ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 76, №1, 2023 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.1-37

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ШИРОКОЙ ПАНЕЛИ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ, РАСТЯНУТОЙ ПО СВЕРХЗВУКОВОМУ ПОТОКУ ГАЗА, ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИНЕРЦИОННЫХ МАСС И МОМЕНТОВ

Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: достаточно широкая прямоугольная пластинка, растягивающие силы, сверхзвуковое обтекание, аэроупругая устойчивость, сосредоточенные инерционные массы и моменты, локализованная дивергенция, аналитический метод решения

S.R. Martirosyan

On the stability of a sufficiently wide panel with a free edge stretched along the supersonic gas flow in the presence of pointed inertial masses and moments

Key words: sufficiently wide panel, tensile forces, supersonic flow, aeroelastic stability, pointed inertial masses and moments, localized divergence, analytical solution method

The paper investigates the influence of the initial stress state of a sufficiently wide rectangular elastic plate on the stability of the linear dynamic system "plate-flow" under the assumption that there are concentrated inertial masses and moments on the free edge of the plate stretched along the gas flow. An analytical solution of the systemяxstability problem is found. The possibility of loss of stability of the system only in the form of a localized divergence is shown.
It has been established that the initial longitudinal tensile forces lead to a significant increase in the stability of the system.

Ս.Ռ.Մարտիրոսյան

Գերձայնային գազի հոսքում ձգված լայն ուղղանկյուն սալի աերոառաձգական կայունության մի խնդրի մասին, սալի ազատ եզրին կենտրոնացված իներցիոն զանգվածների և մոմենտների առկայության դեպքում

Հիմնաբառեր՝ բավականի լայն ուղղանկյուն սալ, ձգող ուժեր, գերձայնային շրջհոսում, աերոառաձգական կայունություն, կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, տեղայնացված դիվերգենցիա, անալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է գերձայնային գազի հոսքում ձգված բավականի լայն ուղղանկյուն սալի նախնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը ՛՛սալ – հոսք՛՛ համակարգի կայունության վրա. գազի հոսքը ուղղված է սալի ազատ եզրից դեպի հակադիր հոդակապորեն ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հոդակապորեն ամրակցված եզրերին: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկական լուծումը: Ցույց է տրված, որ առկա է միայն տեղայնացված դիվերգենցիա: Գտնված են կրիտիկական արագությունները, որոնք փաստում են ձգող ուժերի կայունացման ազդեցության մասին:

В статье исследуется влияние первоначального напряжённого состояния достаточно широкой прямоугольной упругой пластинки на устойчивость линейной динамической системы «пластинка–поток»

в предположении, что на свободном крае пластинки, растянутой по потоку газа, имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты. Найдено аналитическое решение задачи устойчивости системы. Показана возможность потери устойчивости системы только лишь в виде локализованной дивергенции.

Установлено, что первоначальные продольные растягивающие силы приводят к существенному повышению устойчивости системы.

Введение. Рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение [1, 2]. Вопрос об упругой устойчивости панелей обшивки летательных аппаратов, представляющих собой плоские пластинки или пологие оболочки, неизбежно возникает на этапе проектирования и конструирования любого летательного аппарата для обеспечения безопасности полета.

Теоретические исследования этих задач позволяют выявить различные виды потери устойчивости, обусловленные характером деформаций, а также, дать оценку влияния комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им. Поэтому, в современных исследованиях особенно важным является изучение динамического поведения системы «пластинка–поток», по возможности, аналитическими методами, наряду с численными.

Исследованию задач аэроупругости посвящено большое количество работ, обзор которых, в основном, содержится в монографиях и в статьях [1–6]. Однако в них, за исключением работы А.А. Мовчана [5], построены приближённые решения и не дана эффективная оценка точности этих приближений.

В предлагаемой работе исследуется влияние первоначальных растягивающих сил на устойчивость невозмущённого движения линейной динамической системы «пластинка–поток» вблизи границ области устойчивости при следующих предположениях. Первоначально растянутая достаточно широкая упругая тонкая прямоугольная пластинка с одним свободным краем и с тремя шарнирно закреплёнными краями обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа в направлении растягивающих сил. Поток газа набегает на свободный край пластинки, вдоль которого приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота [2, 12, 14, 17– 19].

С помощью алгоритма, подробно изложенного в работе [17], получено аналитическое решение задачи устойчивости исследуемой линейной динамической системы.

Получена формула, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего потока газа, позволяющая делать некоторые выводы об устойчивости невозмущённого движения системы.

Исследована граница области устойчивости. Установлено, что в этом случае невозмущённое движение системы теряет устойчивость только в виде локализованной дивергенции – дивергенции, локализованной в окрестности свободного края прямоугольной пластинки, аналогично системе «пластинка–поток» в случае растянутой полубесконечной пластины–полосы, а также, в случае достаточно широких прямоугольных пластинок и полубесконечной пластины–полосы как с ненагруженными краями [17], так и нагруженных сжимающими усилиями [18].

Найдены критические скорости локализованной дивергенции и критические значения коэффициента напряжения в предположении, что в момент «выпучивания» в пластинке возникают только напряжения изгиба.

Показана существенная зависимость критической скорости локализованной дивергенции от коэффициента напряжения сил растяжения и от коэффициента Пуассона.

