

ОТРАЖЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН ОТ ГРАНИЦЫ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ УСЛОВИИ СКОЛЬЖЕНИЯ С ТРЕНИЕМ

Амирджанян А.А., Геворгян Г.З., Дарбинян А.З.

Ключевые слова: падающая волна, продольные и поперечные волны, трение, отражение упругих волн

Amirjanyan A.A., Gevorgyan G.Z., Darbinyan A.Z.

Reflection of elastic waves from the boundary of a half-space under the condition of sliding with friction

Keywords: incident wave, longitudinal and transverse waves, friction, reflection of elastic waves

The problem of reflection of longitudinal and transverse waves from the boundary of a half-plane is considered. It is assumed that boundary conditions are a generalization the sliding contact and assume that the tangential stresses do not vanish, but obey the law of dry friction. Analytical expressions are obtained for the ratios of the amplitudes of reflected waves to the amplitude of an incident longitudinal or transverse wave. A numerical analysis of the dependence of these ratios on the wave incidence angle, friction coefficient, and Poisson's ratio is carried out. It is shown that when the direction of the boundary shear stresses and the direction of propagation of the incident both longitudinal and transverse waves coincide, there are critical angles of incidence at which the amplitudes of the reflected waves become infinite.

Ամիրջանյան Հ.Ա., Գևորգյան Գ.Զ., Դարբինյան Ա.Զ.

Մտածական ալիքների անդրադարձումը կիսատարածության եզրից՝ շփումով սահքի պայմանի դեպքում

Հիմնաբառեր՝ ընկնող ալիք, երկայնական, լայնական ալիքներ, ալիքների անդրադարձում, շփում

Դիտարկված է կիսատարածության եզրից երկայնական և ընդլայնական ալիքների անդրադարձման խնդիրը, երբ տրված են եզրային պայմաններ, որոնք ընդհանրացնում են սահող կոնտակտի պայմանները, ենթադրելով, որ շոշափող լարումները ոչ թե զրոյական են, այլ ենթարկվում են չոր շփման օրենքին: Մտացված են անալիտիկ արտահայտություններ անդրադարձած ալիքների ամպլիտուդների և ընկնող երկայնական կամ ընդլայնական ալիքի ամպլիտուդի հարաբերությունների համար: Կատարված է թվային վերլուծություն այդ հարաբերությունների կախվածությունը ալիքի անկման անկյունից, շփման գործակցից և Պուասոնի գործակցից պարզելու համար: Ցույց է տրված, որ երբ եզրային շոշափող լարումների ուղղությունը համընկնում է ընկնող և երկայնական և ընդլայնական ալիքների տարածման ուղղության հետ գոյություն ունեն անկման կրիտիկական անկյուններ, որոնց դեպքում անդրադարձված ալիքների ամպլիտուդները ձգտում են անվերջի:

Рассмотрена задача отражения продольных и поперечных волн от границы полуплоскости, на которой заданы условия, обобщающие скользящий контакт и предполагающие, что тангенциальные напряжения не обращаются в ноль, а подчиняются закону сухого трения. Получены аналитические выражения для отношений амплитуд отраженных волн к амплитуде падающей продольной или поперечной волны. Проведен численный анализ зависимости этих отношений от угла падения волны, коэффициента трения и коэффициента Пуассона. Показано, что при совпадении направления граничных касательных напряжений и направлением распространения падающей как продольной, так и поперечной волны существуют критические углы падения, при которых амплитуды отраженных волн обращаются в бесконечность.

Введение. При исследовании распространения волн в упругих средах, обычно, на границе раздела сред рассматриваются четыре типа граничных условий: закреплённый край, свободный край, условия типа Навье, скользящий контакт (анти-Навье) [1-16]. В настоящее время появился ряд статей, в которых предполагаются более сложные граничные условия, в том числе с учётом трения [3,4,17]. Однако существование таких граничных условий требует обоснования. Корректность постановки задач с усложнёнными граничными условиями наиболее просто можно проверять на примере исследования задач отражения упругих волн от границы с усложнёнными условиями. При этом задачи отражения также удобны для постановки экспериментов.

