

**ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ТРЕНИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К КОНТАКТНЫМ
ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Акопян В.Н., Акопян Л.В.

Ключевые слова: контактная задача, штамп, сухое трение, модель Галина

Hakobyan V.N., Hakobyan L.V.

On a Model of Friction for Contact Problems of the Theory of Elasticity

Key words: contact problem, punch, dry friction, Galin's model

An exact solution of the problem of contact interaction of an absolutely rigid stamp with a flat base with an elastic half-plane is constructed, when the shear stresses acting in the contact zone are related to the normal pressure by dry friction law. It is assumed that the coefficient of friction depends on the coordinates of the contacting points of the contacting bodies and is directly proportional to them. A numerical calculation was carried out, the results of which were compared with the results obtained for a similar contact problem solved using Galin's contact model.

Հակոբյան Վ.Ն., Հակոբյան Լ.Վ.

**Առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրներում
կիրառելի շփման մի մոդելի մասին**

Հիմնաբառեր՝ կոնտակտային խնդիր, դրոշմ, չոր շփում, Գալինի մոդել

Աշխատանքում կառուցված է հարթ հիմքով բացարձակ կոշտ դրոշմի և առաձգական կիսահարթության փոխադրեցության վերաբերյալ խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ կոնտակտային տիրույթում գործող շոշոփող լարումները կապված են նորմալ ճնշման հետ այսպես կոչված չոր շփման օրենքով: Ընդ որում համարվում է, որ շփման գործակիցը կախված է կոնտակտային մակերևույթների հպման կետերի կոորդինատից և ուղիղ համեմատական է նրան: Կատարվել է թվային հաշվարկ, որի արդյունքները համեմատվել են Լ.Ա.Գալինի մոդելով լուծված նմանատիպ խնդրի արդյունքների հետ:

В настоящей работе построено точное решение задачи о контактном взаимодействии абсолютно жёсткого штампа с плоским основанием с упругой полуплоскостью, когда касательные напряжения, действующие в контактной зоне связаны с нормальным давлением по закону сухого трения с переменным коэффициентом трения. При этом считается, что коэффициент трения зависит от координат соприкасающихся точек контактирующих тел и прямо пропорционален им. Проведён численный расчёт, результаты которого сравнены с результатами, полученными для аналогичной контактной задачи, решённой на основе контактной модели Л.А. Галина.

Введение

Изучению контактного взаимодействия абсолютно жёстких штампов с различными упругими основаниями посвящено огромное количество работ. Из них

приведём монографии [1-5], где подытожены многие результаты, полученные в этом направлении.

Известно, что при рассмотрении классических контактных задач используются три основные модели контакта. В первой из них считается, что контактные поверхности гладкие, вследствие чего касательные контактные напряжения равны нулю. Во второй из них принимается, что касательные контактные напряжения связаны с нормальным контактным давлением по закону сухого трения и, наконец, в третьей из них считается, что между контактными поверхностями имеет место полное сцепление. Известно также, что при использовании последней модели, в концевых точках зоны контакта возникают осциллирующие особенности, вследствие чего нарушается условие сцепления [3,6]. Для устранения этого дефекта Л.А.Галиным в 1945 году была предложена новая модель контакта, в которой считается, что в средней части контактной зоны имеет место полное сцепление, а у концов штампа имеет место скольжение по закону сухого трения [1,7]. Модель контакта, предложенная Галиным, фактически является сочетанием второй и третьей контактных моделей и более точно описывает процесс контакта. В этой связи отметим также работу Д. Спенса [8], где было показано, что среди счетного числа ситуаций, при которых напряжения ограничены в точках изменения граничных условий под штампом, т.е. в точках перехода от сцепления к проскальзыванию, физическое решение порождает только наибольший из возможных участков проскальзывания. По этой модели были получены аналитические и численные решения ряда контактных задач для классических оснований [12-15].

Однако, использование этой модели контакта, особенно в случаях неклассических оснований, часто приводит к трудноразрешимым сложностям математического и вычислительного характера.

Исходя из этого, в настоящей работе рассматривается новая модель контакта, которая в центральной части зоны контакта близка к модели полного сцепления, а у концевых точек штампа к модели сухого трения и допускает простое точное решение. Отметим также, что её несложно применять для любых неклассических оснований, так как во всей контактной зоне условия контакта одинаковые.

