

СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР УДЛИНЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ, СЖАТОЙ ПО ПОТОКУ ГАЗА

Мартirosян С. Р.

Ключевые слова: удлинённая прямоугольная пластинка, первоначальные сжимающие силы, сверхзвуковое обтекание, аэроупругая устойчивость, сосредоточенные инерционные массы и моменты, аналитический метод решения

S.R. Martirosyan

Supersonic flutter of an elongated rectangular plate with one free edge compressed along a gas flow

Key words: rectangular elongated plate, the initial compressive forces, supersonic overrunning, aeroelastic stability, concentrated inertial masses and moments, analytical solution method

By analyzing, as an example, a thin elastic compressed elongated plate streamlined by supersonic gas flows, we study the influence of the initial stress state of the plate on the stability of the unperturbed motion of the dynamic system “plate – flow” under the assumption of presence of concentrated inertial masses and moments on its free edge. An analytical solution of the problem of stability of the unperturbed motion of a dynamical system is obtained. An exact estimate of their influence on the stability of the unperturbed motion of the system is given, depending on its “essential” parameters and the relative thickness of the plate. It is shown that the compressive forces lead to a significant decrease in the stability of the system.

Մ.Ռ.Մարտիրոսյան

Գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ սեղմված երկարաձիգ մեկ ազատ եզրով ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին

Հիմնաբաներ՝ երկարաձիգ ուղղանկյուն սալ, առաձգական կայունություն, գերձայնային շրջհոսում, նախնական սեղմող ուժեր, իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, անալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է գերձայնային գազի հոսքում սեղմված՝ շրջհոսման ուղղությամբ, մեկ ազատ եզրով առաձգական երկարաձիգ ուղղանկյուն սալի նախնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը «սալ–հոսք» համակարգի ոչ խոտորված շարժման կայունության վրա: Ենթադրվում է, որ սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: Գնահատված է սեղմող ուժերի ապակայունացնող ազդեցությունը «սալ–հոսք» համակարգի ոչ խոտորված շարժման կայունության վրա:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначальных сжимающих сил в срединной поверхности удлинённой прямоугольной упругой пластинки с одним свободным краем, обтекаемой с одной стороны сверхзвуковым потоком газа, на устойчивость её невозмущённого состояния равновесия в предположении, что на свободном крае имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты. Получено аналитическое решение. Показано, что первоначальные сжимающие силы приводят к понижению устойчивости системы.

Введение. Рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение [1, 2]. Исследованию этих задач посвящено большое количество работ, обзор которых, в частности, содержится в монографиях [1–4]. Теоретические исследования этих задач позволяют выявить различные виды потери устойчивости динамической системы «пластинка–поток», обусловленные характером деформаций: дивергенция панели, локализованная дивергенция, панельный флаттер. А также, позволяют дать оценку влиянию комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им.

В предлагаемой статье исследуется влияние первоначальных сжимающих сил на устойчивость обтекаемой сверхзвуковым потоком газа удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями в предположении, что первоначальные сжимающие силы направлены по потоку газа, набегающим на свободный край, и при наличии на свободном крае сосредоточенных инерционных масс и моментов.

Получено аналитическое решение задачи устойчивости невозмущённого движения системы «пластинка–поток» с помощью алгоритма, подробно изложенного в [10].

Показано, что невозмущённое движение системы «пластинка–поток» теряет устойчивость в виде дивергенции панели (эйлеровой и не эйлеровой) и в виде панельного флаттера. Определены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости [8].

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

Дана точная оценка влиянию первоначальных сжимающих сил на устойчивость невозмущённого движения системы, в зависимости от её «существенных» параметров и от относительной толщины пластинки: сжимающие силы приводят к понижению устойчивости системы «пластинка–поток».

Результаты работы могут быть использованы при обработке данных экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая достаточно удлинённая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$, $ab^{-1} \leq 0.193$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V . Течение газа принимается плоским и потенциальным.

Пусть край $x=0$ пластинки свободен, а края $x=a$, $y=0$ и $y=b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x=0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 7].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию сжимающих сил $N_x = 2h\sigma_x$, равномерно распределённых по краям $x=0$ и $x=a$ пластинки (Рис. 1); сжимающие усилия σ_x предполагаются постоянными во всей срединной поверхности пластинки и неменяющимися с изменением её прогиба $w = w(x, y, t)$ [1, 2].