В настоящей работе исследуется задача отражения упругих волн от границы полуплоскости, на которой заданы условия, обобщающие скользящий контакт, полагая, что тангенциальные напряжения не обращаются в ноль и подчиняются закону сухого трения. В основу такой постановки задачи легли идеи профессора М.В. Белубекяна.

1. Постановка задачи. Упругая полуплоскость в прямоугольной декартовой системе координат Oxy занимает область $\{-\infty < x < \infty, 0 \leq y < \infty\}$ и на ее границу под углом падает плоская волна. В рамках задачи плоской деформации

$$u = u(x, y, t), \quad v = v(x, y, t), \quad w = 0 \quad (1.1)$$

исследуется волновое поле после отражения падающей волны от границы полуплоскости.

Известно, что при помощи представления Ламе [11]

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1.2)$$

система уравнений движения разбивается на два отдельных уравнения

$$\Delta \varphi = \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \Delta \psi = \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

В (1.3) c_e, c_t представляют собой скорости распространения продольных и поперечных волн

$$c_e^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_t^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.4)$$

где λ, μ - коэффициенты Ламе материала полуплоскости.

На границе полуплоскости заданы условия

$$v = 0, \quad \sigma_{yx} = \gamma \sigma_{yy} \quad \text{при } y = 0, \quad (1.5)$$

которые являются обобщением обычных условий скользящего контакта, имеющих место при $\gamma = 0$, и называются условиями скользящего контакта с трением. Поскольку физически условия скользящего контакта либо представляют собой условия симметрии, либо предполагают наличие на линии $y = 0$ жесткой гладкой преграды, то условия (1.5) предполагают наличие трения между жесткой преградой и границей полуплоскости с коэффициентом трения γ .

Очевидно, что в динамической постановке второе условие в (1.5) может вызвать вопросы, связанные со значением тангенциального напряжения при отрицательных нормальных напряжениях. Во избежание таких вопросов, предположим, что упругая полуплоскость находится в предварительно напряженном состоянии, создаваемом статическим давлением движущейся с постоянной скоростью вдоль оси Ox жесткой преграды. Полагая, что нормальные контактные напряжения и связанные с ними, по закону сухого трения с коэффициентом трения γ , тангенциальные контактные напряжения превосходят соответствующие нормальные и касательные напряжения, возникающие на границе вследствие волновых процессов, и учитывая линейность уравнений движения теории упругости, использование граничных условий (1.5) при исследовании волновых процессов можно считать правомерным.

При помощи представлений (1.2) граничные условия (1.5) запишутся в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

$$\mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = \gamma \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \right) \quad (1.6)$$

Построим решения системы (1.3) при условиях (1.6) в двух случаях, когда на границу полуплоскости под некоторым углом падает: а) продольная волна и б) поперечная волна.

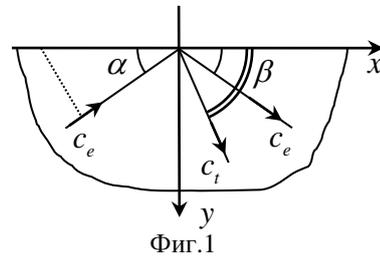
При этом важную роль играет направление движения указанной выше преграды – по направлению распространения падающей волны или против него. Если полагать, что угол падения волны изменяется в интервале $(0, \pi/2)$, то надо будет в отдельности рассматривать случаи $\gamma \geq 0$ и $\gamma < 0$. С другой стороны, можно принять $\gamma \geq 0$, а интервал изменения угла падения расширить до $(0, \pi)$. При этом для угла падения α из интервала $(0, \pi/2)$ мы будем иметь ситуацию совпадения направлений, а при $\pi/2 < \alpha < \pi$, полагая в качестве угла падения угол $\pi - \alpha$, будем иметь противоположную ситуацию. Далее, будем полагать $\gamma \geq 0$ и $\alpha \in (0, \pi)$.

