

**НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ МЕЖФАЗНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ**

Даштоян Л.Л., Акопян Л.В.

**Ключевые слова:** смешанная задача, контактная задача, межфазное включение, изгиб и растяжение балки, периодическая система.

Dashtoyan L., Hakobyan L

**Stress state of a piece-homogeneous plane with periodical system of interfacial deformable inclusions**

**Key words:** mixed boundary value problem, contact problem, interfacial inclusion, bending and stretching of a beam, periodical system

The work considers the plane stress state of a piecewise-homogeneous plane, of two heterogeneous half-planes, which is reinforced by a deformable thin inclusion at the junction of the half-planes and is deformed under action of distributed loads applied to the inclusion. It is assumed the inclusion undergo both tension and bending. A governing system of integro-differential equations with respect to jumps of contact stresses acting on the long sides of the inclusion is derived. The solution of the governing system in the general case is constructed by numerical-analytical method of mechanical quadratures. In the case of an infinite inclusion, an exact solution to the problem is obtained.

**Միջֆազային դեֆորմացվող ներդրակների պարբերական համակարգ պարունակող կտոր առ կտոր համասեռ հարթության լարվածային վիճակը**  
Դաշտոյան Լ.Լ., Հակոբյան Լ.Վ.

**Հիմնաբառեր՝** խառը եզրային խնդիր, կոնտակտային խնդիր, միջֆազային ներդրակ, հեծանի ծռում և ձգում, պարբերական համակարգ

Դիտարկված է երկու տարասեռ կիսահարթությունների միացումից ստացված կտոր առ կտոր համասեռ հարթության հարթ-դեֆորմացիոն վիճակը, երբ այն երկու տարասեռ կիսահարթությունների միացման գծի վրա ուժեղացված է դեֆորմացվող բարակ ներդրակների պարբերական համակարգով և դեֆորմացվում է ներդրակների վրա ազդող նորմալ և շոշափող բաշխված բեռների ազդեցության տակ: Ենթադրվում է, որ ներդրակները ոչ միայն ձգվում են, այլ նաև ծռվում: Օգտագործելով միջֆազային դեֆեկտներ պարունակող բաղադրյալ հարթության համար ստացված խզվող լուծումները, ստացված է խնդրի որոշիչ հավասարումը ներդրակների երկար կողմերին գործող լարումների թռիչքների նկատմամբ Հիլբերտի կորիզով սինգուլյար ինտեգրողիֆերենցիալ հավասարման տեսքով, որի լուծումը, կառուցվել է մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի մեթոդի օգնությամբ:

Рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости, полученной при помощи соединения двух разнородных полуплоскостей, которая на линии стыка полуплоскостей усилена периодической системой деформируемых

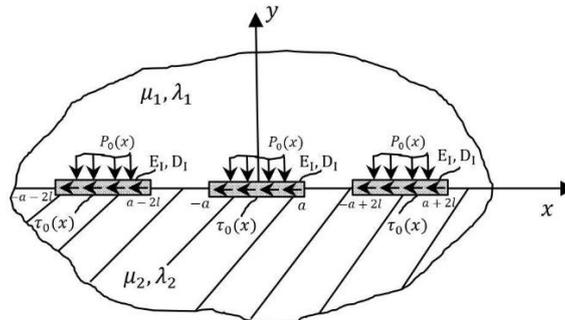
тонких включений и деформируется при помощи нормальных и касательных нагрузок, приложенных к включению. Полагается, что включение подвергается как растяжению, так и изгибу. Используя разрывные решения для кусочно-однородной плоскости с межфазными дефектами, получено определяющее уравнение поставленной задачи в виде сингулярного интегро-дифференциального уравнения с ядром Гильберта относительно комплексной комбинации скачков контактных напряжений, действующих на длинные стороны включений. Решение определяющего уравнения построено численно-аналитическим методом механических квадратур.

