

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОЙ
ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНАМИ

Агабекян П.В., Арутюнян Л.А.

Ключевые слова: составное тело, трещина, биполярные координаты, функции Папковича-Нейбера, преобразование Фурье.

Aghabekyan P.V., Harutunyan L.A.

Two-dimensional mixed boundary problems of compound plane with cracks

Key words: composite body, crack, bipolar coordinates, Papkovich-Neiber functions, Fourier transformation.

The two-dimensional problem of the theory of elasticity for compound plane consisting of two half-plane is considered with different elastic characteristic and existing between them finite cracks or semi-infinite cracks. Due to Fourier integral in bipolar system of coordinates the problem are solved closed with the help of Papkovich-Neiber function.

Պ.Վ. Աղաբեկյան, Լ.Ա. Հարությունյան

Բաժանման մակերևույթի վրա ճաքեր պարունակող բաղադրյալ հարթության
առաձգականության տեսության հարթ խնդիրներ

Հիմնաբառեր. բաղադրյալ մարմին, ճաքեր, բիպոլյար կոորդինատներ, Պոպկովիչ-Նեյբերի ֆունկցիաներ, Ֆուրյեի ձևափոխություններ:

Դիտարկվում է տարբեր առաձգական հատկություններ ունեցող կիսահարթություններից կազմված բաղադրյալ հարթության համար հարթ կոնտակտային խնդիրներ, երբ կիսահարթությունների միացման գծի երկանքով բաղադրյալ հարթությունը թուլացված է մեկ վերջավոր կամ երկու կիսաանվերջ ճաքերով: Պոպկովիչ-Նեյբերի հարմոնիկ ֆունկցիաների օգնությամբ ճաքերի ավերի վրա տրված ոչ տրադիցիոն խառը եզրային պայմանների դեպքում, երկբևեռ կոորդինատային համակարգում կառուցվում է դրված խնդիրների փակ լուծումները Ֆուրյեի ինտեգրալների տեսքով:

Рассматривается плоская контактная задача теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками, когда составная плоскость по линии контакта ослаблена одной конечной или двумя полубесконечными трещинами. При помощи интегралов Фурье в биполярной системе координат через функции Паповича-Нейбера, при нетрадиционных граничных условиях на краях трещин, построено замкнутое решение этих задач.

Введение

Исследованию контактных и смешанных задач плоской теории упругости для однородной и кусочно-однородной плоскости и полуплоскости, содержащей межфазовые дефекты типа трещин, тонких включений, стрингеров и т. д. посвящено много работ. В этой связи укажем на монографии [1-5], где построены точные или эффективные решения ряда задач в указанной области. Отметим также работы [6-9] и приведенные там ссылки, которые тесно связаны с рассматриваемой здесь задачей. В этих работах, по определению, исследуется напряженно деформированное состояние однородных или кусочно-однородных упругих плоскостей, содержащих разнородные концентраторы

напряжений. Помимо этого, исследуется также взаимовлияние между самими концентраторами напряжений в зависимости от их взаимного расположения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим, отнесенную к декартовой системе координат Oxy упругую кусочно–однородную плоскость, состоящую из двух разнородных полуплоскостей $\Omega_1 (y > 0)$ и $\Omega_2 (y < 0)$ с коэффициентами Ляме G_1, ν_1 и G_2, ν_2 соответственно. Притом, ось Ox направлена по линии соединения разнородных полуплоскостей.

Составная плоскость по линии контакта $y = 0$ ослаблена одной конечной трещиной $L_1 = \{|x| \leq a, y = 0\}$ длиной $2a$ или двумя полубесконечными трещинами вдоль полубесконечных интервалов $L_2 = \{|x| \geq a, y = 0\}$. Для каждого из этих случаев формулируется смешанная краевая задача плоской теории упругости со следующими граничными условиями на берегах трещин:

$$\text{I} \quad \begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(x, +0) = 0; \quad U_1(x, +0) = 0 \\ \sigma_y^{(2)}(x, -0) = P_1(x); \quad \tau_{xy}^{(2)}(x, -0) = q_1(x) \quad x \in L_1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\text{II} \quad \begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(x, +0) = 0; \quad U_1(x, +0) = 0 \\ \sigma_y^{(2)}(x, -0) = P_2(x); \quad \tau_{xy}^{(2)}(x, -0) = q_2(x) \quad x \in L_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $P_i(x)$ и $q_i(x)$ ($i = 1, 2$) заданные нагрузки на берегах трещин, удовлетворяющие условиям разложимости в интегралы Фурье. В обоих случаях предполагается, что на участках $L_1 = \{|x| \geq a, y = 0\}$ – в I задаче, $L_2 = \{|x| \leq a, y = 0\}$ – в II задаче, полуплоскости контактируют в режиме полного контакта. Кроме того принимается, что $\{\sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)}, \tau_{xy}^{(i)} (i = 1, 2)\} \rightarrow 0$, при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$. $\sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)}, \tau_{xy}^{(i)}$, U_i, ν_i – компоненты напряжений и перемещений в областях $\Omega_i (i = 1, 2)$.

При такой постановке следует построить замкнутое решение задачи, позволяющее легко определить основные механические характеристики рассматриваемых задач.

2. Построение решения задач. Решение поставленных задач построим при помощи функции Папковича-Нейбера. Общее решение плоской задачи теории упругости, согласно Папковичу-Нейберу, представляется через три гармонические функции $\Phi_0(x, y), \Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y)$, одна из которых принимается произвольной.

Пользуясь этой произвольностью, $\Phi_1(x, y)$ принимаем тождественно равной нулю.

Перемещения u, v и напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ через функции $\Phi_0(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
2GU(x, y) &= -\frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial x} - y\frac{\partial\Phi_2(x, y)}{\partial x} \\
2GV(x, y) &= (3-4\nu)\Phi_2(x, y) - \frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial y} - y\frac{\partial\Phi_2(x, y)}{\partial y} \\
\sigma_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[2\nu\Phi_2(x, y) + \frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial y}\right] - y\frac{\partial^2\Phi_2(x, y)}{\partial x^2} \\
\sigma_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[2(1-\nu)\Phi_2(x, y) - \frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial y}\right] - y\frac{\partial^2\Phi_2(x, y)}{\partial y^2} \\
\tau_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-2\nu)\Phi_2(x, y) - \frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial y} - y\frac{\partial^2\Phi_2(x, y)}{\partial y}\right]
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Для решения задачи будет использовать биполярные системы координат. Связь прямоугольных координат (x, y) с биполярными координатами (α, β) дается соотношениями [10]:

$$gx = \operatorname{sh}\alpha, \quad gy = \sin\beta, \quad ag = \operatorname{ch}\alpha + \cos\beta \tag{2.2}$$

где a – размерный параметр.

Координата α будет при этом изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. В правой полуплоскости $\alpha > 0$, в левой - $\alpha < 0$, ось Ox является координатной линией $\alpha = 0$, точки $x = \pm a, y = 0$ соответствуют значениям $\alpha = \pm\infty$. Координата β меняется от $-\pi$ до $+\pi$, в верхней полуплоскости $\beta > 0$, в нижней - $\beta < 0$. Отрезок $(-a, a)$ является координатной линией $\beta = 0$. Что касается отрезков оси Ox при $x < -a$ и $x > a$, то здесь координата β терпит разрыв равный 2π , а именно на верхнем берегу $\beta = \pi$, на нижнем берегу $\beta = -\pi$.

Обратимся сначала к I задаче (рис.1)

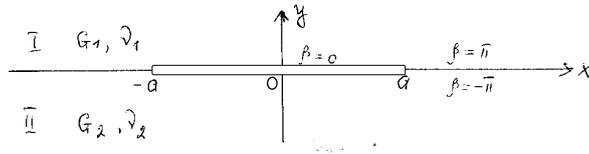


Рис.1

Граничные условия (1.1) в биполярных координатах (α, β) запишутся в виде

$$\sigma_y^{(1)}(\alpha, 0) = 0; \quad U_1(\alpha, 0) = 0; \quad \sigma_y^{(2)}(\alpha, 0) = \sigma_2(\alpha); \quad \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, 0) = \tau_2(\alpha) \tag{2.3}$$