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Рассмотрим плоско-деформированное состояние упругой полуплоскости с коэффициентами Ламэ μ и λ , занимающей нижнюю полуплоскость $y \leq 0$ в декартовой системе координат Oxy , когда на ее границу при помощи сосредоточенной нагрузки P_0 вдавлируется абсолютно жёсткий плоский штамп ширины $2a$. Будем полагать, что нагрузка приложена в центральной точке поверхности штампа, вследствие чего поставленная задача симметрична относительно оси Oy и касательные напряжения $\tau_{xy}(x, 0) = \tau(x)$, действующие в зоне контакта, связаны с нормальным контактным давлением под штампом $-\sigma_y(x, 0) = P(x)$ по закону сухого трения, в котором коэффициент трения прямо пропорционален координатам точек соприкасающихся поверхностей, т.е.

$f(x) = f x/a$, где $f(x)$ – коэффициента трения, а f – его максимальное значение, которое меньше единицы.

Тогда, поставленную задачу математически можно записать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} v(x, 0) = \delta; \\ \tau(x) = f \frac{x}{a} P(x) \end{cases} \quad (|x| < a) \quad (1)$$

где $v(x, y)$ – нормальные смещения точек упругой полуплоскости, а δ – жёсткое смещение штампа.

Нетрудно проверить, что указанная связь между нормальным контактным давлением и касательными контактными напряжениями в центральной части зоны контакта близка к модели полного сцепления, а вблизи концевых точек штампа к модели контакта сухого трения. Действительно, нормальное давление и касательные напряжения под штампом, вдавливаемым в упругую полуплоскость со сцеплением даются формулами [3]:

$$P(x) = \frac{(1+\nu)P_0}{\pi\alpha\sqrt{a^2-x^2}} \cos\left(\frac{\ln \alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)\right);$$

$$\tau(x) = \frac{(1+\nu)P_0}{\pi\alpha\sqrt{a^2-x^2}} \sin\left(\frac{\ln \alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)\right),$$

где $\alpha = 3-4\nu$ – постоянная Мусхелишвили, а ν – коэффициент Пуассона. Отсюда

$$\tau(x) = f(x)P(x) \left(f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\ln \alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)\right) \right).$$

Далее, разложив функцию $f(x)$ в ряд Маклорена, получим

$$f(x) = \frac{\ln \alpha}{\pi} \frac{x}{a} + O(x^3).$$

Следовательно, если довольствоваться первым членом разложения, то найдем

$$\tau(x) = \frac{\ln \alpha}{\pi} \frac{x}{a} P(x).$$

С другой стороны, вблизи концевых точек штампа $|x| \approx a$, следовательно предложенная модель в этих зонах примет вид $\tau(x) \approx f \operatorname{sign}(x)P(x)$, что совпадает с законом сухого трения.

Перейдем к решению граничной задачи (1). Для этого заметим, что производная от вертикальных смещений точек контактной зоны полуплоскости на линии $y = 0$ даётся формулой [3]:

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} = -\frac{\alpha - 1}{4\mu} \tau(x) - \frac{\alpha + 1}{4\mu\pi} \int_{-a}^a \frac{P(s) ds}{s - x}. \quad (2)$$

Подставляя это представление в первое из соотношений (1), предварительно продифференцированное по x , и учитывая второе из соотношений (1), придём к следующему определяющему сингулярному интегральному уравнению второго рода с переменными коэффициентами относительно нормального контактного давления:

$$\frac{fx}{a} P(x) + \frac{\alpha}{\pi} \int_{-a}^a \frac{P(s) ds}{s - x} = 0 \quad \left(\alpha = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} > 2 \right). \quad (3)$$

Уравнение (3) нужно рассматривать при условии равновесия штампа:

$$\int_{-a}^a P(x) dx = P_0. \quad (4)$$

Решение определяющего сингулярного интегрального уравнения

Построим точное решение уравнения (3) при условии (4). С этой целью введём в рассмотрение аналитическую во всей комплексной плоскости, разрезанной вдоль интервала $(-a, a)$, и исчезающую на бесконечности комплексную функцию $\Phi(z)$ по формуле

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{P(\tau) d\tau}{\tau - z}. \quad (5)$$

Тогда, используя формулы Племеля-Сохоцкого [9,10]:

$$\Phi^{\pm}(x) = \pm \frac{1}{2} P(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{P(\tau) d\tau}{\tau - x};$$