**Введение.** Контактное взаимодействие деформируемых тонкостенных элементов типа накладок и включений с однородными и кусочно-однородными массивными телами одно из важных направлений развития контактных и смешанных задач теории упругости. В развитие этого направления контактных и смешанных задач большой вклад внесла школа армянских механиков. Многие результаты в этом направлении, полученные армянскими механиками как для только растягивающихся, так и одновременно растягивающихся и изгибающихся деформируемых накладок и включений приведены в работах [1-4]. Приведем также работы [5-11], где построены решения ряда задач для упругой плоскости и полуплоскости с деформируемыми накладками и включениями. Однако число аналогичных исследований для кусочно-однородных массивных тел с межфазными деформируемыми включениями, где наряду с растяжением включения учтен также и его изгиб, очень мало. В этой связи отметим работу [12], где исследовано плоско-деформированное состояние составной упругой плоскости с конечным или бесконечным межфазным деформируемым включением, одновременно подвергающимся изгибу и растягиванию.

Настоящая работа является продолжением работы [12] и имеет цель, на основе простых моделей растяжения и изгиба балки, изучить напряженно-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости уже с периодической системой межфазных деформируемых тонких включений.

### 1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.

Рассмотрим плоско-деформированное состояние кусочно-однородной упругой плоскости из двух разнородных полуплоскостей с коэффициентами Ламе  $\mu_1, \lambda_1$  и  $\mu_2, \lambda_2$  соответственно, которая отнесена к декартовой системе координат  $Oxy$ , ось  $Ox$  которой совмещена с линией стыка разнородных полуплоскостей. Будем полагать, что кусочно-однородная упругая плоскость по линии соединения разнородных полуплоскостей на интервале  $L = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (-a + 2nl, a + 2nl)$  усилена периодической системой деформируемых тонких включений толщины  $h_l$  с периодом  $2l$ , с приведённым модулем деформаций  $E_l^*$  и жесткостью изгиба  $D_l$ . Полагается также, что плоскость деформируется под воздействием нормальных  $P_0(x)$  и касательных  $T_0(x)$  распределенных нагрузок, действующих на включения (Фиг.1).



Фиг.1

Как и в работе [12], включения будем трактовать как одномерные континуумы, которые под воздействием приложенных к ним нормальных и горизонтальных нагрузок одновременно подвергаются как растяжению, так и изгибу. Причем, вследствие малости толщины включений полагается, что нормальные и осевые смещения всех его точек, находящихся в одном сечении, одинаковы и определяются из независимых уравнений растяжения и изгиба средней линии включения [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_I}{dx^2} &= \frac{1}{h_I E_I^*} [T_0(x) - \tau(x)]; \quad (-a + 2nl < x < a + 2nl) \\ \frac{d^4 v_I}{dx^4} &= -\frac{1}{D_I} [P_0(x) - \sigma(x)], \quad (-a + 2nl < x < a + 2nl) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $v_I(x)$  и  $u_I(x)$  соответственно вертикальные и горизонтальные компоненты смещений средней линии включения,

$$\sigma(x) = \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma_y^{(2)}(x, 0); \quad \tau(x) = \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau_{xy}^{(2)}(x, 0),$$

скачки нормальных  $\sigma_y^{(j)}(x, y)$  и касательных  $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$  ( $j = 1, 2$ ) напряжений, действующих на длинные стороны включений,

$$E_I^* = \frac{E_I}{2(1 - \nu_I^2)}; \quad D_I = \frac{E_I h_I^3}{12(1 - \nu_I^2)},$$

а  $E_I, \nu_I$  и  $h_I$  соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона и ширина включений.

Ставится задача получить определяющую систему уравнений поставленной задачи и построить ее эффективное решение численно-аналитическим методом механических квадратур. При помощи полученных численных результатов выявить особенности закономерностей изменения как нормальных, так и касательных контактных напряжений на сторонах включений.

Вследствие сделанных предположений, в зонах контакта включений с матрицей можно записать следующие условия контакта :

$$\frac{dv_j(x,0)}{dx} = v'_1(x); \quad \frac{du_j(x,0)}{dx} = \varepsilon_l(x) = u'_1(x) \quad (1.2)$$

$$(-a + 2nl < x < a + 2nl; \quad j = 1, 2)$$

Здесь, как и в [12],  $v_j(x, y)$ ,  $u_j(x, y)$  ( $j = 1, 2$ ) соответственно вертикальные и горизонтальные компоненты смещений точек разнородных полуплоскостей, а  $\gamma$  - угол поворота включений в сечение  $x = -a$ .