Данная работа является продолжением работ [20, 21], в которых исследована задача устойчивости системы в случаях удлинённой пластинки и прямоугольной пластинки умеренного размера соответственно. В случае удлинённой пластинки имеет место потеря устойчивости в виде дивергенции панели и панельного флаттера, а в случае прямоугольных пластинок система теряет как статическую устойчивость в виде дивергенции панели и локализованной дивергенции, так и динамическую устойчивость в виде панельного флаттера, в зависимости от размеров пластинки. В данной работе, в отличие от указанных работ, система теряет устойчивость только в виде локализованной устойчивости. При этом, также, первоначальные растягивающие усилия приводят к существенному повышению устойчивости системы «пластинка–поток», в сравнении с системой с ненагруженной панелью [17].

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая достаточно широкая прямоугольная пластинка ($ab^{-1} \geq 1.96$), которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край пластинки $x = 0$ – свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x = 0$ приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c, интенсивность которых на много превосходит интенсивность распределенной массы пластинки [2, 12, 14, 17– 19].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию растягивающих сил $N_x = 2h\sigma_x$, равномерно распределённых по краям $x = 0$ и $x = a$ пластинки, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; растягивающие усилия σ_x предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели, и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y, t)$ [1, 2, 6, 13, 19].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление p на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой $p = -a_0\rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$ «поршневой теории», где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [10, 11]. При этом предполагается, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками p, растягивающими усилиями σ_x в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c, приложенными вдоль её свободного края $x = 0$, в предположении, что усилия σ_x малы по сравнению с предельным значением $(\sigma_x)_{pr.}$, которое не превосходит нижнюю границу текучести; $(\sigma_x)_{pr.}$ – усилие, начиная с которого имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [1, 13, 14].

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности растянутой прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [10, 11] будет описываться соотношением [1, 2, 6]:

$$D\Delta^2 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x, y, t); \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [2, 12, 14]:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \tag{1.2}$$

$$D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - N_x \frac{\partial w}{\partial x} = -m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ при } x = 0;$$

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = a; \tag{1.3}$$

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b; \tag{1.4}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}), \qquad M_0 = \sqrt{2} \quad , \ M_{2\cos m.} \approx 33.85; \tag{1.5}$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) в предположении, что

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{pr.} \tag{1.6}$$

Здесь, M_0 и $M_{2\cos m.}$ – граничные значения числа Маха M, соответствующие интервалу допустимых значений сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2].

Анализ устойчивости невозмущённого движения динамической системы “пластинка–поток” (1.1) – (1.4) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) – (1.4) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале скоростей потока газа (1.5) при условии (1.6).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.4) будем исследовать в случае достаточно широких прямоугольных пластинок:

$$\gamma = ab^{-1} \geq 1.96, \tag{1.7}$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b.

В работе [17] получено аналитическое решение задачи устойчивости невозмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» при $\gamma \in [0, \infty]$ в отсутствии первоначального напряжённого состояния пластинки. В работе [18] исследована задача устойчивости невозмущённого движения системы «пластинка–поток» в случае достаточно широких пластинок, сжатых в направлении, перпендикулярном потоку газа.

В работе [19] получено решение задачи устойчивости (1.1) – (1.4) в статической постановке для всех $\gamma \in [0, \infty]$ по методу Эйлера.

Следует отметить, что согласно обозначению (1.7), значению $\gamma = \infty$ соответствует полубесконечная пластина–полоса – один из предельных случаев прямоугольной пластинки, а соответствующая задача устойчивости является одним из предельных случаев исходной задачи устойчивости (1.1) –(1.4).

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.4). Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости невозмущённого движения динамической системы (1.1) – (1.4) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения.

Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2)–(1.4), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y), \ \mu_n = \pi n b^{-1}, \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое движение системы (1.1) – (1.4) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\,\lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\,\lambda > 0$) [16]. Критическая скорость V_{cr} потока газа, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости невозмущённого движения системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\mathrm{Re}\,\lambda = 0$) [1, 2, 16].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток», описываемое алгебраическим уравнением четвёртой степени

$$r^4 - 2 \cdot (1 + \beta_x^2) \cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + 1 = 0, \tag{2.2}$$

где α_n^3 – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3} \ ; \tag{2.3}$$

β_x^2 – коэффициент напряжения, характеризующий консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2\cdot N_x\, D^{-1}\mu_n^{-2} = h\sigma_x D^{-1}\mu_n^{-2}, \qquad \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr.}\,; \tag{2.4}$$

$(\beta_x^2)_{pr}$ – значение коэффициента напряжения β_x^2, соответствующее $(\sigma_x)_{pr.}$.

Ясно, что

$$\alpha_н^3 \in (a_0^2\rho_0 M_0 D^{-1}\mu_n^{-3},\ a_0^2\rho_0 M_{2\cos m.} D^{-1}\mu_n^{-3}), \tag{2.5}$$

в силу условия (1.5) и обозначения (2.3).

Характеристическое уравнение (2.2) подробно исследовано в работе [19].

В соответствии с известным решением Феррари, уравнение (2.2), как алгебраическое уравнение четвёртой степени, можно представить в виде произведения двух квадратных трёхчленов:

$$\left(r^2+\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot r+q-\sqrt{q^2-1}\right)\left(r^2-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot r+q+\sqrt{q^2-1}\right)=0\,, \tag{2.6}$$

где q – единственный действительный корень кубического уравнения

$$8\cdot(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)-\alpha_n^6=0\,, \qquad q\in R\,. \tag{2.7}$$

Согласно обозначению (2.3), отсюда следует, что, в силу условия (1.5), параметр $q\in R$ характеризует скорость V потока газа при фиксированных значениях остальных параметров системы: $q=q(V)\in\left(q_0,\ q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$.