2. Продольная волна. Пусть на границу полуплоскости $y = 0$ под углом α падает продольная волна (фиг.1), которую, в согласии с первым уравнением (1.3), представим в виде

$$\varphi_{пад} = A_{пад} \exp i(\omega t - k_1 x + k_2 y) \quad (2.1)$$

где

$$k_1 = \frac{\omega}{c_e} \cos \alpha; \quad k_2 = \frac{\omega}{c_e} \sin \alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_e^2} - k_1^2}; \quad (2.2)$$



Тогда из уравнений (1.3) следует, что отражённые продольная и поперечная волны представляются в виде [11]

$$\begin{aligned}\Phi_{omp} &= A_{omp} \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \\ \Psi_{omp} &= B_{omp} \exp i(\omega t - k_1 x - p_2 y)\end{aligned}\quad (2.3)$$

где

$$p_2 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_t^2} - k_1^2} = \frac{\omega}{c_t} \sin \beta, \quad (2.4)$$

β - угол отражения поперечной волны, определяемый из уравнения

$$\cos \beta = \sqrt{\theta} \cos \alpha, \quad \theta = \frac{c_t^2}{c_e^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (2.5)$$

Требую, чтобы функции

$$\Phi = \Phi_{nad} + \Phi_{omp}, \quad \Psi = \Psi_{omp} \quad (2.6)$$

удовлетворяли граничным условиям (1.6), после некоторых преобразований, с учетом связи $k_1^2 + k_2^2 = \theta(k_1^2 + p_2^2)$, получим

$$\begin{aligned}k_2 A_{omp} - k_1 B_{omp} &= k_2 A_{nad} \\ \gamma \left[(1-2\theta)k_1^2 + k_2^2 \right] A_{omp} - \left[2\gamma\theta k_1 p_2 + k_1^2 + k_2^2 \right] B_{omp} &= \\ &= -\gamma \left[(1-2\theta)k_1^2 + k_2^2 \right] A_{nad}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Из системы (2.7) амплитуды отражённых продольной и поперечной волн выразятся через амплитуду падающей волны следующим образом:

$$A_{omp} = \left(1 + \frac{2\gamma k_1 \Delta_0}{\Delta} \right) A_{nad}, \quad B_{omp} = \frac{2\gamma k_2 \Delta_0}{\Delta} A_{nad} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta &= k_2 (k_1^2 + k_2^2) - \gamma k_1 (\Delta_0 - 2\theta k_2 p_2) \\ \Delta_0 &= (1-2\theta)k_1^2 + k_2^2\end{aligned}\quad (2.9)$$

Приведем отношения амплитуд

$$\begin{aligned}\frac{A_{omp}}{A_{nad}} &= 1 + \frac{2\gamma(1-2\theta \cos^2 \alpha)}{\text{tg } \alpha + 2\gamma\sqrt{\theta} \sin \alpha \sqrt{1-\theta \cos^2 \alpha} - \gamma(1-2\theta \cos^2 \alpha)}; \\ \frac{B_{omp}}{A_{nad}} &= \frac{2\gamma(\text{tg } \alpha - \theta \sin 2\alpha)}{\text{tg } \alpha + 2\gamma\sqrt{\theta} \sin \alpha \sqrt{1-\theta \cos^2 \alpha} - \gamma(1-2\theta \cos^2 \alpha)}\end{aligned}\quad (2.10)$$

Из (2.8) нетрудно заметить, что при $\Delta_2 = 0$ амплитуда отраженной поперечной волны обращается в ноль, т.е. отражается только продольная волна. Такая ситуация может иметь место только при $\gamma = 0$, то есть при условии гладкого контакта на

границе, а это означает, что наличие трения приводит к обязательному отражению поперечной волны.

Возможность равенства или неравенства нулю амплитуды отраженной продольной волны не очевидна и этот вопрос решен численным анализом, который показал, что существует угол падения продольной волны α_0 ($\pi/2 < \alpha_0 < \pi$), при котором амплитуда отраженной продольной волны обращается в ноль.

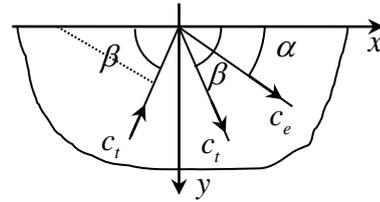
Следует рассмотреть и особый случай обращения в ноль знаменателя в выражениях (2.10), который приводит к уравнению

$$\operatorname{tg} \alpha + 2\gamma\sqrt{\theta} \sin \alpha \sqrt{1 - \theta \cos^2 \alpha} - \gamma(1 - 2\theta \cos^2 \alpha) = 0, \quad (2.11)$$

Как показывает численный анализ, уравнение (2.11) имеет корень, что означает существование такого угла падения продольной волны α_c ($0 < \alpha_c < \pi/2$), когда амплитуды отраженных волн обращаются в бесконечность, т.е. имеет место резонанс.