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = P(x); \quad \Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{P(\tau) d\tau}{\tau - x};$$

уравнения (3) можем записать в виде следующей однородной задачи Римана с переменным коэффициентом:

$$\Phi^+(x) = G(x) \Phi^-(x) \quad (|x| < a) \quad (6)$$

$$\left(G(x) = \frac{fx/a - i\alpha}{fx/a + i\alpha}; \quad (|x| < a) \right)$$

Так как коэффициент задачи Римана $G(x)$ - непрерывная функция, которая не обращается в ноль на интервале $(-a, a)$, то общее решение уравнения (6) неограниченное на обоих концах интервала интегрирования и исчезающее на бесконечности даётся формулой [9,10]:

$$\Phi(z) = C X(z) = \frac{C}{z-a} e^{\Gamma(z)}, \quad (7)$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau - z}$$

а C – неизвестная постоянная, подлежащая определению.

При этом, нужно взять ту ветвь функции $G(x)$, аргумент которой в точке $x = -a$ находится в интервале $(0; 2\pi)$ [9,10]. С этой целью заметим, что $|G(x)| = 1$ и, следовательно, можем записать

$$\ln G(x) = i \arg G(x) = i \arg \left(\frac{fx/a - i\alpha}{fx/a + i\alpha} \right) = i \arg \left(\frac{-(\alpha^2 - f^2 x^2 / a^2) - 2i\alpha fx / a}{f^2 x^2 / a^2 + \alpha^2} \right).$$

Далее, используя формулу [16]:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \quad (|x| < 1),$$

положим

$$\arg G(x) = \pi + \operatorname{arctg} \frac{2\alpha fx / a}{(\alpha^2 - f^2 x^2 / a^2)} = \pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{fx}{\alpha}.$$

В этом случае

$$\ln G(-a) = i\vartheta_1 = i \left(\pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{f}{\alpha} \right); \quad \ln G(a) = i\vartheta_2 = i \left(\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{f}{\alpha} \right).$$

Очевидно, что

$$0 < \vartheta_1 = \arg G(-a) < 2\pi,$$

Тогда в точке $z = -a$ функция $\Phi(z)$ будет иметь особенность $(z+a)^{-\gamma}$ [9,10], где γ определяется формулой

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \arg \ln(G(-a)) = \frac{1}{2} - \beta \left(\beta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{f}{\alpha} \right) \right).$$

Далее, приращение Δ аргумента функции $\ln G(x)$ на интервале $(-a, a)$ будет

$$\Delta = \vartheta_2 - \vartheta_1 = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{f}{\alpha} \right) < \pi \left(\frac{f}{\alpha} < 1 \right)$$

и, следовательно, в точке $z = a$ функция $\Phi(z)$ будет иметь степенную особенность типа $(z-a)^{\gamma'}$, где

$$\gamma' = \frac{\vartheta_1 + \Delta}{2\pi} - \left[\frac{\vartheta_1 + \Delta}{2\pi} \right] - 1 = -\frac{1}{2} + \beta = -\gamma.$$

Теперь определим постоянную C . Для этого заметим, что по формуле (5) функцию $\Phi(z)$ на бесконечности можно представить в виде:

$$\Phi(z) = -\frac{P_0}{2\pi i z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

С другой стороны, учитывая, что на бесконечности интеграл типа Коши стремится к нулю, т.е. $\lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma(z) = 0$, то, по формуле (7), функция $\Phi(z)$ на бесконечности будет вести себя как

$$\Phi(z) = \frac{C}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Сравнивая эти две формулы, найдем $C = -P_0 / 2\pi i$.

Определим контактное давление под штампом. По формулам Племеля-Сохоцкого можем записать:

$$P(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{P_0}{2\pi i(a-x)} \left(e^{\Gamma^+(x)} - e^{\Gamma^-(x)} \right). \quad (8)$$

Так как

$$\Gamma^{\pm}(x) = \pm \frac{1}{2} \ln G(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\ln G(t) dt}{t-x} = \pm \frac{1}{2} \left(i \left(\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{fx}{\alpha a} \right) \right) + g(x)$$

$$\left(g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\ln G(t) dt}{t-x} \right),$$