Из уравнений (1.1), для производных вертикальных и горизонтальных смещений средней линии включений в случае отсутствия перерезывающих сил и моментов на конечных точках включений получим следующие выражения :

$$\frac{du_l}{dx} = \frac{1}{h_l E_l^*} \int_{-a+2nl}^x [T_0(s) - \tau(s)] ds; \quad (-a + 2nl < x < a + 2nl) \quad (1.3)$$

$$\frac{dv_l}{dx} = - \int_{-a+2nl}^{a+2nl} \frac{|x-s|(x-s)}{4D_l} [P_0(s) - \sigma(s)] ds + \gamma; \quad (-a + 2nl < x < a + 2nl)$$

Теперь определим нормальные и горизонтальные составляющие смещений разнородных полуплоскостей на берегах линии  $L$  через компоненты скачков нормальных и касательных напряжений. С этой целью используем разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости с межфазной трещиной, приведенные в [6]. Так как в рассматриваемом случае компоненты дислокации смещений равны нулю, из этих решений получим:

$$v'_1(x, 0) = v'_2(x, 0) = -\frac{d_0}{\Delta} \tau(x) - \frac{d_1}{\pi\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-a+2nl}^{a+2nl} \frac{\sigma(s)}{s-x} ds, \quad (1.4)$$

$$u'_1(x, 0) = u'_2(x, 0) = \frac{d_0}{\Delta} \sigma(x) - \frac{d_1}{\pi\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-a+2nl}^{a+2nl} \frac{\tau(s)}{s-x} ds$$

где, как и в [6],

$$d_0 = \frac{\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}}{2}; \quad d_1 = \frac{\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}}{2}; \quad \vartheta_1^{(j)} = \frac{\mu_j}{2 + \alpha_j}; \quad \vartheta_2^{(j)} = \frac{(1 + \alpha_j)\mu_j}{2 + \alpha_j};$$

$$\Delta = (\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)})^2 - (\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)})^2; \quad \alpha_j = \frac{1}{1 - 2\nu_j}; \quad (j = 1, 2).$$

Далее, подставляя значения производных от нормальных и горизонтальных смещений на берегах линии  $L$  из (1.4) и производные от составляющих смещений средней линии включений из (1.3) в уравнения контакта (1.2), приходим к следующей ключевой системе интегро-дифференциальных уравнений относительно компонентов скачка напряжений на длинных сторонах включения:

$$\begin{aligned}
\frac{d_0}{\Delta} \tau(x) + \frac{d_1}{\pi\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-a+2nl}^{a+2nl} \frac{\sigma(s)}{s-x} ds &= \int_{-a+2ml}^{a+2ml} \frac{|x-s|(x-s)}{4D_I} [P_0(s) - \sigma(s)] ds - \gamma \\
\frac{d_0}{\Delta} \sigma(x) - \frac{d_1}{\pi\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-a+2nl}^{a+2nl} \frac{\tau(s)}{s-x} ds &= \frac{1}{h_l E_l^*} \int_{-a+2ml}^{x+2ml} [T_0(s) - \tau(s)] ds; \\
&(-a+2ml < x < a+2ml; m \in Z)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Полученную систему (1.5) нужно рассматривать совместно с уравнениями равновесия каждого из включений:

$$\begin{aligned}
\int_{-a+2ml}^{a+2ml} \sigma(x) dx &= P_0^*; \quad \int_{-a+2ml}^{a+2ml} \tau(x) dx = T_0^*; \\
\int_{-a+2ml}^{a+2ml} (x-2ml) [\sigma(x) - P_0(x)] dx &= 0, \\
\left( P_0^* &= \int_{-a+2ml}^{a+2ml} P_0(x) dx; \quad T_0^* = \int_{-a+2ml}^{a+2ml} T_0(x) dx; \quad m \in Z \right).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Далее, учитывая, что функции, входящие в (1.5) и (1.6), периодичны с периодом  $2l$ , в каждом из этих уравнений при помощи замены переменных  $s \rightarrow s + 2nl$ ,  $s \rightarrow s + 2ml$  и  $x \rightarrow x + 2ml$  перейдем на интервал  $(-a, a)$  и поменяем порядок суммирования и интегрирования. Затем используя соотношение [13]:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi - x + 2lk} = \frac{\pi}{2l} \operatorname{ctg} \frac{\pi(\xi - x)}{2l},$$