3. Поперечная волна. Пусть теперь на границу $y = 0$ под углом β падает поперечная волна (фиг.2)

$$\Psi_{nao} = B_{nao} \exp i(\omega t - k_1 x + p_2 y) \quad (3.1)$$



Фиг.2

Удовлетворяя функциями

$$\Phi = \Phi_{omp}, \quad \Psi = \Psi_{nao} + \Psi_{omp} \quad (3.2)$$

граничным условиям (1.6), с учётом (2.3), приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} k_2 A_{omp} - k_1 B_{omp} &= k_1 B_{nao} \\ \gamma \left[(1 - 2\theta) k_1^2 + k_2^2 \right] A_{omp} - \left[k_1^2 + k_2^2 + 2\gamma\theta k_1 p_2 \right] B_{omp} &= \\ &= \left[k_1^2 + k_2^2 - 2\gamma\theta k_1 p_2 \right] B_{nao} \end{aligned} \quad (3.3)$$

откуда

$$A_{omp} = \frac{4\gamma\theta k_1^2 p_2}{\Delta} B_{nao}, \quad B_{omp} = \left(\frac{4\gamma\theta k_1 k_2 p_2}{\Delta} - 1 \right) B_{nao} \quad (3.4)$$

Согласно (3.4) продольная волна не отражается ($A_{omp} = 0$) не только при $\gamma = 0$ (т.е. при условии скользящего контакта), но и при $p_2 = \frac{\omega}{c_t} \sin \beta = 0$, т.е. при $\beta = 0$.

Однако, в отличие от случая падения продольной волны, это еще не означает, что при произвольном $0 < \beta < \pi/2$ от границы полуплоскости будет отражаться и

продольная волна. Действительно, с учетом неравенства $\theta < \frac{1}{2}$, из связи между углами падения и отражения (2.5) нетрудно заметить, что при $0 < \beta < \beta_*$, где

$$\beta_* = \arccos \frac{c_t}{c_e} \quad (3.5)$$

волновое число k_2 становится мнимым и вместо отраженной продольной волны вдоль границы будет распространяться волна, амплитуда которой по глубине экспоненциально убывает.

Приведем отношения амплитуд отраженных волн к амплитуде падающей поперечной волны в зависимости от угла падения β :

$$\frac{A_{omp}}{B_{над}} = \frac{4\gamma \sin 2\beta \cos \beta}{\gamma (\cos \beta + \cos 3\beta) + 2(1 + \gamma \sin 2\beta) \sqrt{\theta - \cos^2 \beta}}$$

$$\frac{B_{omp}}{B_{над}} = \frac{4\gamma \sin 2\beta \sqrt{\theta - \cos^2 \beta}}{\gamma (\cos \beta + \cos 3\beta) + 2(1 + \gamma \sin 2\beta) \sqrt{\theta - \cos^2 \beta}} - 1 \quad (\beta_* < \beta < \pi - \beta_*) \quad (3.6)$$

Поскольку при условии (2.5) знаменатели выражений в (2.10) и в (3.6) получены из представления одного и то же детерминанта Δ , то, очевидно, что при

$$\beta_c = \arccos(\sqrt{\theta} \cos \alpha_c) \quad (3.7)$$

знаменатель выражений в (3.6) также обращается в ноль. Сравнив выражения (3.5) и (3.7), нетрудно проверить, что при $\alpha_c > 0$ угол β_c входит в интервал определения выражений (3.6).

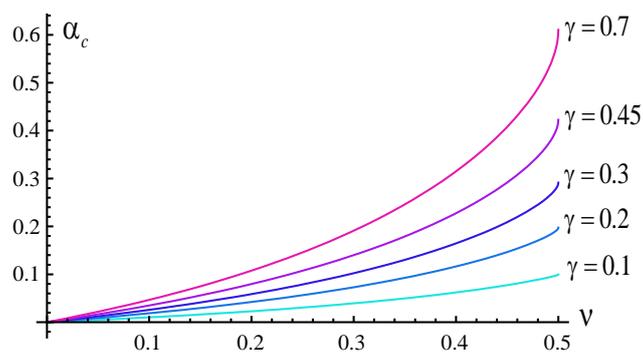
Численный анализ числителя во втором выражении (3.6) показал, что, в отличие от случая падающей продольной волны, в интервале определения выражений (3.6) нет такого угла, при котором амплитуда поперечной волны обращалась бы в ноль.