В работе [19] с помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), записанного в эквивалентной форме (2.6), найден «допустимый» интервал значений параметра $q=q\left(V\right)$:

$$q\in\left(q_0,\ q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right),\ q_0=\left(-(\beta_x^2+1)+2\sqrt{(\beta_x^2+1)^2+3}\right)\Big/3 \ \text{(табл. 1)} \tag{2.8}$$

для всех $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr}$.

Из данных таблицы 1 следует, что функция $q_0=q_0\left(\beta_x^2\right)$ является монотонно возрастающей в интервале $\left[0,\ \left(\beta_x^2\right)_{pr.}\right)$.

Таблица 1.

β_x^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	2.0	5.0	10.0
q_0	1	1.010	1.027	1.065	1.097	1.309	2.163	3.757

При значениях (2.8) характеристическое уравнение (2.2) имеет два отрицательных корня $r_1 < 0$, $r_2 < 0$ и пару $r_{3,4} \in W$ комплексно сопряжённых корней, являющихся решением приравненных нулю сомножителей уравнения (2.6) [19]:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1-\beta_x^2)}\,,\ r_1 < 0\,,\ r_2 < 0\,; \tag{2.9}$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1-\beta_x^2)}\,,\ q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right). \tag{2.10}$$

Тогда, в соответствии с выражениями (2.9) и (2.10), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда [19]:

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4} C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x + \lambda t)\cdot\sin(\mu_n y)\,,\ \gamma \in (0,\infty)\,; \tag{2.11}$$

а в случае полубесконечной пластины–полосы –

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x + \lambda t)\cdot\sin(\mu_n y)\,,\ \gamma = \infty\,, \tag{2.12}$$

в силу условия затухания колебаний на её крае $x = a\ (a = \infty)$ [7–9, 17–19].

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.7), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток» [19]:

$$V(q) = 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}\cdot\pi^3 n^3 D(a_0\rho_0 b^3)^{-1},\ \gamma \in [1.96,\infty], \tag{2.13}$$

Эта формула позволяет по известному значению параметра $q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ определить как скорость потока газа $V(q)$, так и её приведённое значение: $V(q)\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$.

Так как невозмущённое движение системы в случае достаточно широких стальных пластинок $(\gamma \ge 1.96)$ и полубесконечной пластины–полосы $(\gamma = \infty)$ относительной толщины $2hb^{-1} \in [0.006, 0.015]$ устойчиво вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.5) [2, 17–19], то очевидно, что

$$V(q) \in \left(V(q_0),\ a_0 M_{2\cos m.}\right) \subseteq \left(a_0 M_0,\ a_0 M_{2\cos m.}\right) \text{ при } \gamma \in [1.96,\infty]. \tag{2.14}$$

Согласно формуле цилиндрической жёсткости $D = \dfrac{E\cdot(2h)^3}{12\cdot(1-\nu^2)}$ отсюда следует, что

$$V(q)D^{-1}(a_0\rho_0 b^3) \in (V(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0 b^3), a_0 M_{2\cos m}\Psi) \subseteq \left(a_0 M_0,\ a_0 M_{2\cos m}\right)\Psi \tag{2.15}$$

при всех $\gamma \in [1.96,\infty]$,

где

$$\Psi = 12(1-\nu^2)a_0\rho_0 E^{-1}(2hb^{-1})^{-3}. \tag{2.16}$$

Подставляя значения относительной толщины $2hb^{-1} \in [0.006, 0.015]$ пластинки и коэффициента Пуассона ν в выражения (2.15) и (2.16), получаем интервалы $d(\nu, 2hb^{-1}) = (a_0 M_0,\ a_0 M_{2\cos m})\Psi$ допустимых значений приведённых скоростей потока газа $V(q) D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$, представленные в таблице 2 для стальных пластинок.

Таблица 2.

$2hb^{-1}$ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.81,1311.78)	(52.03,1245.27)	(50.52, 1208.98)	(47.70,1141.58)	(41.63,996.35)
0.007	(34.45,811.07)	(32.69,769.41)	(32.01,753.37)	(29.96,705.28)	(26.15,615.52)
0.008	(23.12,544.34)	(21.94,516.37)	(21.48,505.61)	(20.11,473.34)	(17.55,413.10)
0.009	(16.22,381.76)	(15.38,362.14)	(15.06,354.59)	((14.10,331.96)	(12.31,289.71)
0.010	(11.84,283.45)	(11.24,269.09)	(10.91,261.25)	(10.30,246.70)	(8.99,215.32)
0.011	(8.90,209.40)	(8.44,198.64)	(8.09,190.36)	(7.74,182.09)	(6.75,158.91)
0.012	(6.85,164.01)	(6.50,155.72)	(6.32,151.20)	(5.96,142.69)	(5.20,124.60)
0.013	(5.39,126.87)	(5.11,120.34)	(5.01,117.84)	(4.69,110.32)	(4.09'96.28)
0.014	(4.31,101.46)	(4.09,96.24)	(4.00,94.24)	(3.75,88.22)	(3.27,76.99)
0.015	(3.51,84.04)	(3.33,79.73)	(3.23,77.33)	(3.05,73.10)	(2.67,63.81)

Из данных таблицы 2 следует, что интервалы $d(\nu, 2hb^{-1})$ с ростом относительной толщины пластинки $2hb^{-1}$ уменьшаются, примерно, в 15.6 раз при всех фиксированных значениях коэффициента Пуассона ν, а с ростом коэффициента Пуассона ν – уменьшаются в 1.32 раза при фиксированных значениях относительной толщины пластинки $2hb^{-1}$.