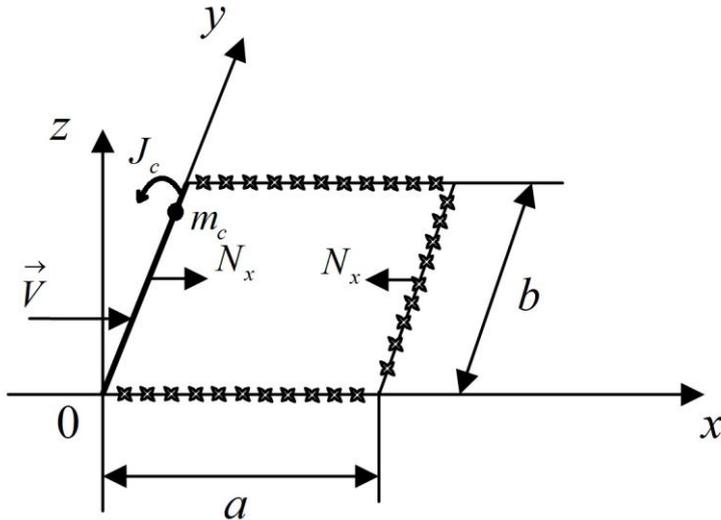


Рис.1.

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызывает избыточное давление δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой $\delta p = -a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x}$ «поршневой теории», где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [5, 6]. Будем полагать, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$.

Дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности сжатой прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории», а также, малости интенсивности $m \partial^2 w / \partial t^2$ распределённой массы пластинки m в сравнении с интенсивностями $m_c \partial^2 w / \partial t^2$ и $I_c \partial^2 w / \partial t^2$, учитываемых в граничных условиях, будет описываться соотношением [1, 2, 5–7]:

$$D \Delta^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x, y, t); \quad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1, 2, 7]:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad (1.2)$$

$$D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + N_x \frac{\partial w}{\partial x} = -m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{при } x = 0;$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a; \quad (1.3)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b; \quad (1.4)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа – в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}), \quad M_0 = \sqrt{2}, \quad M_{2\cos m} \approx 33.85; \quad (1.5)$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) в предположении, что

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{cr}, \quad (1.6)$$

$(\sigma_x)_{cr}$ - усилия, которые могут произвести «выпучивание» в отсутствии обтекания.

Анализ устойчивости невозмущённого движения системы (1.1) – (1.4) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) – (1.4) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале (1.5) при условии (1.6).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.4) будем исследовать в случае достаточно удлинённых прямоугольных пластинок [1, 2, 11]:

$$\gamma = ab^{-1} \leq 0.193, \quad (1.7)$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b .

В работе [10] получено аналитическое решение задачи (1.1) – (1.4) для всех значений $\gamma \in [0, \infty]$ в отсутствии первоначальных сил в срединной поверхности пластинки. В работе [11] получено решение задачи (1.1) – (1.4) для всех $\gamma \in [0, \infty]$ в статической постановке ($m_c = 0, I_c = 0$) по методу Эйлера. Показано, что система «пластинка–поток» теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели и в виде локализованной дивергенции, в зависимости от параметров системы. Исследована граница перехода из области эйлеровой дивергенции панели в область локализованной дивергенции. Найдены критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции, а также, критические значения коэффициента напряжения сжимающих сил. В работе [12] показано существенное повышение устойчивости системы «удлинённая пластинка–поток» при наличии первоначальных растягивающих сил.

Отметим, что согласно обозначению (1.7) значениям $\gamma = 0$ и $\gamma = \infty$ соответствуют два предельных случая прямоугольной пластинки, соответственно, бесконечно удлинённая пластинка и полубесконечная пластина–полоса.

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.4). Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости невозмущённого движения динамической системы (1.1) – (1.4) сведём её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде гармонических колебаний [10]:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое движение системы (1.1) – (1.4) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\text{Re} \lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\text{Re} \lambda > 0$) [1, 2, 9]. Критическая скорость потока газа V_{cr} , характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\text{Re} \lambda = 0$) [1, 2, 9].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» [11]:

$$r^4 - 2 \cdot (1 - \beta_x^2) \cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + 1 = 0, \quad (2.2)$$

корни которого описываются соотношениями:

$$r_{1,2} = -0.5 \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1+\beta_x^2)}, \quad r_1 < 0, \quad r_2 < 0; \quad (2.3)$$

$$r_{3,4} = 0.5 \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm i \sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1+\beta_x^2)}, \quad q \in (q_0, q(a_0 M_{2\cos m})).$$

Здесь, α_n^3 – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3} \in (a_0^2 \rho_0 M_0 D^{-1} \mu_n^{-3}, a_0^2 \rho_0 M_{2\cos m} D^{-1} \mu_n^{-3}), \quad (2.4)$$