4. Численный анализ. Следует отметить, что в рассматриваемом случае условия скольжения на границе полуплоскости разбиение падающей волны одного типа на два типа отраженных волн является результатом наличия трения в граничном условии. При отсутствии трения, т.е. при условии гладкого контакта, имеем простейшую ситуацию: падающая волна отражается от границы без изменений, поэтому далее, при представлении результатов численного анализа, нет сравнения с этим случаем. Перейдем к численному анализу при наличии трения.

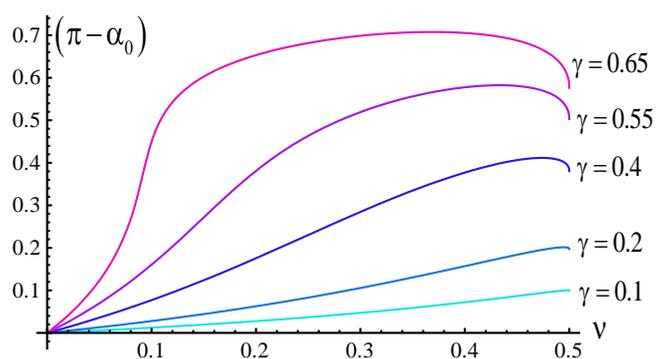
Проведен численный анализ полученных формул (2.10) и (3.6) с целью выяснения зависимости волнового поля от падающей продольной или поперечной плоской волны от угла их падения, от коэффициента трения в условии скользящего контакта и от коэффициента Пуассона материала, посредством которого по формуле (2.5) определяется параметр θ .

Предварительно выясним зависимость значения критического угла падения α_c , при котором амплитуды отраженных волн обращаются в бесконечность, и угла α_0 ,

когда отражается только поперечная волна, от коэффициента трения γ и от коэффициента Пуассона ν . На Фиг.3 и Фиг.4 представлены кривые зависимости α_c и $\pi - \alpha_0$ от ν при различных значениях γ .

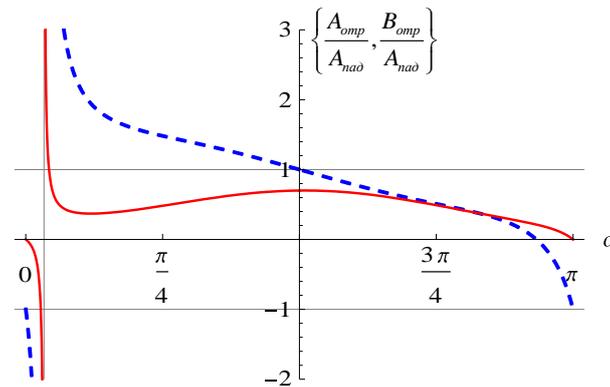


Фиг. 3. Кривые зависимости критического угла α_c от коэффициента Пуассона ν .



Фиг. 4. Кривые зависимости угла $(\pi - \alpha_0)$ от коэффициента Пуассона ν .

На Фиг. 5 представлены кривые зависимости отношения амплитуд отраженных продольной (пунктирная линия) и поперечной (сплошная линия) к амплитуде падающей продольной волны от угла ее падения при следующих значениях параметров $\nu = 0.28 (\theta \approx 0.306)$ и $\gamma = 0.35$.

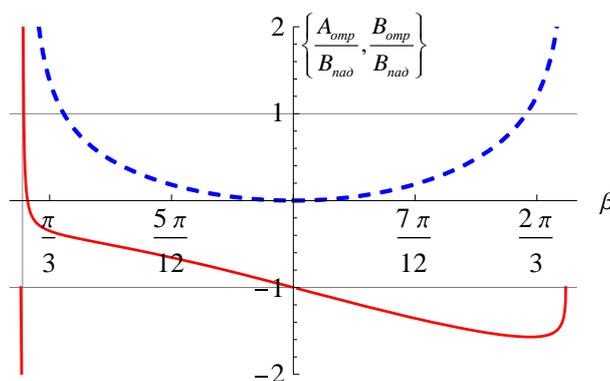


Фиг.5. Кривые зависимости отношений амплитуд от угла падения продольной волны.