придем к следующей системе ключевых уравнений для поставленной задачи:

$$\begin{aligned}
\frac{d_0}{\Delta} \tau(x) + \frac{d_1}{2l\Delta} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} \sigma(s) ds &= \\
= \int_{-a}^a \frac{|x-s|(x-s)}{4D_I} [P_0(s) - \sigma(s)] ds - \gamma &\quad (-a < x < a)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\frac{d_0}{\Delta} \sigma(x) - \frac{d_1}{2l\Delta} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} \tau(s) ds = \frac{1}{h_l E_l^*} \int_{-a}^x [T_0(s) - \tau(s)] ds;$$

При этом условия (1.6) примут вид:

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a \sigma(x) dx &= P_0^*; \quad \int_{-a}^a \tau(x) dx = T_0^*; \quad \int_{-a}^a x [\sigma(x) - P_0(x)] dx = 0, \\
\left( P_0^* &= \int_{-a}^a P_0(x) dx; \quad T_0^* = \int_{-a}^a T_0(x) dx; \quad n \in Z \right).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Аналогичным образом, используя соотношения для контактных напряжений, действующих на длинные стороны включений, приведенные в [12], получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \frac{l_0}{\Delta} \sigma(x) + \frac{l_2}{2l\Delta} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} \tau(s) ds; \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= \frac{l_0}{\Delta} \tau(x) - \frac{l_2}{2l\Delta} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} \sigma(s) ds; \\ \sigma_y^{(2)}(x, 0) &= \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma(x); \quad \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau(x).\end{aligned}\tag{1.9}$$

Таким образом, как и следовало ожидать, все полученные уравнения и соотношения идентичны с уравнениями и соотношениями для одного включения, полученные в [12], с той лишь разницей, что вместо ядра Коши здесь фигурирует ядро Гильберта.

**Решение ключевой системы уравнений.** Решение системы уравнений (1.7) будем строить численно-аналитическим методом механических квадратур [14]. Для этого первое уравнение этой системы умножим на  $-i$  и просуммируем со вторым. В итоге, введя комплексную комбинацию скачков напряжений  $\varphi(x) = \sigma(x) - i\tau(x)$  и отделив главную часть ядра интегрального уравнения в виде ядра Коши, систему (1.7) запишем в виде одного интегрального уравнения:

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \frac{iq}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi(s)}{s-x} ds + \int_{-a}^a K_1(x, s) \varphi(s) ds + \\ + \int_{-a}^a K_2(x, s) \bar{\varphi}(s) ds = f(x) + i\gamma \frac{\Delta}{d_0} \quad (-a < x < a)\end{aligned}\tag{1.10}$$

где, на этот раз

$$\begin{aligned}K_1(x, s) &= \frac{q}{2il} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} - \frac{2l}{\pi(s-x)} \right] + \frac{\Delta}{4id_0 D_l} \left[ \frac{|x-s|(x-s)}{2} - \frac{h_l^2 H(x-s)}{3} \right]; \\ K_2(x, s) &= \frac{\Delta}{4id_0 D_l} \left[ \frac{|x-s|(x-s)}{2} + \frac{h_l^2 H(x-s)}{3} \right]; \quad q = d_1 / d_0; \\ f(x) &= -\frac{\Delta i}{2d_0 D_l} \int_{-a}^a \left[ \frac{|x-s|(x-s)}{2} P_0(s) - \frac{h_l^2 H(x-s) T_0(s)}{3} \right] ds,\end{aligned}$$