в силу условия (1.5) и обозначения (2.3); β_x^2 – коэффициент напряжения, характеризующий консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2 \cdot N_x D^{-1} \mu_n^{-2} = h \sigma_x D^{-1} \mu_n^{-2} < (\beta_x^2)_{cr}. \quad (\text{табл.1}); \quad (2.5)$$

$q = q(V) \in R$ – единственный действительный корень кубического уравнения

$$8 \cdot (q+1-\beta_x^2)(q^2-1) - \alpha_n^6 = 0; \quad (2.6)$$

$$q = q(V) \in (q_0, q(a_0 M_{2\cos m})), \quad q_0 = \left(\beta_x^2 - 1 + 2\sqrt{(\beta_x^2 - 1)^2 + 3} \right) / 3 \quad (\text{табл.2}) \quad (2.7)$$

В таблице 1 приведены критические значения коэффициента напряжения: $(\beta_x^2)_{cr} = (\beta_x^2)_{cr}(n, \gamma, \nu)$ – решения дисперсионного уравнения исходной задачи устойчивости в отсутствие обтекания ($V = 0$) при $n = 1$ и $m_c = 0, I_c = 0$, найденные с точностью до порядка 10^{-4} в [11].

Таблица 1.

$\gamma \backslash \nu$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
≤ 0.001	0.8752	0.7501	0.7001	0.6251	0.5000
0.005	0.8791	0.7538	0.7037	0.6285	0.5031
0.010	0.8911	0.7654	0.7149	0.6391	0.5122
0.015	0.9112	0.7845	0.7332	0.6564	0.5273
0.200	0.9392	0.8108	0.7589	0.6804	0.5480

Таблица 2.

β_x^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.1	1.2	1.35
q_0	1	1.012	1.035	1.096	1.155	1.189	1.239	1.295

Тогда, в соответствии с выражениями (2.9), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_{nk} \cdot \exp(\mu_n r_k x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y). \quad (2.8)$$

Подставляя выражение (2.4) в кубическое уравнение (2.6), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q) = 2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)\pi^3 n^3 \gamma^3 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}}, \quad \gamma \in (0, 0.193]. \quad (2.9)$$

Эта формула позволяет по известному значению параметра $q = q(n, \gamma, \beta_x^2, \nu)$ определить приведённую скорость потока газа $V(q) \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$.

Учитывая условия (1.5), из выражения (2.9) согласно формуле цилиндрической жёсткости $D = E \cdot (2h)^3 / (12(1-\nu^2))$ следует, что

$$V(q) D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) \in (V(q_0) D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3), a_0 M_{2\cos m} \Psi) \subseteq (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}.) \Psi,$$

когда $V(q_0) \geq a_0 \rho_0$;

$$V(q) D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}.) \Psi, \text{ когда } V(q_0) < a_0 \rho_0;$$

$$\Psi = 12(1-\nu^2) a_0 \rho_0 E^{-1} (2ha^{-1})^{-3}, \quad M_0 = \sqrt{2}, \quad M_{2\cos m} \approx 33.85. \quad (2.10)$$

Подставляя значения относительной толщины пластинки $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$ в выражения (2.10) получаем интервалы $d(2ha^{-1}, v) = (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}) \Psi$ допустимых значений приведённой скорости $VD^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5) для стальных пластинок (табл. 3) [11, 12].

Таблица 3.

$2ha^{-1} \backslash V$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.81, 1311.78)	(52.03, 1245.27)	(50.52, 1208.98)	(47.70, 1141.58)	(41.63, 996.35)
0.010	(11.84, 283.45)	(11.24, 269.09)	(10.91, 261.25)	(10.30, 246.70)	(8.99, 215.32)
0.012	(6.85, 164.01)	(6.50, 155.72)	(6.32, 151.20)	(5.96, 142.69)	(5.20, 124.60)
0.015	(3.51, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23, 77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

Заметим, что бесконечно удлинённая пластинка ($\gamma = 0$) в отсутствии обтекания ($V = 0$) является неустойчивой при всех $\beta_x^2 \geq 0$.

3. Достаточные признаки потери устойчивости невозмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4).

3.1. Сжатая удлинённая прямоугольная пластинка ($\gamma \in (0, 0.193)$).