3. Достаточные признаки потери устойчивости невозмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4). Перейдём к описанию дисперсионных уравнений – достаточных признаков потери устойчивости невозмущённого движения системы «пластинка–поток» вблизи границ области устойчивости в случае растянутых достаточно широких прямоугольных пластинок $(\gamma \in [1.96, \infty))$ и полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$).

3.1. Растянутые достаточно широкие пластинки $(\gamma \in [1.96, \infty))$.

Подставляя общее решение (2.11) дифференциального уравнения (1.1) в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений, после несложных преобразований, описывается в виде биквадратного уравнения относительно собственного значения λ:

$$F(\lambda) = \chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + (\chi_n A_1 + \delta_n A_2)\lambda^2 + A_3 = 0 \,, \qquad (3.1)$$

где

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3} \,,\ \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1} \,,\ \delta_n > 0 \,,\ \chi_n > 0 \,, \qquad (3.2)$$

приведённые значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки;

$$A_0 = A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2) = \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\left(1 - e^{-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma}\right) B_1 B_2 -$$
$$-2B_2\left(q+1+\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1}\right) e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma} \sinh(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2) -$$
$$-2B_1\left(q+1+\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1}\right) e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma} \cosh(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2) \,; \qquad (3.3)$$

$$A_1 = A_1(q,n,\gamma,\beta_x^2) =$$
$$= 2(q+1+\beta_x^2)\left[(q - \sqrt{q^2-1}) + (q + \sqrt{q^2-1}) e^{-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}\right] B_1 B_2 +$$
$$+2B_2\left[\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}\cdot\left(q+1+\beta_x^2 + \sqrt{(q^2-1}\right)\sinh(\pi n\gamma B_1) +\right.$$
$$\left. +2B_1((2q-1)(q+1) + q\beta_x^2)\cosh(\pi n\gamma B_1)\right]\cos(\pi n\gamma B_2) e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma} +$$
$$+2\left[B_1\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}\left(q+1+\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1}\right)\cosh(\pi n\gamma B_1) +\right.$$
$$\left. +(q+1+\beta_x^2)(q-1+q\beta_x^2)\sinh(\pi n\gamma B_1)\right]\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma} \,; \qquad (3.4)$$

$$A_2 = A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2) = 2(q+1+\beta_x^2)\left(1 + e^{-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}\right) B_1 B_2 -$$
$$-4(q+1+\beta_x^2) B_1 B_2 \cosh(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2) e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma} +$$
$$+2(3(q^2-1) - 2\beta_x^2 - \beta_x^4)\sinh(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2) e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma} \,; \qquad (3.5)$$

$$A_3 = A_3(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2) = \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1}\right)^2 - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2 +\right.$$

$$=\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}B_1B_2\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2+2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)-\right.$$

$$\left.-\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-\left(1-\nu\right)^2+2\beta_x^2\left(q+\sqrt{q^2-1}\right)\right\}e^{-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}\right\}$$

$$+\ 2B_2e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}\left\{\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1}-\right.\right.$$

$$-(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)+(2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1}+2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2-$$

$$\left.-2((2q-1)(\mathrm{q}+1)-q\sqrt{q^2-1}+q\beta_x^2)\nu+\ (\mathrm{q}+1+\beta_x^2+\sqrt{q^2-1})\,\nu^2\ \right]\sinh(\pi n\gamma B_1)+$$

$$\left.+2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}\,(q+1+\beta_x^2)\,B_1\cosh\left(\pi n\gamma B_1\right)\right\}\cdot\cos(\pi n\gamma B_2)+$$

$$+2e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}\left\{-B_1\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1}+\right.\right.$$

$$+(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)-(2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1}+2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2+$$

$$+\ 2((2q-1)(\mathrm{q}+1)+q\sqrt{q^2-1}+q\beta_x^2)\nu-$$

$$\left.(\mathrm{q}+1+\beta_x^2-\sqrt{q^2-1})\,\nu^2\ \right]\cosh(\pi n\gamma B_1)-$$

$$\left.-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)\left(q^2-1\right)}\,(3(q^2-1)-2\beta_x^2-\beta_x^4)\cdot\sinh\left(\pi n\gamma B_1\right)\right\}\sin\left(\pi n\gamma B_2\right); \quad (3.6)$$

$$B_1=\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1-\beta_x^2)},\ \ B_2=\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1-\beta_x^2)}. \quad (3.7)$$

При всех допустимых значениях параметра скорости $q=q(V)$ (2.8) и коэффициента напряжения $\beta_x^2<(\beta_x^2)_{pr.}$ очевидно, что $B_1=B_1(q,\beta_x^2)>0$ и $B_2=B_2(q,\beta_x^2)>0$, откуда следует справедливость неравенств:

$$A_0=A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2)>0\,,\,A_2=A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2)>0\,,\ n\geq1,\gamma\in\left[1.96,\infty\right). \quad (3.8)$$

Вводя обозначение

$$k_n=\chi_n\cdot\delta_n^{-1}=I_c\left(\pi n\right)^2\cdot\left(m_cb^2\right)^{-1}, \quad (3.9)$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.8), перепишется в виде

$$\lambda^4+(k_nA_1+A_2)\chi_n^{-1}A_0^{-1}\lambda^2+\chi_n^{-1}\delta_n^{-1}A_0^{-1}A_3=0\,,\ \delta_n>0\,,\ \chi_n>0,\ k_n>0\,. \quad (3.10)$$

Заметим, что непосредственной подстановкой значения $\beta_x^2=0$ в уравнение (3.10) можно убедиться в его тождественности соответствующему дисперсионному уравнению, полученному в работе [17].