$H(x)$  - известная функция Хевисайда, а черточка над функцией  $\varphi(x)$  обозначает ее комплексно сопряженную величину. Теперь, при помощи замены переменных  $x = at$  и  $s = a\tau$  сформулируем уравнение (1.10) на интервале  $(-1, 1)$ . Получим:

$$\psi(t) - \frac{qi}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\tau)}{\tau-t} d\tau + \int_{-1}^1 K_1^*(t, \tau) \psi(\tau) d\tau + \int_{-1}^1 K_2^*(t, \tau) \bar{\psi}(\tau) d\tau = f_*(t) + iA\gamma \quad (1.11)$$

$$(-1 < t < 1)$$

Здесь введены обозначения:

$$K_1^*(t, \tau) = \frac{q}{2il_*} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi(\tau-t)}{2l_*} - \frac{2l_*}{\pi(\tau-t)} \right] + \frac{B}{2i} \left[ \frac{|t-\tau|(t-\tau)}{2} - \frac{4h_*^2 H(t-\tau)}{3} \right];$$

$$K_2^*(t, \tau) = \frac{B}{2i} \left[ \frac{|t-\tau|(t-\tau)}{2} + \frac{4h_*^2 H(t-\tau)}{3} \right];$$

$$f_*(t) = -2iB \int_{-a}^a \left[ \frac{|t-\tau|(t-\tau)}{2} P_0^*(\tau) - \frac{4h_*^2 H(t-\tau)}{3} T_0^*(\tau) \right] d\tau; \quad h_* = \frac{h_l}{2a};$$

$$\psi(t) = \frac{a\varphi(at)}{|N_0|}; \quad P_0^*(t) = \frac{P_0(at)}{|N_0|}; \quad T_0^*(t) = \frac{T_0(at)}{|N_0|}; \quad N_0 = P_0^* - iT_0^*;$$

$$A = \frac{a\Delta}{|N_0|d_0}; \quad B = \frac{\Delta a^3}{2d_0D_l}; \quad \int_{-1}^1 P_0^*(t) dt = P_0^*; \quad \int_{-1}^1 T_0^*(t) dt = T_0^*.$$

Условия (1.8) при этом примут вид:

$$\int_{-1}^1 \psi(t) dt = N_0^*; \quad \int_{-1}^1 \operatorname{Re} [t \psi(t)] dt = M_0; \quad (1.12)$$

$$\left( N_0^* = \frac{N_0}{|N_0|}; \quad M_0 = \int_{-1}^1 \frac{aP_0(at)}{|N_0|} t dt \right).$$

Несложно заметить, что функция  $\psi(t)$  в конечных точках интервала интегрирования  $\pm 1$  имеет ту же особенность, что и в случае одного включения, так как главная часть полученного интегрального уравнения полностью совпадает с главной частью интегрального уравнения аналогичной задачи для одного включения. Следовательно, функция  $\psi(t)$  в точках  $\pm 1$  имеет осциллирующую особенность и ее, как и в [12], можно представить в виде :

$$\psi(t) = \frac{\Psi^*(t)}{(1+t)^{1/2-i\beta} (1-t)^{1/2+i\beta}} \left( \beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\varkappa_2(\mu_1 + \varkappa_1\mu_2)}{\varkappa_1(\mu_2 + \varkappa_2\mu_1)} \right) \quad (1.13)$$

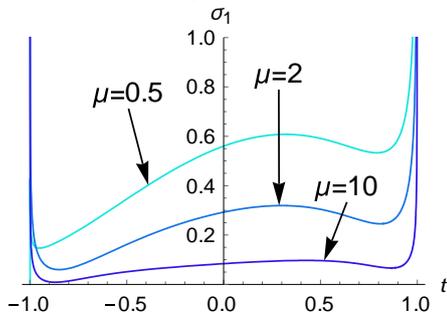
где функция  $\Psi^*(t)$  - непрерывная ограниченная функция на замкнутом интервале  $[-1, 1]$ ,  $\varkappa_j = 3 - 4\nu_j$  ( $j = 1, 2$ ) - постоянные Мусхелишвили, а  $\nu_j$  ( $j = 1, 2$ ) - коэффициенты Пуассона разнородных полуплоскостей.

Используя представления (1.13), уравнение (1.11), по обычной процедуре, сведем к системе линейных алгебраических уравнений для определения значений функции

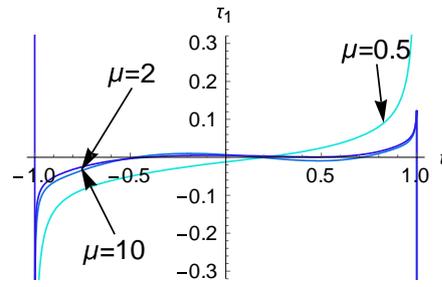
$\psi^*(t)$  в узлах квадратурной формулы  $\xi_i (i = \overline{1, n})$  и постоянной  $\gamma$ . После решения этой системы, при помощи формулы Лагранжа, восстанавливается функция  $\psi^*(t)$  и определяются все необходимые физико-механические характеристики поставленной задачи.