Подставляя общее решение (2.8) дифференциального уравнения (1.1), в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk} . Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель, описывается биквадратным уравнением относительно собственного значения λ :

$$\chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + (\chi_n A_1 + \delta_n A_2) \lambda^2 + A_3 = 0, \quad (3.1)$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}, \quad \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1}, \quad \delta_n > 0, \quad \chi_n > 0, \quad (3.2)$$

δ_n и χ_n – приведённые значения сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c , приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки;

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2) = \quad (3.3)$$

$$= \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \left(1 - \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma) \right) B_1 B_2 -$$

$$- 2B_2 \left(q+1-\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1} \right) \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma) sh(\pi n \gamma B_1) \cos(\pi n \gamma B_2) -$$

$$-2B_1 \left(q+1-\beta_x^2-\sqrt{q^2-1} \right) \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma) \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) \sin(\pi n \gamma B_2);$$

$$A_1 = A_1(q, n, \gamma, \beta_x^2) = \quad (3.4)$$

$$= 2(q+1-\beta_x^2) \left[(q-\sqrt{q^2-1}) + (q+\sqrt{q^2-1}) \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) \right] B_1 B_2 +$$

$$+ 2B_2 \left[\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)} \cdot (q+1-\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1}) \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) + \right.$$

$$+ 2B_1((2q-1)(q+1) - q\beta_x^2) \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) \left. \right] \cos(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) +$$

$$+ 2 \left[B_1 \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)} (q+1-\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1}) \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) + \right.$$

$$\left. + (q+1-\beta_x^2)(q-1 - q\beta_x^2) \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) \right] \sin(\pi n \gamma B_2) \cdot \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma);$$

$$A_2 = A_2(q, n, \gamma, \beta_x^2) = \quad (3.5)$$

$$= 2(q+1-\beta_x^2) \left(1 + \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) \right) B_1 B_2 -$$

$$- 4(q+1-\beta_x^2) B_1 B_2 \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) \cos(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) +$$

$$+ 2(3(q^2-1) + 2\beta_x^2 - \beta_x^4) \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) \sin(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma);$$

$$A_3 = A_3(q, n, \gamma, v, \beta_x^2) = \quad (3.6)$$

$$= \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \left\{ (q+1-\sqrt{q^2-1})^2 - 2(q+1)v - (1-v)^2 - \right.$$

$$- 2\beta_x^2 (q-\sqrt{q^2-1}) \left. \right\} B_1 B_2 - \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \left\{ (q+1+\sqrt{q^2-1})^2 - 2(q+1)v - \right.$$

$$\left. - (1-v)^2 - 2\beta_x^2 (q+\sqrt{q^2-1}) \right\} B_1 B_2 \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) +$$

$$+ 2B_2 \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) \left\{ [(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1} - \right.$$

$$- (2q^2-4q+1)(q+1) - (2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1}-2q\beta_x^2) \cdot \beta_x^2 -$$

$$\left. - 2((2q-1)(q+1) - q\sqrt{q^2-1} - q\beta_x^2)v + (q+1-\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1})v^2 \right\} \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) +$$

$$+ 2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)} (q+1-\beta_x^2) B_1 \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) \left. \right\} \cdot \cos(\pi n \gamma B_2) +$$

$$+ 2 \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) \left\{ -B_1 [(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1} + \right.$$

$$+ (2q^2-4q+1)(q+1) + (2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1}-2q\beta_x^2) \cdot \beta_x^2 +$$

$$\left. + 2((2q-1)(q+1) + q\sqrt{q^2-1} - q\beta_x^2)v - (q+1-\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1})v^2 \right\} \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) -$$

$$-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)}(3(q^2-1)+2\beta_x^2-\beta_x^4) \cdot sh(\pi n \gamma B_1) \} \sin(\pi n \gamma B_2);$$

$$B_1 = \sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1+\beta_x^2)}, \quad B_2 = \sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1+\beta_x^2)}. \quad (3.7)$$

Легко показать, что при допустимых значениях коэффициента напряжения $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{cr}$ (табл. 1) и параметра $q = q(V)$ (2.7) (табл. 2)

$$B_1 = B_1(q, \beta_x^2) > 0, \quad B_2 = B_2(q, \beta_x^2) > 0, \quad (3.8)$$

откуда следует справедливость неравенств

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2) > 0, \quad A_2 = A_2(q, n, \gamma, \beta_x^2) > 0, \quad n \geq 1, \quad \gamma \in (0, 0.193]. \quad (3.9)$$

Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1} = I_c (\pi n \gamma)^2 \cdot (m_c a^2)^{-1}, \quad (3.10)$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.9), переписывается в виде

$$\lambda^4 + (k_n A_1 + A_2) \chi_n^{-1} A_0^{-1} \lambda^2 + \chi_n^{-1} \delta_n^{-1} A_0^{-1} A_3 = 0, \quad \delta_n > 0, \quad \chi_n > 0, \quad k_n > 0. \quad (3.11)$$

Заметим, что непосредственной подстановкой $\beta_x^2 = 0$ в уравнение (3.11) можно убедиться в его тождественности уравнению, полученному в работе [10].