3.2. Растянутая полубесконечная пластина–полоса $(\gamma=\infty)$**.** Подставляя общее решение дифференциального уравнения (1.1) в виде (2.12) в граничные условия (1.2) и (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению, описываемому так же биквадратным уравнением относительно собственного значения λ:

$$\tilde{F}(\lambda)=\chi_n\delta_n\tilde{A}_0\lambda^4+\left(\chi_n\tilde{A}_1+\delta_n\tilde{A}_2\right)\lambda^2+\tilde{A}_3=0\ , \qquad (3.11)$$

где δ_n и χ_n определены выражениями (3.2);

$$\tilde{A}_0=1,\ \tilde{A}_1=\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\cdot\left(q-\sqrt{q^2-1}\right),\ \tilde{A}_2=\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\ , \qquad (3.12)$$

$$\tilde{A}_3=\left(q+1-\sqrt{q^2-1}\right)^2-2\left(q+1\right)\nu-\left(1-\nu\right)^2+2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)\ ; \qquad (3.13)$$

или, в соответствии с обозначением (3.9),

$$\lambda^4+(k_n\tilde{A}_1+\tilde{A}_2)\chi_n^{-1}\tilde{A}_0^{-1}\lambda^2+\chi_n^{-1}\delta_n^{-1}\tilde{A}_0^{-1}\tilde{A}_3=0,\qquad k_n=I_c\frac{(\pi n)^2}{m_c b^2}>0\,. \qquad (3.14)$$

Отсюда очевидно, что

$$\tilde{A}_0>0,\tilde{A}_1>0,\tilde{A}_2>0\,,\ (k_n\tilde{A}_1+\tilde{A}_2)>0\,. \qquad (3.15)$$

Легко показать, что дискриминант уравнения (3.11)

$$\tilde{\Delta}=\tilde{\Delta}\left(q,n,\nu,\beta_x^2,k_n\right)=\left(k_n\tilde{A}_1+\tilde{A}_2\right)^2-4k_n\tilde{A}_0^{-1}\tilde{A}_3>0 \qquad (3.16)$$

при всех $q\in\left(q_0,q\left(a_0M_{2\cos m}\right)\right),\beta_x^2<\left(\beta_x^2\right)_{pr},n,\nu$ и k_n.

В самом деле, подставляя в формулу (3.16) выражения (3.12) и (3.13), после несложных преобразований получаем

$$\tilde{\Delta}=2\left(q+1+\beta_x^2\right)\left(k_n\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)-1\right)^2+4k_n\left(2\left(q+1\right)\nu+\left(1-\nu\right)^2\right)>0\,.$$

Можно показать, что

$$\lim_{\gamma\to\infty}F\left(\lambda\right)=\tilde{F}\left(\lambda\right), \qquad (3.17)$$

откуда следует, что

$$\lim_{\gamma\to\infty}A_3\left(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2\right)=\tilde{A}_3\left(q,\nu,\beta_x^2\right)\ \text{и}$$

$$\lim_{\gamma\to\infty}\Delta\left(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2,k_n\right)=\tilde{\Delta}\left(q,n,\nu,\beta_x^2,k_n\right). \qquad (3.18)$$

Здесь $\Delta\left(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2,k_n\right)$ – дискриминант дисперсионного уравнения (3.1).

Численные исследования показали равносильность дисперсионных уравнений (3.1) и (3.11) с точностью до порядка 10^{-4}, начиная с граничного значения [19]

$$\gamma=\gamma_{gr.}\approx 1.96\,. \qquad (3.19)$$

Соответственно, при всех $\gamma \ge \gamma_{gr} \approx 1.96$ справедливы соотношения:

$$\lim_{\gamma\to\gamma_{gr}} A_3\left(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2\right) = \tilde{A}_3\left(q,\nu,\beta_x^2\right) \text{ и}$$

$$\lim_{\gamma\to\gamma_{gr}} \Delta\left(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2,k_n\right) = \tilde{\Delta}\left(q,n,\nu,\beta_x^2,k_n\right) > 0 \qquad (3.20)$$

с точностью порядка 10^{-4} и более.

Тем самым, поведение возмущённого движения системы «пластинка–поток» вблизи области устойчивости в случае широких прямоугольных пластинок $\left(\gamma \in [1.96,\infty)\right)$ и «полубесконечной пластины–полосы» $\left(\gamma = \infty\right)$ можно считать одинаковым.

3.3. Достаточные признаки статической неустойчивости растянутой прямоугольной пластинки и полубесконечной пластины–полосы в отсутствии обтекания $\left(V = 0\right)$**.** Соответствующие дисперсионные уравнения имеют следующее описание [19]:

$$F_0(n,\gamma,\nu,\beta_x^2) = \sqrt{\frac{\beta_x^2}{2}}\left(4+2\beta_x^2-(1+\nu)^2\right)\cdot\sinh\left(2\pi n\gamma\sqrt{1+\frac{\beta_x^2}{2}}\right)+ \qquad (3.20)$$

$$+\sqrt{1+\frac{\beta_x^2}{2}}\cdot\left(2\beta_x^2+(1-\nu)^2\right)\cdot\sinh\left(2\pi n\gamma\sqrt{\frac{\beta_x^2}{2}}\right)=0,\ \gamma\in[1.96,\infty)\ ;$$

$$F_0\left(\nu,\beta_x^2\right) = 4+2\beta_x^2-(1+\nu)^2 = 0,\ \gamma=\infty. \qquad (3.21)$$

Отсюда, в силу очевидной справедливости неравенств $F_0(n,\gamma,\nu,\beta_x^2) > 0$ и $F_0(\nu,\beta_x^2) > 0$ при всех ν и $\beta_x^2 > 0$ следует, что в отсутствии обтекания невозмущённое состояние равновесия как широких прямоугольных пластинок, так и полубесконечной пластины–полосы – устойчиво при всех значениях параметров.