Отметим, что для других значений параметров ν и γ картина расположения кривых качественно не меняется, меняется лишь место расположения асимптоты в соответствии с изменением критического угла падения α_c . Согласно кривым фиг. 3 обоим параметрам присуща одинаковая закономерность: чем больше значение параметра, тем больше критический угол падения α_c .

На фиг. 6 представлены кривые зависимости отношения амплитуд отраженных продольной (пунктирная линия) и поперечной (сплошная линия) к амплитуде падающей поперечной волны от угла ее падения при тех же значениях параметров ν и γ . Как было отмечено выше, только при изменении угла падения β в интервале $(\beta_*, \pi - \beta_*)$ имеет место отражение волн, поэтому по оси абсцисс показан только этот интервал. Здесь, как и в случае падения продольной волны, существует критический угол β_c , однако он очень близок к значению β_* и, поэтому, на фиг.6 не очень четко, особенно по отраженной продольной волне, видна ситуация стремления к бесконечности амплитуд отраженных волн. Зависимость угла β_c от параметров ν и γ монотонно возрастающая, как и для угла α_c , с той лишь разницей, что область изменения угла β_c почти в 6 раз меньше области изменения угла α_c . Это означает, что при любых допустимых значениях параметров ν и γ точка β_c очень близко расположена к границе интервала определения β_* , чем и объясняется ее трудно-различимость на графиках. Дадим некоторые пояснения по фиг.6. На интервале $[\beta_*, \beta_c]$ сплошная линия, начиная от значения (-1) , а пунктирная линия начиная с некоего значения $(-a_0 < -1)$, стремятся к $(-\infty)$ вдоль вертикальной асимптоты,

показанной на Фиг.6 слева. Если пунктирная линия ближе к левому концу стремится к ∞ , то на правом конце она стремится к конечному значению $a_0 > 2$.



Фиг.6. Кривые зависимости отношений амплитуд от угла падения поперечной волны.

Если касательные напряжения на границе полуплоскости назвать положительными, если они действуют по направлению распространения падающей волны, и отрицательными в обратном случае и полагать, что угол падения меньше $\pi/2$, то левые половины фиг.5 и фиг.6 будут отображением ситуации с положительными касательными напряжениями, а правые половины будут зеркальным отображением ситуации с отрицательными касательными напряжениями.

Пользуясь введенным понятием, согласно фиг.5 и фиг.6, можно сказать, что положительные касательные напряжения придают отраженным волнам дополнительную энергию, увеличивая их амплитуду. Вследствие этого существуют углы падения α_c для продольной волны и β_c для поперечной волны, при которых эти амплитуды обращаются в бесконечность. Учитывая, что выше было сделано предположение о малости напряжений волны по сравнению со статическими нагрузками, которое для углов падения, близких к указанным, не выполняется, исследование задачи для таких углов следует проводить другими методами, в частности, при помощи компьютерного моделирования [15,16].

При отрицательных касательных нагрузках можно наблюдать интересный факт существования такого угла падения продольной волны $(\pi - \alpha_0)$, при котором происходит заглушение (амплитуда обращается в ноль) отраженной продольной волны, т.е. при падении продольной волны отражается только поперечная волна. Как было отмечено выше и видно из Фиг.6, при падении поперечной волны такой ситуации не наблюдается.

Описанные явления резонанса и подавления одной из отраженных волн объясняются наличием дополнительной энергии касательных сил, которая либо прибавляется к энергии падающей волны, либо поглощает ее. Так как в случае других граничных условий на границе полуплоскости (свободная граница или жесткая заделка) энергия падающей волны не изменяется, а просто перераспределяется между отраженными волнами, то эти явления надо считать эффектом трения.