3.2. Сжатая бесконечно удлиненная пластинка ($\gamma = 0$). Аналогичным образом,

как в случае растянутой бесконечно удлиненной пластинки [12], можно показать, что характеристический определитель сжатой бесконечно удлиненной панели будет вида:

$$\chi_\xi \cdot \delta_\xi \cdot \tilde{A}_0 \lambda^4 + (\chi_\xi \cdot \tilde{A}_1 + \delta_\xi \cdot \tilde{A}_2) \lambda^2 + \tilde{A}_3 = 0, \quad (3.12)$$

$$\delta_\xi = m_c D^{-1} a^3, \quad \chi_\xi = I_c D^{-1} a, \quad \delta_\xi > 0, \quad \chi_\xi > 0; \quad (3.13)$$

δ_ξ и χ_ξ – приведенные значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c , приложенных вдоль свободного края $x = 0$;

$$\tilde{A}_0 = \tilde{A}_0(q_\xi, \beta_\xi^2) = 2\sqrt{2(3q_\xi + \beta_\xi^2)}. \quad (3.14)$$

$$\left((q_\xi - \beta_\xi^2) sh \sqrt{2(q_\xi - \beta_\xi^2)} - (2q_\xi - \beta_\xi^2) sh \sqrt{0.5(q_\xi - \beta_\xi^2)} \cos \sqrt{0.5(3q_\xi + \beta_\xi^2)} \right) - \\ - 2\beta_\xi^2 \sqrt{2(q_\xi - \beta_\xi^2)} \cdot ch \sqrt{0.5(q_\xi - \beta_\xi^2)} \cdot \sin \sqrt{0.5(3q_\xi + \beta_\xi^2)};$$

$$\tilde{A}_1 = \tilde{A}_1(q_\xi, \beta_\xi^2) = 4q_\xi \sqrt{(q_\xi - \beta_\xi^2)(3q_\xi + \beta_\xi^2)}.$$

$$\left((q_\xi - \beta_\xi^2) e^{-\sqrt{2(q_\xi - \beta_\xi^2)}} + (2q_\xi - \beta_\xi^2) e^{\sqrt{0.5(q_\xi - \beta_\xi^2)}} \cos \sqrt{0.5(3q_\xi + \beta_\xi^2)} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -4q_\xi \beta_\xi^2 (q_\xi - \beta_\xi^2) e^{\sqrt{0.5(q_\xi - \beta_\xi^2)}} \sin \sqrt{0.5(3q_\xi + \beta_\xi^2)} ; \\
\tilde{A}_2 & = \tilde{A}_2(q_\xi, \beta_\xi^2) = 4\sqrt{(q_\xi - \beta_\xi^2)^3 (3q_\xi + \beta_\xi^2)} \cdot \\
& \cdot \left(ch \sqrt{2(q_\xi - \beta_\xi^2)} - ch \sqrt{0.5(q_\xi - \beta_\xi^2)} \cos \sqrt{0.5(3q_\xi + \beta_\xi^2)} \right) + \\
& + 4(3q_\xi^2 - \beta_\xi^4) sh \sqrt{0.5(q_\xi - \beta_\xi^2)} \cdot \sin \sqrt{0.5(3q_\xi + \beta_\xi^2)} ; \\
\tilde{A}_3 & = \tilde{A}_3(q_\xi, \beta_\xi^2) = 4 \cdot q_\xi (q_\xi - \beta_\xi^2)^2 \cdot \sqrt{2(3q_\xi + \beta_\xi^2)} \cdot \\
& \left(-e^{-\sqrt{2(q_\xi - \beta_\xi^2)}} + e^{\sqrt{0.5(q_\xi - \beta_\xi^2)}} \cos \sqrt{0.5(3q_\xi + \beta_\xi^2)} \right) - \\
& - 4 \cdot q_\xi (3q_\xi^2 - \beta_\xi^4) \sqrt{2(q_\xi - \beta_\xi^2)} \cdot e^{\sqrt{0.5(q_\xi - \beta_\xi^2)}} \sin \sqrt{0.5(3q_\xi + \beta_\xi^2)} .
\end{aligned}$$

Здесь, $q_\xi \in R$ – корень кубического уравнения $8q_\xi^2(q_\xi - \beta_\xi^2) - S^6 = 0$, где $\beta_\xi^2 = h\sigma_x D^{-1} a^2$, $S^3 = a_0 \rho_0 a^3 V D^{-1}$, $q_\xi > \beta_\xi^2$, $\beta_\xi^2 < (\beta_\xi^2)_{cr}$ (табл.1) [11].

