\Im_0) \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \Im_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \Im_2 \xrightarrow{V_{cr.fl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \Im_1,\ k_1 \ge 1.$$

Здесь, по аналогии с предыдущим случаем (разд. 5.1), когда $k_1 < 0.37$, флаттер отсутствует: имеет место потеря устойчивости только в виде эйлеровой дивергенции панели при скоростях $V \ge V_{crdiv}^{(1)}$ и $V \ge V_{crdiv}^{(2)}$ соответственно. При малых $k_1 \in [0.37, 1.0)$ система переходит от состояния покоя к автоколебаниям, в отличие от больших k_1. Соответственно, при скоростях $V \ge V_{crfl}$, когда $k_1 \in [0.37, 1.0)$, начинает совершать автоколебания «плоская» пластинка, а при $k_1 \ge 1$– «изогнутая» пластинка. При этом, $V_0 = V_{1,2}$ при всех β_x^2. В таблицах 7 – 9 приведены значения критических скоростей для $\gamma = 0,5$ при $\nu = 0.3$.

Таблица 7.

$\gamma = 0.5$ \ β_x^2	0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$,	120.013	113.476	110.021	106.590	103.219	99.837
$V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	11.705	9.202	7.960	6.825	5.612	4.524
$V_{cr.div}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	457.583	451.132	448.189	444.393	440.880	437.367

$V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_{cr.div}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$– монотонно убывающие функции от β_x^2 и ν: на промежутке $\beta_x^2 \in [0, 0.6]$ убывают в 2 – 2.6 раза и на 4 – 5% соответственно (табл.7); а в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν – в 1.8–2.5 раз и в 1.2 раза соответственно.

Критическая скорость флаттера является убывашщей функцией от коэффициента напряжения и возрастающей от коэффициента Пуассона: на промежутке $\beta_x^2 \in [0, 0.6]$ убывает примерно в 1.12 – 1.46 раз (табл. 9), а в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν возрастает в 1.2 раза.

Значения $V_0^* D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.5$ и $\nu = 0,3$. Таблица 8.

β_x^2 \ k_1	0.37	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0
0.0	194.696	244.170	276.114	274.322	251.190	233.807
0.6	228.690	247.783	264.595	256.758	231.425	213..384

Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.3$ и $\nu = 0,3$. Таблица 9.

k_1 \ β_x^2	0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.37	171.332	148.590	139.551	130.692	125.760	117.182
0.5	140.253	128.574	123.128	117.861	112.805	108.098
1.0	121.181	114.208	110.600	107.020	103.467	99.942
2.0	121.507	115.308	112.234	109.177	106.314	103.287
5.0	133.079	127.625	124.854	122.204	119.413	116.814
10.0	144.179	138.955	136.255	133.560	130.872	128.190

5.3. Поскольку $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ в интервале $\gamma \in [0.74, 2.9)$ при всех допустимых значениях параметров системы «пластинка–поток», то её невозмущённое состояние равновесия теряет устойчивость или в виде эйлеровой дивергенции панели, когда $\gamma \in \left[0.74, \gamma_{gr}\right)$, или в виде локализованной дивергенции, начиная с $\gamma \geq \gamma_{gr} = \gamma_{gr}\left(\beta_x^2, \nu\right)$ (табл. 10): неэйлерова дивергенция и панельный флаттер отсутствуют [5,11,14].

Таблица 10.

β_x^2	0	0.1	0.2	≥ 0.3
γ_{gr}	1.96	2.4	2.8	2.9

Из данных таблицы 10 очевидно, что с ростом коэффициента напряжения $\beta_x^2 < \left(\beta_x^2\right)_{cr}$ граничное значение γ_{gr} увеличивается в 1.5 раза: граница между областями дивергенции панели локализованной дижергенции смещается в направлении больших значений параметра γ, сужая область локализованной дивергенции, в отличие от сил растяжения, направленных по потоку, при которых граница γ_{gr} смещается в направлении малых значений γ [14]. При этом, следует отметить, что функция $\gamma_{gr} = \gamma_{gr}\left(\beta_x^2, \nu\right)$ зависит от коэффициента Пуассона ν исчезающе мало.