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.4) для всех $\gamma \in [1.96,\infty]$ сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.11), определяющих собственные движения системы в пространстве «существенных» параметров $\Im = \left\{q(V),n,\gamma,\nu,\beta_x^2,k_n\right\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическое поведение системы. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Введём в рассмотрение в пространстве параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\Im_0$ и области неустойчивости $\Im_1,\Im_2,\Im_3$. В области $\Im_0$ все корни λ_k уравнения (3.11) находятся в левой части комплексной плоскости $(\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0)$; в областях $\Im_1, \Im_2$ и $\Im_3$, соответственно, либо среди корней λ_k имеется один положительный корень, либо имеются два положительных корня, либо имеется пара комплексно сопряжённых корней с положительной вещественной частью [15, 17].

Область устойчивости $\Im_0 \in \Im$ будет определяться соотношениями:

$$k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 > 0\,,\ \tilde{A}_3 > 0\,,\ \tilde{\Delta} > 0\,; \tag{4.1}$$

а области неустойчивости $\Im_l,\ l = \overline{1,3}$ – соответственно, соотношениями:

$$\Im_1:\ k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 > 0\,, \tilde{A}_3 < 0\,, \tilde{\Delta} > 0 \text{ и } k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 < 0\,, \tilde{A}_3 < 0\,, \tilde{\Delta} > 0\,;$$

$$\Im_2:\ k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 < 0\,, \tilde{A}_3 > 0\,, \tilde{\Delta} > 0\,; \tag{4.2}$$

$$\Im_3:\ k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 > 0\,, \tilde{A}_3 > 0\,, \tilde{\Delta} < 0 \text{ и } k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 < 0\,, \tilde{A}_3 > 0\,, \tilde{\Delta} < 0\,.$$

Здесь $\tilde{A}_i,\ i$=1,2,3 – коэффициенты биквадратного уравнения (3.11), а $\tilde{\Delta}$ – его дискриминант, определяемые, соответственно, выражениями (3.12), (3.13) и (3.15).
Границами области устойчивости $\Im_0$ невозмущённого движения системы «пластинка-поток» в пространстве её параметров $\Im$ при условии $k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 > 0$ являются гиперповерхности [15 – 17]:

$$\tilde{A}_3 = 0\,; \tag{4.3}$$

$$\tilde{\Delta} = 0\,. \tag{4.4}$$

Характеристический определитель (3.11) на гиперповерхности (4.3) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2, а на гиперповерхности (4.4) – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Соответственно, уравнение (4.3) определяет границу «апериодической устойчивости», а уравнение (4.4) – «колебательной устойчивости».
В силу условий (3.15) и (3.16) отсюда следует, что граница области устойчивости $\Im_0$ будет определяться только гиперповерхностью (4.3). Это означает, что в случае широких пластинок пространство параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» состоит из двух областей $\Im_0$ и $\Im_1$.

На гиперповерхности (4.3), описываемой в соответствии с выражением (3.13), уравнением

$$\tilde{A}_3 = \left(q + 1 - \sqrt{q^2 - 1}\right)^2 - 2\left(q + 1\right)\nu - \left(1 - \nu\right)^2 + 2\beta_x^2\left(q - \sqrt{q^2 - 1}\right) = 0\,, \tag{4.5}$$

невозмущённое движение системы «пластинка-поток» в зависимости от $\gamma = \gamma\left(\nu, \beta_x^2\right)$ теряет статическую устойчивость или в виде эйлеровой дивергенции панели, или в виде локализованной дивергенции, соответственно, при скоростях потока $V \ge V_{cr.div.}$ и $V \ge V_{locdiv.}$: $\Im_1 = \Im_{div} \cup \Im_{locdiv}$ [17, 19].

В исходной задаче, начиная со значения $\gamma = \gamma_{gr.} \approx 1.96$, при всех значениях $\beta_x^2 < \left(\beta_x^2\right)_{pr.}$, коэффициента Пуассона ν и числа полуволн n невозмущённое движение системы «пластинка – поток» при скоростях потока газа $V \geq V_{locdiv.}$ теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции, подобно полубесконечной пластине – полосе $(\gamma = \infty)$, в силу условий (3.18) – (3.20). Критические скорости $V_{loc.div.}$ разграничивают область устойчивости $\Im_0$ и подобласть локализованной дивергенции $\Im_{locdiv}\left(\Im_1 \Leftrightarrow \Im_{locdiv}\right)$. При скоростях $V \geq V_{loc.div}$ потока газа происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера невозмущённого движения системы от устойчивости к статической неустойчивости в виде локализованной дивергенции: прогибы пластинки локализованы в окрестности её свободного края $x = 0$. Иными словами, граница «апериодической устойчивости» является «безопасной» в смысле Н.Н. Баутина [15]: малое превышение критической скорости локализованной дивергенции соответствует малым дивергентным деформациям, локализованным в окрестности свободного края пластинки.