**Некоторые численные результаты.** Проведён численный расчёт и изучены закономерности изменения безразмерных контактных напряжений  $\sigma_1(t)$  и  $\tau_1(t)$  на длинных сторонах включения, а также постоянной  $\gamma$ , представляющей угол поворота левого торца включения ( $x = -a$ ), в зависимости от соотношений  $\mu = \mu_2 / \mu_1$  и  $l_* = l / a$  в случае фиксированных значений коэффициентов Пуассона  $\nu_j (j = 1, 2)$ , модуля упругости включений  $E_I$ , относительной толщины включения  $h_* = h_I / 2a$ , когда  $aP_0(xa) / |N_0| = \cos(x - 0.2)$ ,  $aT_0(xa) / |N_0| = 0.5x$ .

Результаты численных расчётов приведены на Фиг. 2 и Фиг.3. На Фиг. 2а и 2б приведены соответственно графики безразмерных нормальных и касательных контактных напряжений в зависимости от параметра  $\mu$  в случае, когда  $\nu_1 = 0.3$ ,  $\nu_2 = 0.25$ ,  $E_I / \mu_1 = 20$ ,  $l_* = 1.5$  и  $h_* = 0.1$ . Как и следовало ожидать контактные напряжения в зависимости от  $\mu$  ведут себя так же, как и в случае одного включения, т.е. увеличение параметра  $\mu = \mu_2 / \mu_1$  приводит как к уменьшению нормальных напряжений в средней части зоны контакта, так и к уменьшению касательных контактных напряжений по абсолютной величине во всей зоне контакта.

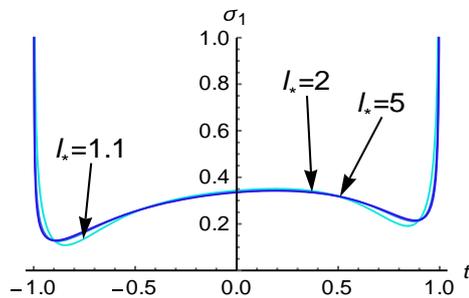


Фиг. 2а

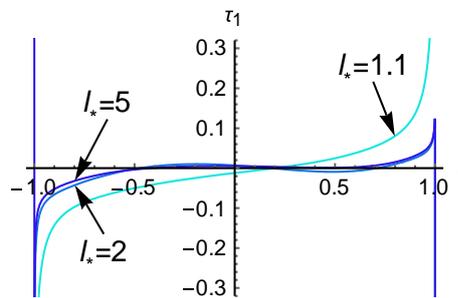


Фиг. 2б

На Фиг. 3а и 3б приведены соответственно графики безразмерных нормальных и касательных контактных напряжений для значений  $l_* = 1.1, 2, 5$  в случае, когда  $\nu_1 = 0.3$ ,  $\nu_2 = 0.25$ ,  $E_I / \mu_1 = 20$ ,  $\mu = 2$  и  $h_* = 0.1$ .

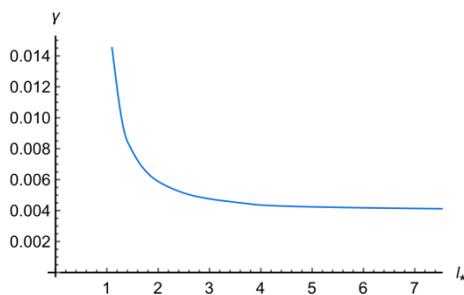


Фиг. 3а

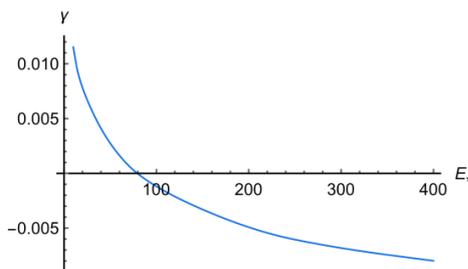


Фиг. 3б

Из них видно, что при выбранных значениях параметров как нормальные, так и касательные контактные напряжения мало зависят от параметра  $l_*$ . При этом, как явствует из графика для угла поворота  $\gamma$  (фиг.4), при увеличении параметра  $l_*$  угол поворота  $\gamma$  уменьшается, стремясь к определенной величине, которая соответствует значению поворота  $\gamma$  в случае одного включения.