где $\sigma_2(\alpha) \rightarrow P_1(x); \tau_2(\alpha) \rightarrow q_2(x)$, а контактные условия, отражающие условия полного контакта между Ω_1 и Ω_2 – в виде

$$\begin{aligned}
U_1(\alpha, \beta)|_{\beta=\pi} &= U_2(\alpha, \beta)|_{\beta=-\pi}, & V_1(\alpha, \beta)|_{\beta=\pi} &= V_2(\alpha, \beta)|_{\beta=-\pi} \\
\tau_{xy}^{(1)}(\alpha, \beta)|_{\beta=\pi} &= \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, \beta)|_{\beta=-\pi}, & \sigma_y^{(1)}(\alpha, \beta)|_{\beta=\pi} &= \sigma_y^{(2)}(\alpha, \beta)|_{\beta=-\pi}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

При помощи выражения (2.1) граничные условия (2.3) и (2.4), через гармонические функции $\Phi_0^{(m)}(\alpha, \beta)$, $\Phi_2^{(m)}(\alpha, \beta)$ ($m = 1, 2$) запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{G_1} \frac{\partial \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pi} &= \frac{1}{G_2} \frac{\partial \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=-\pi} \\
\frac{1}{G_1} \left[(3-4\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=\pi} &= \\
= \frac{1}{G_2} \left[(3-4\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=-\pi} \\
\frac{\partial}{\partial \beta} \left[2(1-\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=\pi} &= \\
= \frac{\partial}{\partial \beta} \left[2(1-\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=-\pi} \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1-2\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=\pi} &= \\
= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1-2\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=-\pi} \\
\frac{\partial}{\partial \beta} \left[2(1-\nu_m) \Phi_2^{(m)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(m)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=0} &= \frac{a\sigma_m(\alpha)}{\text{ch}\alpha + 1}, \quad (m = 1, 2) \\
\frac{\partial \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1-2\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=0} &= \frac{a\tau_2(\alpha)}{\text{ch}\alpha + 1}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\Phi_3^{(m)}(x, y) = \frac{\partial \Phi_0^{(m)}(x, y)}{\partial y} \quad (m = 1, 2) \tag{2.6}$$

Гармонические функции $\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta)$ ($m = 1, 2$; $n = 2, 3$) ищем в виде интегралов Фурье

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{ch}\lambda\beta + B_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{sh}\lambda\beta \right] \frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda} d\lambda \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.5), приходим к системе алгебраических уравнений для определения величин $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$ ($m=1, 2$; $n=2, 3$), правые части которых будут содержать преобразование Фурье от заданных функций.

После решения этих систем получаем следующие значения для неизвестных величин интегрирования:

$$\begin{aligned} B_2^{(1)}(\lambda) &= \frac{2\bar{\sigma}_1(\lambda)}{1+\chi_1}; & B_3^{(1)}(\lambda) &= 0 \\ A_3^{(2)}(\lambda) &= \bar{\tau}_2(\lambda) - \frac{1-\chi_2}{2} A_2^{(2)}(\lambda); & B_3^{(2)}(\lambda) &= \bar{\sigma}_2(\lambda) + \frac{1+\chi_2}{2} B_2^{(2)}(\lambda) \\ A_2^{(2)}(\lambda) &= A_3^{(1)}(\lambda) - \frac{1+\chi_1}{2} A_2^{(1)}(\lambda) - [\bar{\sigma}_1(\lambda) + \bar{\sigma}_2(\lambda)] \operatorname{cth}\lambda\pi + \bar{\tau}_2(\lambda) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$B_2^{(2)}(\lambda) = - \left[A_3^{(1)}(\lambda) + \frac{1-\chi_1}{2} A_2^{(1)}(\lambda) \right] \operatorname{cth}\lambda\pi + \bar{\tau}_2(\lambda) - \frac{1-\chi_1}{1+\chi_1} \bar{\sigma}_1(\lambda) - \bar{\sigma}_2(\lambda)$$