Из уравнения (4.5) очевидно следует, что её решение $q_{loc.div.} \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ не зависит от параметра $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$. Соответственно, приведённые критические скорости локализованной дивергенции $V_{locdiv.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$, определяемые подстановкой единственного решения $q_{loc.div.} \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ уравнения (4.5) в формулу (2.13), также не зависят от $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$, а зависят лишь от параметров: n, ν и β_x^2.

Из независимости функции $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ от параметра $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$, очевидно следует, что коэффициенты χ_n и δ_n, характеризующие сосредоточенные инерционные моменты поворота I_c и массы m_c, влияют лишь только на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности её свободного края $x = 0$.

Заметим, что уравнение (4.5) тождественно дисперсионному уравнению, полученному в работе [19] при исследовании задачи устойчивости обтекаемой растянутой панели в статической постановке по методу Эйлера. Отсюда следует полная аналогия исходной задачи с задачей, рассмотренной в [19] по методу Эйлера.

Таким образом, в случае широких прямоугольных пластинок $(\gamma \geq 1.96)$ как растянутых $\left(\beta_x^2 \neq 0, \beta_y^2 = 0\right)$, так и с ненагруженными краями $\left(\beta_x^2 = 0, \beta_y^2 = 0\right)$ или сжатых $\left(\beta_x^2 = 0, \beta_y^2 \neq 0\right)$, невозмущённое движение системы «пластинка–поток» теряет только статическую устойчивость, причём в виде локализованной дивергенции, подобно системе в случае «полубесконечной пластины–полосы» $(\gamma = \infty)$, в отличие от систем в случае удлинённых прямоугольных пластинок $(\gamma \le 0.193)$ и пластинок умеренных размеров $(0.193 < \gamma < 1.96)$ [17– 19].

5. Численные результаты. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n,\nu,\gamma,\beta_x^2)\} \in \Im$, параметризованных в пространстве $\Im$ надлежащим образом, при всех n, ν, $\gamma \in [1.96, \infty]$ и $\beta_x^2 < \left(\beta_x^2\right)_{pr.}$.

В этом случае, так же, как и в работах [17 – 19], критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$ является возрастающей функцией от числа полуволн n: её наименьшему значению соответствует $n = 1$.

Результаты численных исследований показали, что невозмущённое движение системы является устойчивым вблизи начала интервала сверхзвуковых скоростей $a_0\sqrt{2}$ для стальных пластинок относительной толщины $2h^{-1}b \in (0.006,\ 0.015]$ при всех значениях коэффициента Пуассона ν, $\beta_x^2 < \left(\beta_x^2\right)_{pr.}$ и $\gamma \in [1.96, \infty]$ в интервале допустимых значений $q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right)$.

Соответственно, цепочки переходов состояний системы будут вида:

$$\Im_0 \xrightarrow{V_{loc.div}} \Im_1 . \tag{5.1}$$

Подставляя решение $q_{loc.div.} \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ уравнения (4.5) в формулу (2.13), получаем значения приведённой критической скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$, представленные для некоторых значений коэффициента напряжения $\beta_x^2 \in [0, 9]$ и коэффициента Пуассона ν в таблице 3 при $n = 1$.

Из данных таблицы 3 следует, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ является монотонно возрастающей функцией от коэффициента напряжения β_x^2: на промежутке $\beta_x^2 \in [0, 9)$ возрастает, примерно, в 7.3 – 13.2 раза; и $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ – монотонно убывающая функция от коэффициента Пуассона ν: в пластинах из материалов с большим значением ν убывает примерно в 2.1 – 3.7 раза.

Из сопоставления данных таблиц 2 и 3, видно, что, начиная с некоторого значения $\beta_x^2 = \left(\beta_x^2\right)_{\min}$ (табл. 4), зависящего от относительной толщины пластинки $2hb^{-1}$ и от коэффициента Пуассона ν, невозмущённое движение системы является устойчивым во всём интервале сверхзвуковых скоростей (1.5). При этом, в случае пластинок относительной толщины $2hb^{-1} \geq 0.0134$ имеем $\left(\beta_x^2\right)_{\min} = 0$ при всех ν.

Таблица 3. Значения приведённой критической скорости $V_{loc.div.} D^{-1} \left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ при $n = 1$.

β_x^2 \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.0	295.777	169.893	143.905	114.913	79.668
0.1	320.066	185.137	157.851	125.899	89.376
0.2	343.781	200.162	170.878	137.475	99.017
0.3	367.460	215.164	184.005	149.031	108.644
0.4	390.646	230.267	197.324	160.807	118.291
0.5	413.830	245.339	210.785	172.568	127.929
0.65	448.678	267.539	231.087	189.848	142.432
0.8	483.527	289.741	250.989	207.322	156.927
0.9	506.117	304.935	264.216	218.846	166.518
1.0	528.912	320.157	277.443	230.348	176.110
1.25	584.939	356.826	310.228	259.093	200.217
1.5	640.968	393.519	343.019	287.734	224.311
1.75	696.314	429.347	375.687	316.358	248.267
2.0	751.660	465.175	408.495	345.000	272.232
3.0	959.171	602.927	539.870	455.202	363.126
4.0	1175.623	748.827	665.512	568.067	459.861
5.0	1392.069	892.701	791.151	680.904	556.008
6.25	1646.576	1062.892	945.398	817.758	721.580
7.5	1901.284	1232.860	1099.797	954.612	887.153
8.75	2155.891	1402.939	1254.115	1153.375	1052.636

Функция $\left(\beta_x^2\right)_{\min} = \left(\beta_x^2\right)_{\min} \left(\nu, 2hb^{-1}\right)$ является убывающей от относительной толщины пластинки $2hb^{-1}$ и возрастающей функцией от коэффициента Пуассона ν: устойчивость системы «пластинка–поток» с большей относительной толщиной пластинок, изготовленных из материалов с меньшим коэффициентом Пуассона, существенно выше (табл. 4).