то

$$P(x) = \frac{P_0}{2\pi i(a-x)} \left(e^{\frac{i}{2} \left(\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{fx}{\alpha a} \right)} - e^{-\frac{i}{2} \left(\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{fx}{\alpha a} \right)} \right) e^{g(x)} =$$

$$= \frac{P_0}{\pi(a-x)} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{fx}{\alpha a} \right) e^{g(x)} = \frac{P_0}{\pi(a-x)} \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{fx}{\alpha a} \right) e^{g(x)} =$$

$$= \frac{\alpha P_0 e^{g(x)}}{\pi(a-x) \sqrt{\alpha^2 + f^2 x^2 / a^2}}. \quad (9)$$

С другой стороны

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\ln G(t) dt}{t-x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{ft}{\alpha a}}{t-x} dt = \ln \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg} \frac{ft}{\alpha a}}{t-x} dt.$$

Подставляя полученное значение $g(x)$ в (9), для контактного давления получим выражение:

$$P(x) = \frac{\alpha P_0}{\pi \sqrt{(a^2 - x^2)}} \frac{e^{\psi(x)}}{\sqrt{f^2 x^2 / a^2 + \alpha^2}}. \quad (10)$$

Здесь

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{ft}{\alpha a} \right)}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{ft}{\alpha a} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{fx}{\alpha a} \right)}{t-x} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{fx}{\alpha a} \right)}{t-x} dt = \psi_1(x) + \beta(x) \ln \left(\frac{a-x}{a+x} \right),$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{ft}{\alpha a}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{fx}{\alpha a}\right)}{t-x} dt;$$

$$\beta(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{fx}{\alpha a}\right) \quad (\beta(a) = \beta).$$

Используя полученное значение функции $\psi(x)$ из (10), после некоторых элементарных выкладок окончательно найдем:

$$P(x) = \frac{\alpha P_0}{\pi(a+x)^{1/2+\beta(x)}(a-x)^{1/2-\beta(x)}} \frac{e^{\psi_1(x)}}{\sqrt{f^2 x^2 / a^2 + \alpha^2}}. \quad (11)$$

Используя поведение интегралов типа Коши в конечных точках интервала интегрирования [8], можно утверждать, что $\psi_1(x)$ - ограниченная функция на всем закрытом интервале $[-a, a]$. Следовательно, из формулы (11) можно заключить, что нормальное контактное давление $P(x)$ на обоих концах основания штампа, как и в задаче Галина Л.А., имеет степенную особенность порядка $1/2 - \beta < 1/2$. При этом, касательные контактные напряжения будут даваться формулой:

$$\tau(x) = \frac{f\alpha x P_0}{\pi a(a+x)^{1/2+\beta(x)}(a-x)^{1/2-\beta(x)}} \frac{e^{\psi_1(x)}}{\sqrt{f^2 x^2 / a^2 + \alpha^2}}$$

Заметим, что когда трение отсутствует, то $f = 0$, $\beta = 0$, $\psi_1(x) = 0$ и из формулы (11) для контактного давления получим выражение

$$P(x) = \frac{P_0}{\pi \sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

которое является решением задачи о вдавливании гладкого, абсолютно жёсткого штампа с плоским основанием в упругую полуплоскость, приведенным в [1].

Приведём также формулу для определения горизонтальной составляющей смещений точек контактной зоны. Для этого используем формулу [3]:

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = -\frac{\alpha - 1}{4\mu} P(x) + \frac{\alpha + 1}{4\mu\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(s) ds}{s - x},$$

которую при помощи уравнения (3) и условия равновесия (4) можно переписать в виде:

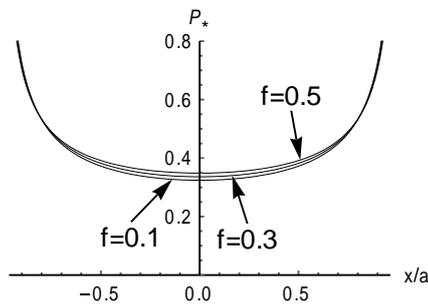
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = \frac{(\alpha+1)f}{4\pi\mu a} P_0 - \frac{(\alpha-1)}{4\mu} \left[1 + \left(\frac{fx}{a} \right)^2 \right] P(x).$$

Отсюда для горизонтальной составляющей смещений получим выражение:

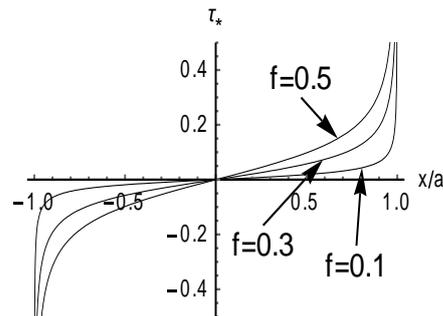
$$u(x) = \int_0^x u'(s) ds = \frac{(\alpha+1)fx}{4\pi\mu a} P_0 - \frac{(\alpha-1)}{4\mu} \int_0^x \left[1 + \left(\frac{fs}{a} \right)^2 \right] P(s) ds \quad (|x| < a).$$

Численные расчёты

Проведён численный расчёт и определены приведённое контактное давление $P_*(x) = aP(ax)/P_0$ и касательные напряжения $\tau_*(x) = a\tau(ax)/P_0$ в случае, когда коэффициент Пуассона полуплоскости $\nu = 0.3$, при различных значениях коэффициента трения f . Результаты вычислений приведены соответственно на Фиг. 1 и 2. Из них явствует, что при увеличении коэффициента трения f нормальное контактное давление мало изменяется, а касательные контактные напряжения по абсолютной величине возрастают.



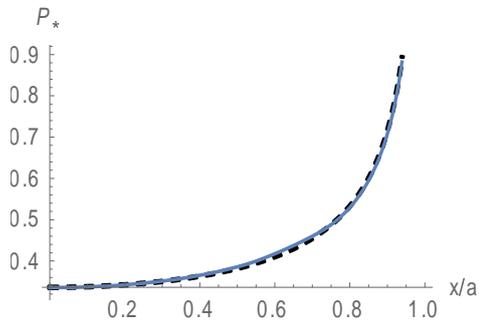
Фиг.1



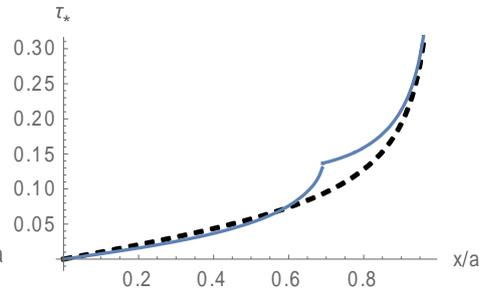
Фиг.2

Проведён также сравнительный анализ полученных контактных напряжений с контактными напряжениями, полученными для той же задачи в случае использования контактной модели, предложенной Л.А. Галиным в случае, когда $\nu = 0.3$ и $f = 0.35$ (Фиг.3,4). На этих рисунках пунктирными линиями приведены графики нормального давления и касательных напряжений, полученные в рамках предлагаемой модели, а сплошными линиями приведены графики этих же величин, полученных в случае применения модели контакта Л.А. Галина [13].

Графики показывают, что контактные давления в обоих случаях мало отличаются друг от друга (Фиг.3). Что же касается касательных контактных напряжений, то они также мало отличаются друг от друга во всей контактной зоне, кроме малых участков вблизи точек, разделяющих зоны сцепления и скольжения.



Фиг.3

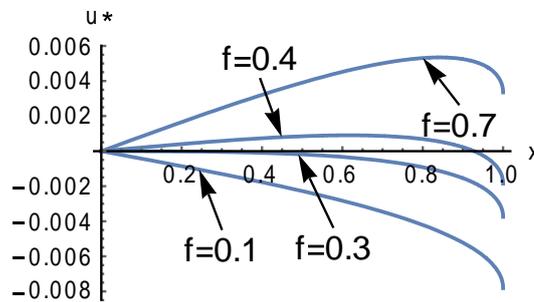


Фиг.4

Вычислены также приведённые горизонтальные смещения точек зоны контакта

$$u_*(x) = \frac{u(ax)}{a} = \frac{(\alpha+1)P_0^*}{4\pi} \left[fx - \frac{\pi(\alpha-1)}{(\alpha+1)} \int_0^x [1+(fs)^2] P_*(s) ds \right] \quad (|x| < 1)$$

в зависимости от максимального значения коэффициента трения, в случае, когда $\nu = 0.3$ и $P_0^* = P_0 / a\mu = 0.1$. Результаты вычислений приведены на Фиг.5.