Отсюда получаем формулу для нахождения приведённой скорости потока газа

$$VD^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) = 2\sqrt{2(q_\xi + 1 - \beta_\xi^2)} \cdot q_\xi. \quad (3.15)$$

Легко показать, что $\tilde{A}_0 = \tilde{A}_0(q_\xi, \beta_\xi^2) > 0$ и $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_2(q_\xi, \beta_\xi^2) > 0$ при всех допустимых значениях q_ξ и β_ξ^2 . А тогда, дисперсионное уравнение (3.22) можно переписать в виде, подобному (3.11):

$$\lambda^4 + (k_\xi \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) \chi_\xi^{-1} \tilde{A}_0^{-1} \lambda^2 + \chi_\xi^{-1} \delta_\xi^{-1} \tilde{A}_0^{-1} \tilde{A}_3 = 0, k_\xi = \chi_\xi \delta_\xi^{-1} = I_c (m_c a^2)^{-1} > 0. \quad (3.16)$$

Очевидно, что невозмущённое состояние равновесия системы «сжатая бесконечно удлинённая пластинка – поток» неустойчиво для всех $\beta_\xi^2 \in [0, (\beta_\xi^2)_{cr}]$ (табл. 1) при малых значениях сверхзвуковых скоростей ($V \geq a_0 M_0$), в силу неустойчивости равновесного состояния необтекаемой сжатой бесконечно удлинённой пластинки. Однако при сверхзвуковых скоростях V , больших $a_0 M_0$, примерно, на порядок, невозмущённое состояние системы становится устойчивым [11].

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.4) сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристических определителей (3.11) и (3.16), определяющих собственные движения системы “пластинка-поток” в пространстве «существенных» параметров, соответственно, $\mathfrak{T} = \{q(V), n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n\}$ и $\mathfrak{T}_\xi = \{q_\xi(V), \beta_\xi^2, k_\xi\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическое поведение возмущённого

движения. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

Заметим, что уравнения (3.11) и (3.16) отличаются от характеристических определителей, соответствующих задаче устойчивости системы при наличии первоначальных сил растяжения, знаком коэффициентов β_x^2 и β_ξ^2 [12].

4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Как и в работах [10, 12], введём в рассмотрение в пространстве параметров \mathfrak{S} системы «пластинка–поток» область устойчивости $\mathfrak{S}_0 (k_n A_1 + A_2 > 0, A_3 > 0, \Delta > 0)$ и области неустойчивости: $\mathfrak{S}_1 (A_3 < 0, \Delta > 0)$, $\mathfrak{S}_2 (k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 > 0, \Delta > 0)$ и $\mathfrak{S}_3 (A_3 > 0, \Delta < 0)$.

Здесь Δ – дискриминант биквадратного уравнения (3.11):

$$\Delta = \Delta(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4k_n A_0 A_3. \quad (4.1)$$

В области устойчивости \mathfrak{S}_0 уравнение (3.11) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$: прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния; в области \mathfrak{S}_1 – имеет два действительных корня $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ и два чисто мнимых $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$, что характеризует эйлерову дивергенцию панели; в области \mathfrak{S}_2 – имеет два отрицательных ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) и два положительных ($\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$) корня, что характеризует более ярко выраженную дивергенцию панели – не эйлерову дивергенцию. А в области \mathfrak{S}_3 , по крайней мере, два корня – комплексно сопряжённые с положительной вещественной частью: имеет место панельный флаттер.

Границами области устойчивости \mathfrak{S}_0 системы в пространстве её параметров \mathfrak{S} при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ являются гиперповерхности $A_3 = 0$ и $\Delta = 0$ – определяющие условия аperiodической и колебательной неустойчивости соответственно [8, 9]. Переходы ($\mathfrak{S}_0 \rightarrow \mathfrak{S}_3$) и ($\mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_3$) – «опасные границы» областей \mathfrak{S}_0 и \mathfrak{S}_2 [8].

В случае бесконечно удлиненной пластинки ($\gamma = 0$) разбиение пространства параметров $\mathfrak{S}_\xi = \{q_\xi(V), \beta_\xi^2, k_\xi\}$ на область устойчивости \mathfrak{S}_0 и области неустойчивости: \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 и \mathfrak{S}_3 производится аналогичным способом.