Таблица 4.

$2hb^{-1}$	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	0.011	0.012	0.013
$\left(\beta_x^2\right)_{\min}$	4.52	2.31	1.12	0.40	0.0	0.0	0.0	0.0
	7.41	4.22	2.31	1.31	0.72	0.23	0.0	0.0
	8.12	4.75	2.75	1.62	0.91	0.35	0.11	0.0
	8.74	5.49	3.25	1.92	1.15	0.64	0.32	0.0
	8.75	5.62	3.51	2.24	1.43	0.85	0.49	0.20

Значения функции $\left(\beta_x^2\right)_{\min} = \left(\beta_x^2\right)_{\min}\left(\nu, 2hb^{-1}\right)$, приведённые в столбцах табл. 4, соответствуют значениям ν = 0.125; 0.25; 0.3; 0.375 и 0.5 соответственно.

Тем самым, первоначальные растягивающие силы достаточно широкой растянутой пластинки ($\gamma \geq 1.96$) приводят к существенному повышению устойчивости невозмущённого движения системы «пластинка–поток».

6. Основные результаты и заключение.

В работе исследуется влияние первоначальных растягивающих сил на устойчивость системы «пластинка–поток» в случае достаточно широких прямоугольных пластинок и «полубесконечной пластины – полосы» $\left(\gamma \in \left[1.96, \infty\right]\right)$ в предположении наличия на их свободном крае сосредоточенных инерционных масс и моментов.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости невозмущённого движения линейной динамической системы «пластинка–поток».

Получены явные выражения дисперсионных уравнений, характеризующие достаточные признаки потери устойчивости.

С помощью графоаналитических и численных методов анализа произведено разбиение многопараметрического пространства состояний системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Исследована граница области устойчивости. Показано, что граница области устойчивости определяется только гиперповерхностью, характеризующей потерю апериодической устойчивости в виде локализованной дивергенции: уравнение, характеризующее потерю колебательной устойчивости не имеет решения.

Найдены критические скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$, в предположении, что в пластинке в момент «выпучивания» возникают только напряжения изгиба.

Показано, что критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$ является монотонно возрастающей функцией от коэффициента напряжения β_x^2 и убывающей функцией от коэффициента Пуассона ν: на промежутке $\beta_x^2 \in \left[0, 9\right]$ возрастает примерно на порядок, в сравнении с первоначально ненагруженной панелью [17], а в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν – убывает примерно в 2.6 – 3.7 раза.

При этом, как оказалось, критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$ не зависит от отношения коэффициентов, характеризующих сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c. Тем самым, сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота влияют только на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности её свободного края $x = 0$.

Найдено минимальное значение коэффициента напряжения $\left(\beta_x^2\right)_{\min}$, зависящее от относительной толщины пластинки $2hb^{-1}$ и коэффициента Пуассона ν, начиная с которого невозмущённое движение системы устойчиво во всём интервале сверхзвуковых скоростей.

Таким образом, в случае достаточно широких пластин $(\gamma \geq 1.96)$ и полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$) первоначальные растягивающие усилия приводят к существенному повышению устойчивости динамической системы «пластинка – поток».

Сравнительный анализ результатов данной работы и работ [17–19] позволяет установить границы применимости метода Эйлера, наряду с применением динамического метода. Сопоставление результатов решения задачи устойчивости динамических систем «пластинка–поток» в случае достаточно широких пластинок и полубесконечной пластины–полосы, полученных применением обоих методов, указывает на хорошее совпадение. Поэтому, при решении подобных задач применение метода Эйлера, как наиболее удобного, вполне оправдано.

Изложенный в данной работе графоаналитический метод исследования может быть применён для получения аналитического решения широкого класса задач устойчивости упругих систем, в частности, при комбинированном нагружении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. // Итоги науки и технологии Механика деформируемых твердых тел. – М.: Наука. 1978. Т.11. С. 67–122.
5. Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // Изв. АН СССР. ПММ. 1957. Т.21. № 2. С. 231–243.
6. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968.
7. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 38–46.
8. Коненков Ю.К. Об изгибной волне “релеевского” типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С. 124–126.
9. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асиптотические методы. – М.: Наука. Физматлит. 1995. 320 с.
10. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
11. Ashley G H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N12. P. 1109–1118.
12. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. № 5. С.33–44.
13. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
14. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука. 1979. 384 с.

15. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
16. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.-Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
17. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
18. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об устойчивости широкой панели со свободным краем, сжатой в направлении, перпендикулярном к скорости сверхзвукового потока газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов // Изв. НАН Армении, Механика. 2021. Т.74 (3), с. 19-36.
19. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции растянутой панели при набегании сверхзвукового потока газа на ее свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 2, с.37–58.
20. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа // Изв. НАН Армении, Механика. 2022. Т.75 (3), с. 64-82.
21. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов // Изв. НАН Армении, Механика. 2022. Т.75 (4), с. 52–73.

Сведение об авторе:
Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 25.12.2022