Заключение. Исследованы вопросы отражения плоской продольной или поперечной волны, падающей на границу упругой полуплоскости, на которой заданы нулевые нормальные перемещения и тангенциальные напряжения, подчиняющиеся закону сухого трения. Показано, что, как и в случаях свободной границы или жесткого защемления, при падении на границу какой-либо из указанных типов волн от нее отражаются две волны: продольная и поперечная. Однако здесь картина распространения отраженных волн качественно отличается от указанных случаев граничных условий, поскольку действие касательных сил подразумевает накопление энергии на границе полуплоскости, а она, в свою очередь, влияет на распределение энергий между отраженными волнами. В частности, этот факт является причиной возможности появления, при определенном угле падения, резонанса, а также подавления, опять же при определенном, но другом, угле падения, отраженной продольной волны, когда на границу падает такая же волна. Таким образом, установлено, что при наличии касательных напряжений на границе существует угол падения продольной волны, когда от границы будет отражаться только поперечная волна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Miklowitz J. The theory of elastic wave and waveguides-Amsterdam: North-Holland, 1978, 648 p.
2. Мелешко В.В. и др. Упругие волноводы: история и современность // Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т. 51. № 2. – С.86–104.
3. Алексеев А.Е. Нелинейные законы сухого трения в контактных задачах линейной теории упругости, ПМТФ 2002 т43, №4, с 161-169
4. Анисимов А.А. Ермаков С.Ф, Фролова Е.Н, Яковена Т.Б. Исследование отражения-преломления упругих волн на границе нежесткого контакта с трением. Изв РАН физики земли. 1993 №11 с 37-44
5. Vinh P.C, Xuan N.Q. Rayleigh waves with impedance boundary conditions Formula for the velocity, existence and uniqueness // Eur. J. Mech. A. Solid 2017
6. Белубекян М.В., Сарксян С.В. Волны в системе тонкий слой-полупространство со смешанными граничными условиями. Мат. методы та физ-мех поля 2019, т.62 №3. с.120-126
7. Chattarjee S.N. Propagation of Rayleigh Waves in a Layer Lying over a Heterogeneous Half Space. // Pure and Applied Geophysics. 1971. V 86. №3. P 69-79.
8. Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания упругой изотропной полосы, жестко связанной с анизотропной полуплоскостью. Современные проблемы механики сплошной среды. // Труды V Межд. конф. Ростов-на Дону. 12-14 окт.1999. Ростов-на Дону. Изд. СКНЦ ВШ. 2000. Т 2. С 31-37.
9. Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания в системе: анизотропная полоса-полуплоскость при жестком и скользящем соединении сред. // Изв. Вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2002. № 3. С. 120-121.
10. Агаян К.Л., Багдасарян Р.А. Распространение упругих волн в полупространстве с тонким упругим усиливающим слоем. //Тр. VII межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», 19-23 сентября, 2011, Горис-Степанакерт, с.18-25
11. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.

12. Белубекян М.В. Волны типа Релея в системе тонкий слой-полупространство. Механика, 58, №2, 2005. Ереван, Изд. НАН Армении. С.9-15.
13. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах // В сб.: “Проблемы механики деформируемого твердого тела.” Ереван: Изд. НАН РА 1997. С. 79-96.
14. Амирджанян А.А., Белубекян М.В., Геворгян Г.З, Дарбинян А.З. Распространение поверхностных волн в составной полуплоскости. Изв. НАН РА, Механика, 2020, т.73, №1, с. 23-29.
15. Заславский Ю.М., Митякова О.И. Дисперсия поверхностных волн в структуре: упругие слой и полупространство в скользящем контакте // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 2. С. 296 - 303.
16. Смолин А.Ю Добрынин С.А. Псахье С.Г. Анализ упругих волн генерируемых при контактом взаимодействии. Компьютерное моделирование // Физическая мезомеханика 12 3 (2009) сс 81-90.
17. Matthias Graf. Generation of surface waves through friction: FEM investigation // PAMM · Proc. Appl. Math. Mech. 17, 679 – 680 (2017) DOI 10.1002/pamm.201710308

Сведения об авторах:

Амирджанян Арутюн Арменович к.ф.-м.н., в.н.с.. Института механики НАН РА.
Тел.:(37410) 27-62-23. E-mail: amirjanyan@gmail.com

Геворгян Гнун Завенович к.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН РА
E-mail: gnungev2002@yahoo.com

Дарбинян Артавазд Завенович к.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН РА
E-mail: darbinyan_1954@mail.ru

Поступила в редакцию 24.01.2023