Критические скорости эйлеровой $V_{cr.div.}$ и не эйлеровой $V_{1,2}$ дивергенции панели и панельного флаттера $V_{cr.fl.}$ определяются с достаточной точностью подстановкой в формулы (2.9) и (3.15) искомых значений параметров q и q_ξ соответственно.

5. Численные результаты. В данной работе с помощью методов графо-аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n)\} \in \mathfrak{S}$ и $\{q(\beta_\xi^2, k_\xi)\} \in \mathfrak{S}_\xi$, параметризованных надлежащим образом в пространствах \mathfrak{S} и \mathfrak{S}_ξ соответственно. Численные расчеты показали, что критические скорости дивергенции панели $V_{cr.div}$, $V_{1,2}$ и флаттера $V_{cr.fl.}$ при всех $\gamma \in (0, 0.193]$ являются возрастающими функциями от числа полуволн n : их наименьшему значению соответствует $n=1$. При этом $V_{cr.div}$ является слабо убывающей функцией от коэффициента Пуассона ν , в отличие от скоростей $V_{1,2}$ и $V_{cr.fl.}$, являющихся слабо возрастающими функциями от коэффициента Пуассона ν .

В таблицах 4 – 7 представлены численные результаты решения исходной задачи устойчивости системы «пластинка–поток» в случае удлиненных прямоугольных пластинок для значений $\gamma=0.1$ при $n=1$, $\nu=0.3$ и для бесконечно удлиненной пластинки.

Заметим, что качественные характеристики поведения возмущенного движения системы можно считать примерно одинаковыми для всех $\gamma \in [0, 0.193]$, в отличие от количественных характеристик, существенно зависящих от параметра γ .

Сопоставляя найденные значения критических скоростей с данными таблицы 3, составлены цепочки переходов из области $\mathfrak{S}_l \subset \mathfrak{S}$ в область $\mathfrak{S}_k \subset \mathfrak{S}$ для наглядной иллюстрации динамики состояния системы «пластинка – поток» в пространстве параметров \mathfrak{S} [12].

Следует отметить существенную зависимость форм представления цепочек от относительной толщины $2ha^{-1}$ и материала пластинок. В частности, цепочки переходов исходной системы для стальных пластинок относительной толщины $(2ha^{-1}) \in [0.006, 0.015]$ при всех $\gamma \in [0, 0.193]$ – одинаковы:

$$\mathfrak{S}_1 \xrightarrow{V_0} \mathfrak{S}_0 \xrightarrow{V_{cr.fl.}} \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{S}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}} \mathfrak{S}_1, \quad k_1 \in (0, 0.1), k_\xi \in (0, 0.3); \quad (5.1)$$

$$\mathfrak{S}_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \mathfrak{S}_2 \xrightarrow{V_{cr.fl.}} \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{S}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}} \mathfrak{S}_1, \quad k_1 \geq 0.1, k_\xi \geq 0.3; \quad (5.2)$$

где, в соответствии с (3.10) и (3.16), $k_1 = I_c \pi^2 \gamma^2 (m_c a^2)^{-1}$ и $k_\xi = I_c \cdot (m_c a^2)^{-1}$.

Из представлений (5.1) и (5.2) видны следующие две особенности в поведении возмущенного движения системы «пластинка–поток».

1) При всех $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{cr.}$ и $\beta_\xi^2 < (\beta_\xi^2)_{cr.}$, соответственно, для $\gamma \in (0, 0.193]$ и $\gamma=0$, невозмущенное движение системы неустойчиво вблизи $a_0 \sqrt{2}$: имеет место эйлерова дивергенция.

2) При малых значениях $k_1 \in (0, 0.1)$ и $k_\xi \in (0, 0.3)$ имеет место переход $\mathfrak{S}_0 \rightarrow \mathfrak{S}_3$, а при $k_1 \geq 0.1$ и $k_\xi \geq 0.3$ – переход $\mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_3$. При этом,

$$V_0(\gamma, \nu, \beta_x^2) = V_{1,2}(\gamma, \nu, \beta_x^2) \text{ при } \gamma \in (0, 0.193], \text{ всех } \nu \text{ и } \beta_x^2 \leq (\beta_x^2)_{cr.}; \quad (5.3)$$

$$V_0(\beta_\xi^2) = V_{1,2}(\beta_\xi^2) \text{ при } \gamma = 0 \text{ и всех } \beta_\xi^2 \leq (\beta_\xi^2)_{cr.}. \quad (5.4)$$

Соответственно, при $k_1 \in (0, 0.1)$ и $k_\xi \in (0, 0.3)$ при скоростях потока $V \geq V_{cr.fl.}$ начинает совершать флаттерные колебания плоская пластинка, а при $k_1 \geq 0.1$ и $k_\xi \geq 0.3$ – «выпученная» (изогнутая) пластинка.