$$A_2^{(1)}(\lambda) = \frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)}; \quad A_3^{(1)}(\lambda) = \frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= a_{11}(\lambda)a_{22}(\lambda) - a_{12}(\lambda)a_{21}(\lambda) \\ \Delta_1(\lambda) &= a_{22}(\lambda)b_1(\lambda) - a_{12}(\lambda)b_2(\lambda) \\ \Delta_2(\lambda) &= a_{11}(\lambda)b_2(\lambda) - a_{21}(\lambda)b_1(\lambda) \\ a_{11}(\lambda) &= \mu \left[(1-\chi_1\chi_2) \operatorname{ch}2\lambda\pi - \chi_1 + \chi_2 \right], \\ a_{12}(\lambda) &= 2(1+\mu\chi_2) \operatorname{ch}2\lambda\pi - 2(1-\mu) \\ a_{21}(\lambda) &= \mu(1+\chi_1\chi_2) + 2\chi_1, \quad a_{22}(\lambda) = -2(1+\mu\chi_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$b_1(\lambda) = 2\mu \left[(1+\chi_2) \bar{\tau}_2(\lambda) - \frac{1-\chi_1\chi_2}{1+\chi_1} \bar{\sigma}_1(\lambda) \operatorname{sh}2\lambda\pi \right]$$

$$\begin{aligned} b_2(\lambda) &= - \frac{2\bar{\sigma}_1(\lambda)}{(1+\chi_1) \operatorname{sh}2\lambda\pi} \left[(\mu(1+\chi_1\chi_2) + 2\chi_1) \operatorname{ch}2\lambda\pi + \mu(\chi_1 + \chi_2) - 2\chi_1 \right] \\ &\quad - \frac{2\mu(1+\chi_2)}{\operatorname{sh}2\lambda\pi} \bar{\sigma}_2(\lambda) \end{aligned}$$

где

$$\bar{\tau}_2(\lambda) = \frac{ia}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_2(\alpha) e^{i\lambda\alpha}}{\operatorname{ch} \alpha + 1} d\alpha; \quad \bar{\sigma}_m(\lambda) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_m(\alpha) e^{i\lambda\alpha}}{\operatorname{ch} \alpha + 1} d\alpha$$

$$\mu = \frac{G_1}{G_2}, \quad \chi_m = 3 - 4\nu_m \quad (m = 1, 2)$$

Во втором варианте рассматриваемой задачи (рис.2)

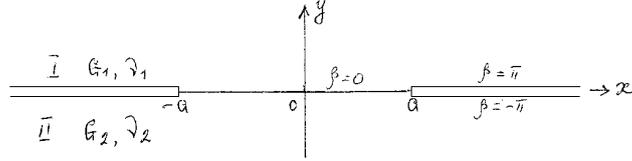


Рис.2

граничные (1.2) и контактные условия запишутся в виде:

$$U_1(\alpha, \pi) = 0, \quad \sigma_y^{(1)}(\alpha, \pi) = \sigma_1(\alpha)$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(\alpha, -\pi) = \tau_2(\alpha), \quad \sigma_y^{(2)}(\alpha, -\pi) = \sigma_2(\alpha)$$

$$U_1(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = U_2(\alpha, \beta)|_{\beta=0}, \quad V_1(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = V_2(\alpha, \beta)|_{\beta=0}$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, \beta)|_{\beta=0}, \quad \sigma_y^{(1)}(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = \sigma_y^{(2)}(\alpha, \beta)|_{\beta=0} \quad (2.10)$$

В этом случае гармонические функции $\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta)$ ($m = 1, 2; n = 2, 3$) ищем в виде интегралов Фурье

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda (\pi + (-1)^m \beta) + \right. \\ \left. + (-1)^{m+1} B_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda (\pi + (-1)^m \beta) \right] \frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda} d\lambda \quad (2.11)$$

После удовлетворения краевым и контактным условиям (2.10), как и в первом случае, для неизвестных постоянных интегрирования $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$ ($m = 1, 2; n = 2, 3$) получим точно совпадающие с (2.8), а для $\bar{\tau}_2(\lambda)$ и $\bar{\sigma}_m(\lambda)$ будем иметь выражения:

$$\bar{\tau}_2(\lambda) = -\frac{ia}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_2(\alpha) e^{i\lambda\alpha}}{\operatorname{ch} \alpha - 1} d\alpha, \quad \bar{\sigma}_m(\lambda) = \frac{(-1)^{m+1} a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_m(\alpha) e^{i\lambda\alpha}}{\operatorname{ch} \alpha - 1} d\alpha \quad (2.12)$$

В заключение рассмотрим частный случай поставленных выше задач, когда на нижних берегах трещин заданы нормальные нагрузки величины P , в точках $y = 0, x = b$, где $b = a \operatorname{th} \frac{\alpha_0}{2}$ в первом случае и $b = a \operatorname{cth} \frac{\alpha_0}{2}$ во втором случае.