Фиг.4



Фиг.5

Изучена также закономерность изменения угла поворота  $\gamma$  в сечении  $x = -a$  в зависимости от соотношения  $E_* = E_I / \mu_1$ . Численные расчеты показывают (Фиг.5), что в случае выбранных нагрузок, при увеличении  $E_*$ , что можно трактовать как увеличение жесткости включения при постоянном  $\mu_1$ , угол поворота  $\gamma$  уменьшается, меняет знак, становясь отрицательным, что при выбранных нагрузках вполне логично, и стремится к определенному пределу, соответствующему случаю, когда включение абсолютно жесткое.

**Заключение.** Изучено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости с периодической системой межфазных деформируемых включений, которые одновременно подвергаются растяжению и изгибу. При помощи разрывных решений уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости и простых моделей растяжения и изгиба балки выведены определяющие уравнения поставленной задачи в виде системы сингулярных интегро-дифференциальных

уравнений с ядром Гильберта. Решение системы определяющих уравнений построено численно-аналитическим методом механических квадратур. При помощи численных расчетов показано, что контактные напряжения мало зависят от периода включений, а угол поворота  $\gamma$  в сечении  $x = -a$  включения при увеличении периода уменьшается, стремясь к определенному пределу. Показано также, что при увеличении жесткости включения угол поворота  $\gamma$  стремится к постоянному значению, представляющему угол поворота абсолютно жесткого включения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.- М.: Наука, 1983.- 488с.
2. Ефимов А.Б., Малый В.И., Толкачева Н.М. Контактная задача для упругого тела с тонким покрытием, МТТ, 1969, №1, с.166-171.
3. Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином, ПММ, 1975, т.39, вып. 6, с. 1100-1109.
4. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. //Изд. ЕГу, Ереван 1983, 255с/
5. Григорян Э.Х. Изгиб полубесконечной балки, лежащей на упругой полуплоскости, Изд. НАН Армении, Механика, 1992, т. 45, №1-2, с.11-26
6. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Издательство Гитутюн НАН РА, Ереван -2014, 322с.
7. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О задаче изгиба полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости, Изд. НАН РА, Механика, 2008, т. 61, №4, с. 5-19
8. Агаян К.Л. Изгиб двух полубесконечных балок на крае упругой полуплоскости плоским штампом, Изд. НАН РА, Механика, 2010, т. 63, №4, с.3-11.
9. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Контактная задача для упругой кусочнооднородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. //Изв. НАН РА. Механика. 2009. Т.62. №3. С.29-43.
10. В.Н.Акопян, А.А.Амирджанян напряжённое состояние кусочно-однородной равномерно слоистой плоскости с системой периодических параллельных внутренних включений // Известия НАН РА, Механика, т.71, № 2, 2018г, с. 3-17. <http://doi.org/10.33018/71.2.1>
11. Nakobyan V., Dashtoyan L. Doubly periodic problem for piecewise homogeneous plane with absolutely rigid inclusions // Proceedings of 8th International Conference Contemporary Problems of Architecture and Construction, Yerevan, 2016, pp.125-128

12. Акопян Л.В., Амирджанян А.А., Даштоян Л.Л., Джилаван С.А Напряжённое состояние кусочно-однородной плоскости с межфазным деформируемым включением// Известия НАН РА, Механика, т.74, № 4, 2021г, с.18-28.
13. Брычков.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций.- М.: Наука, 1977.- 287с.
14. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070

#### **Сведения об авторах.**

**Акопян Лусине Ваграмовна** – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник  
Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90

**Даштоян Лилит Леоновна** – к.ф.-м.н., ученый секретарь Института механики НАН  
РА, (37410) 52-48-90, e-mail: [Lilit\\_Dashtoyan@mechins.sci.am](mailto:Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am)

Поступила в редакцию 16.01.2023