Цепочки переходов для $2ha^{-1} > 0.007$ в интервале $\gamma \in \left[0.74, 0.84\right)$ имеют вид:

$$\Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \Im_1 \;\left(\nu \le 0.3\right);\; \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \Im_1 \;\left(\nu > 0.3\right);$$

для $2ha^{-1} \in \left[0.006, 0.007\right] - \Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \Im_1 \left(\nu \le 0.3\right)$ и $\Im_1 \left(\nu > 0.3\right)$: невозмущённое состояние равновесия системы при $2ha^{-1} \in \left[0.006, 0.007\right]$ и $\nu > 0.3$ является неустойчивым в интервале сверхзвуковых скоростей (1.5).

В интервале $\gamma \in \left[0.84, \gamma_{gr}\right)$ цепочки переходов будут вида: $\Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \Im_1$. При этом, из сопоставления численных результатов с данными таблицы 3 следует, что невозмущённое состояние равновесия системы, когда $2ha^{-1} > 0.013$, при малых β_x^2 является устойчивым в интервале скоростей (1.5).

В таблицах 11 и 12 приведены значения критических скоростей для $\gamma = 0.8$ при $\nu = 0.3$ и для $\gamma = 1$ при $\nu = 0.125; 0.3; 0.5$ соответственно.

Таблица 11.

γ =0.8 \ β_x^2	0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	250.777	234.723	220.315	207.021	194.548	182.721
$V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	54.087	43.916	39.133	34.453	29.587	25.161
$V_{cr.div}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	343.647	345.428	345.546	344.529	342.671	340.129

Таблица 12.

γ =1 \ β_x^2	0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	522.740 128.462 72.910	490.124 104.280 56.517	469.102 92.384 47.653	455.466 80.251 39.661	439.495 69.202 –	421.273 58.489 –

Критические скорости дивергенции панели являются, в основном, монотонно убывающими функциями от коэффициента напряжения β_x^2, а также, и от коэффициента Пуассона ν.

6. Основные результаты и заключение. В работе получено аналитическое решение задачи устойчивости невозмущённого состояния равновесия линейной динамической системы «пластинка–поток» в предположении, что сверхзвуковой поток газа набегает на свободный край первоначально сжатой по потоку упругой прямоугольной пластинки, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота.

Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка–поток» на область устойчивости и на области неустойчивости – области эйлеровой и не эйлеровой дивергенции панели, панельного флаттера и локализованной дивергенции.

Получена формула зависимости скорости потока газа от «существенных» параметров системы «пластинка–поток», позволяющая найти критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера.

Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Найдены «безопасные» и «опасные» границы области устойчивости.

Установлено, что при малых значениях интенсивности приложенных инерционных моментов поворота потеря устойчивости наступает при меньшей скорости потока газа, но это не эйлерова потеря устойчивости, а переход системы от покоя к движению – к автоколебаниям.

Показано, что сжимающие силы, направленные по потоку газа, приводят к существенному понижению устойчивости системы «пластинка-поток» по сравнению с сжимающими силами, направленными перпендикулярно скорости потока [16]: имеет место не только падение значений критических скоростей и коэффициента напряжения, но и значительное смещение границы между областями дивергенции панели и локализованной дивергенции в направлении больших значений параметра отношения сторон: с ростом коэффициента напряжения область эйлеровой дивергенции расширяется, а область локализованной дивергенции сужается.

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем..– М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел.– М: Наука. 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа // Акустический журнал. 1960. Т. 6. . № 1. С. 124–126.
6. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
7. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.

8. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука. 1979. 384 с.
9. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
10. ЛяпуновА.М. Общая задача об устойчивости движения.– М.–Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
11. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
12. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, сжатой по направлению потока газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 4, с.44–68.
13. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа // Изв. НАН Армении, Механика. 2022, т.75, № 3, с.64–82. DOI : 10.54503/0002-3051-2022.75.3-64.
14. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов // Изв. НАН Армении, Механика. 2022. Т.75 (4),с. 52–73. DOI:10.54503/0002-3051-2022.75.4-52.
15. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлинённой прямоугольной пластинки со свободным краем, сжатой по потоку газа // Изв. НАН Армении, Механика. 2023. Т.76 (2), с. 44–58. DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.2- 44.
16. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер панели со свободным краем, сжатой в направлении, перпендикулярном к скорости потока газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов. // Изв. НАН Армении, Механика. 2021. Т.74 (2), с. 33–59.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 10.09.2023