Вычислим нормальные и касательные напряжения на линии контакта.

В первом случае получим:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(\alpha, \pi) &= \sigma_y^{(2)}(\alpha, -\pi) = -\frac{K_1 P \operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{K_0+1}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{(x-b)\sqrt{x^2 - a^2}} \\ \tau_{xy}^{(1)}(\alpha, \pi) &= \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, -\pi) = -\frac{K_2 P \operatorname{sh}(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-K_0}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{(x-b)\sqrt{x^2 - a^2}}\end{aligned}\quad (2.13)$$

Во втором случае получим:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(\alpha, 0) &= \sigma_y^{(2)}(\alpha, 0) = -\frac{K_1 P \operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{K_0+1}} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{(b-x)\sqrt{a^2 - x^2}} \\ \tau_{xy}^{(1)}(\alpha, 0) &= \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, 0) = -\frac{K_2 P \operatorname{sh}(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-K_0}} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{(b-x)\sqrt{a^2 - x^2}}\end{aligned}\quad (2.14)$$

$(m=1, 2)$

где

$$\begin{aligned}\alpha - \alpha_0 &= \ln \left| \frac{(a+x)(b-a)}{(a-x)(b+a)} \right|, \quad \cos 2\pi\theta = K_0 \\ K_1 &= \frac{\mu(\chi_2+1)[\mu(\chi_2+1)+\chi_1+1]}{(\mu+\chi_1)(\mu\chi_2+1)}, \quad K_2 = \frac{\mu(\chi_2+1)[\mu(\chi_2-1)+\chi_1-1]}{(\mu+\chi_1)(1+\mu\chi_2)} \\ K_0 &= \frac{\mu(1+\mu\chi_2)(\chi_2-\chi_1)+(\mu-1)[\mu(1+\chi_1\chi_2)+2\chi_1]}{2(\mu+\chi_1)(1+\mu\chi_2)}\end{aligned}\quad (2.15)$$

С другой стороны имеем:

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) \theta &= \frac{1}{2} \left\{ \left| \frac{(a+x)(b-a)}{(a-x)(b+a)} \right|^{\theta} + \left| \frac{(a+x)(b-a)}{(a-x)(b+a)} \right|^{-\theta} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ A^{\theta} \left| \frac{(a+x)}{(a-x)} \right|^{\theta} + A^{-\theta} \left| \frac{(a+x)}{(a-x)} \right|^{-\theta} \right\}, \\ \operatorname{sh}(\alpha - \alpha_0) \theta &= \frac{1}{2} \left\{ A^{\theta} \left| \frac{(a+x)}{(a-x)} \right|^{\theta} - A^{-\theta} \left| \frac{(a+x)}{(a-x)} \right|^{-\theta} \right\}\end{aligned}$$