Таблица 4.

$\gamma=0.1$ \ β_x^2	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7
$V_0 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3),$ $V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	76.893	76.678	76.406	76.302	76.134	76.030
$V_{cr.div} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	484.045	482.854	482.467	482.274	482.080	481.887

Приведённые критические скорости $V_0 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma \in (0, 0.193]$ и $\gamma = 0$ определяются подстановкой в формулы (2.11) и (3.20), соответственно, второго корня уравнений $A_3(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2) = 0$ при $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\tilde{A}_3(q_\xi, \beta_\xi^2) = 0$ при $k_\xi \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 > 0$, а $V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ – при $k_n A_1 + A_2 < 0$ и при $k_\xi \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 < 0$.

Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0.1$ и $\nu = 0,3$. Таблица 5.

k_1 \ β_x^2	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7
0.1	92.615	92.041	91.885	91.787	91.689	91.551
1.0	133.953	133.406	133.192	133.074	132.971	132.800
5.0	148.972	148.219	148.016	147.870	147.747	147.625
10.0	152.545	151.908	151.723	151.592	151.461	151.359

Таблица 6.

$\gamma = 0$ \ β_ξ^2	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7
$V_0 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3),$	76.367	73.357	70.882	69.588	68.359	67.134

$V_2 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$						
$V_{cr.div} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	485.828	481.497	477.433	475.707	473.514	471.789

Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0$. Таблица 7.

$\beta_x^2 \backslash k_x$	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7
0.1	89.443	85.341	81.304	79.434	77.447	75.536
0.3	76.367	73.609	71.193	70.082	68.913	67.745
0.4	77.504	75.313	73.129	72.071	71.015	69.960
1.0	91.462	89.467	87.375	86.501	85.644	84.722
5.0	122.756	120.701	118.517	117.572	116.628	115.535
10.0	132.574	130.769	128.526	127.405	126.285	125.240

Из данных таблиц 4–7 следует, что критические скорости дивергенции и флаттера являются убывающими функциями от коэффициента напряжения, соответственно, β_x^2 и β_x^2 : на промежутке β_x^2 и $\beta_x^2 \in [0, 0.7]$ критические скорости эйлеровой дивергенции убывают примерно на 3%, не эйлеровой дивергенции – на 12%; а критические скорости флаттера – примерно на 5–15%.

Тем самым, первоначальное напряжённое состояние, обусловленное сжимающими усилиями, направленными по потоку газа, оказывает дестабилизирующее действие на невозмущённое состояние равновесия системы: приводит к понижению её устойчивости.

6. Основные результаты и заключение. В работе получено аналитическое решение задачи динамической устойчивости невозмущённого состояния равновесия упругой достаточно удлинённой прямоугольной пластинки, а также бесконечно удлинённой пластинки с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край, в предположении наличия в пластинке первоначальных сжимающих усилий, направленных по потоку газа.

Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка–поток» на область устойчивости и на области неустойчивости – области эйлеровой и не эйлеровой дивергенции панели и панельного флаттера.

Получена формула зависимости скорости потока газа от «существенных» параметров системы «пластинка–поток», позволяющая найти критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера.

Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Найдены «безопасные» и «опасные» границы области устойчивости.

Установлено, что при меньших значениях интенсивности приложенных инерционных моментов поворота потеря устойчивости наступает при меньшей скорости потока, но это не эйлерова потеря устойчивости, а переход системы от покоя к движению – к автоколебаниям.

Показано, что критические скорости дивергенции и флаттера являются убывающими функциями от коэффициента напряжения сжимающих сил. Первоначальные сжимающие силы, направленные по потоку газа, приводят к существенному понижению устойчивости системы «пластинка–поток».

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний, а также, дать точную оценку влиянию первоначальных сил на устойчивость системы, с целью последующего анализа возможности управления порогом устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем.– М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел.– М: Наука. 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Ильющин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
6. Ashley G.H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician//J. Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N 12. P. 1109–1118.
7. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
8. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
9. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения – М.–Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
10. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
11. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, сжатой по направлению потока газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 4, с.44–68.
12. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлиненной прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа // Изв. НАН Армении, Механика. 2022, т.75, № 3, с.64–82. DOI : 10.54503/0002-3051-2022.75.3-64.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 12.06.2023