Фиг.5

Графики показывают, что при малых значениях коэффициента трения, когда $f < 0.3$, смещения точек зоны контакта отрицательные, т.е. все точки смыкаются к центру штампа. В случае, когда $0.3 < f < 0.5$ в средней части контактной зоны смещения положительные, а затем становятся отрицательными, т.е. точки, находящиеся в средней части контактной зоны, удаляются от центра штампа, а точки, находящиеся у концевых точках контактной зоны, смыкаются к центру. В случае же, когда $0.5 \leq f < 1$ смещения всех точек зоны контакта положительные, т.е. все точки контактной зоны удаляются от центра штампа.

Отметим также, что при значениях коэффициента трения $0.28 < f < 0.32$ около центра штампа образуется довольно большая область, в которой горизонтальные смещения имеют порядок 10^{-6} , т.е. фактически равны нулю и можно считать, что в этих зонах имеет место сцепление штампа с упругой полуплоскостью.

Заключение

Таким образом, в работе предложена новая модель контакта абсолютно жёсткого штампа с упругой полуплоскостью с учётом трения. Принято, что во всей контактной зоне имеет место закон сухого трения, в котором коэффициент трения прямо пропорционален координатам точек соприкасающихся поверхностей. Показано, что эта модель в центральной части контактной зоны очень близка модели сцепления, а у краев контактной зоны с общеизвестной моделью сухого трения. Выведено определяющее уравнение задачи в виде сингулярного интегрального уравнения второго рода с переменными коэффициентами и построено его замкнутое решение в квадратурах. Проведён численный эксперимент, результаты которого сравнены с решениями той же задачи, полученными при помощи модели Л.А. Галина. Оказалось, что нормальные контактные давления мало отличаются друг от друга. Что же касается касательных контактных напряжений под штампом, полученных по этим моделям, при выбранных параметрах, они также в основном мало отличаются друг от друга. Однако, в этом случае, различие касательных напряжений возрастает в малых участках вблизи точек разделяющих зоны сцепления и скольжения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта 21Т-2С209

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.- М.:Наука, 1980.- 304с.
2. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. - М.-Л.: Гостехтеориздат, 1947 - 270с.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.-М.: Наука, 1966.-708с.
4. Острик В.И., Улитко А.Ф. Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. Киев, Наукова Думка, 2006, 328с.
5. Nakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies. Advanced Structured Materials, Volume 181, Springer 2022, 397p.
6. Абрамов В.М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жёстким фундаментом при учёте сил трения. Докл. АН СССР, том XVII. N 4, 1937, с.173-178.
7. Галин Л.А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. ПММ, 1945, т. 9, вып. 5, с. 413-424.
8. D. A. Spence An eigenvalue problem for elastic contact with finite friction. - Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Volume 73, №1, January 1973, pp. 249 – 268, DOI: <https://doi.org/10.1017/S0305004100047666>.

9. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968.- 511с.
10. Гахов Ф.Д. Краевые задачи.- М.: Наука, 1977.- 640с.
11. Моссаковский В.И., Бискуп А.Г. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. ДАН СССР, 1972, т. 206, №5, с. 1068-1070.
12. Антипов Ю.А., Арутюнян Н.Х. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления. ПММ, 1991, т. 55, вып. 6, с. 1005-1017.
13. Острик В.И., Контактное взаимодействие кругового штампа с упругим полупространством при наличии трения и сцепления. // Теор. и прикл. механика, 2011, вып.2 (48), с.22-28.
14. Саакян А.В., Решение контактной задачи с зонами трения и сцепления (задача Галина) методом дискретных особенностей. Сб. «Развитие идей Л.А.Галина в механике», посвящённый 100-летию со дня рождения учёного, М.-Ижевск, 2013, сс.103-120.
15. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Dashtoyan L.L., Sahakyan A.V. Indentation of an Absolutely Rigid Thin Inclusion into One of the Crack Faces in an Elastic Plane Under Slippage at the Ends// In Book: Altenbach H., Bauer S., Belyaev K., and other (eds), Advances in Solid and Fracture Mechanics, A Liber Amicorum to Celebrate the Birthday of Nikita Morozov 2022, p.187-197.
16. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды.- М.: Наука, 1981.- 738с.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм–доктор физ.-мат. наук, проф., тел.: (37410) 568188, эл. почта: vhakobyan@sci.am

Акопян Лусине – кандидат физ.-мат. наук, тел.: (37410) 524890, эл. почта: lusine.vahram.hakobyan@gmail.com

Поступила в редакцию 12.04.2023