где

$$A = \left| \frac{b-a}{b+a} \right|.$$

Тогда, в первом случае

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(\alpha, \pi) &= \sigma_y^{(2)}(\alpha, -\pi) = -\frac{K_1 P}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{K_0+1}} \left\{ A^{\mathfrak{G}} \left| \frac{(a+x)}{(a-x)} \right|^{\mathfrak{G}} + A^{-\mathfrak{G}} \left| \frac{(a+x)}{(a-x)} \right|^{-\mathfrak{G}} \right\} \times \\ &\times \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{(x-b)\sqrt{x^2-a^2}} = \\ &= -\frac{K_1 P \sqrt{a^2-b^2}}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{K_0+1}|x-b|} \left\{ \frac{A^{\mathfrak{G}}}{|x+a|^{1/2-\mathfrak{G}}|x-a|^{1/2+\mathfrak{G}}} + \frac{A^{-\mathfrak{G}}}{|x+a|^{1/2+\mathfrak{G}}|x-a|^{1/2-\mathfrak{G}}} \right\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}^{(1)}(\alpha, \pi) &= \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, -\pi) = -\frac{K_2 P \operatorname{sh}(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-K_0}} \cdot \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{(x-b)\sqrt{x^2-a^2}} = \\ &= -\frac{K_2 P \sqrt{a^2-b^2}}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{K_0+1}(x-b)} \left\{ \frac{A^{\mathfrak{G}}}{|x+a|^{1/2-\mathfrak{G}}|x-a|^{1/2+\mathfrak{G}}} - \frac{A^{-\mathfrak{G}}}{|x+a|^{1/2+\mathfrak{G}}|x-a|^{1/2-\mathfrak{G}}} \right\}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом для второго случая будем иметь:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(\alpha, 0) &= \sigma_y^{(2)}(\alpha, 0) = -\frac{K_1 P \operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{K_0+1}} \cdot \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{(b-x)\sqrt{a^2-x^2}} = \\ &= -\frac{K_1 P \sqrt{b^2-a^2}}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{K_0+1}|x-b|} \left\{ \frac{A^{\mathfrak{G}}}{|x+a|^{1/2-\mathfrak{G}}|x-a|^{1/2+\mathfrak{G}}} + \frac{A^{-\mathfrak{G}}}{|x+a|^{1/2+\mathfrak{G}}|x-a|^{1/2-\mathfrak{G}}} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}^{(1)}(\alpha, 0) &= \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, 0) = -\frac{K_2 P \operatorname{sh}(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-K_0}} \cdot \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{(b-x)\sqrt{a^2-x^2}} = \\ &= -\frac{K_2 P \sqrt{b^2-a^2}}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{K_0+1}|x-b|} \left\{ \frac{A^{\mathfrak{G}}}{|x+a|^{1/2-\mathfrak{G}}|x-a|^{1/2+\mathfrak{G}}} - \frac{A^{-\mathfrak{G}}}{|x+a|^{1/2+\mathfrak{G}}|x-a|^{1/2-\mathfrak{G}}} \right\}\end{aligned}$$

Отсюда видно, что контактные напряжения в концевых точках трещин имеют степенную особенность порядка $1/2 + \mathfrak{G}$. Причем, когда $|K_0| \leq 1$ порядок особенности действительное число. В случае же, когда $|K_0| > 1$ порядок особенности комплексное число, т.е. будем иметь степенную особенность с осцилляцией. Отметим, что в случае однородной плоскости $\mathfrak{G} = 1/4$ и контактные напряжения в концевых точках трещин имеют особенность порядка $3/4$.

Заключение.

Построено точное решение для плоской задачи теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими

характеристиками и имеющей между ними конечную или полубесконечные трещины. Получены простые формулы для определения контактных напряжений. Контактные напряжения в концевых точках трещины имеют степенную особенность порядка $\frac{1}{2} + \theta$. Причем, когда $|K_0| \leq 1$ порядок особенности действительное число.

В случае же, когда $|K_0| > 1$ порядок особенности комплексное число, т.е. будет иметь степенную особенность с осцилляцией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М.: Наука, 1982, 344с.
2. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983, 296с.
3. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 445с.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М., Наука, 1983, 488 с.
5. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи взаимодействия сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. "Тигутюн" НАН, 2014, 322с.
6. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, N4, ст.57-65.
7. Даштоян Л.Л. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, с двумя полубесконечными трещинами. Мат. XII респуб. Конф. Мл. уч. Механика, Ер. 2003, ст.75-82.
8. Арутюнян Л.А. Плоская задача составной плоскости с трещинами. Междунар. научно-техн. конф. арх. и стр. 2008, Ереван, ст.34-37.
9. Агаян К.Л. Об одной контактной задаче для бесконечной пластины с трещиной, усиленной упругими накладками.-Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1976, т.29. N4. С.3-15.
10. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968, 401с.

Сведения об авторах:

Арутюнян Левон Арсенович – к.ф.м.н., Институт Механики НАН Армении
Тел.: (37499) 675747
E-mail: arutyunyanlevon@gmail.com

Агабекян Пайкар Вараздатович - к.ф.м.н., Институт Механики НАН Армении
(37493) 248547
E-mail: paykaraghabekyan@gmail.com

Поступила в редакцию 25.04.2023