

**ИЗГИБ БАЛКИ НА КРАЕ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ, УСИЛЕННОЙ  
УПРУГИМИ ОПОРАМИ**

Агаян К.Л., Амирджанян А.А.

**Ключевые слова:** балка, изгиб, прогиб, упругая полоса, контактные напряжения

**Aghayan K.L., Amirjanyan H.A.**

**Beam bending at the edge of elastic strip reinforced by elastic supports**

**Keywords:** beam, bending, flexure, elastic strip, contact stresses

A plane contact problem on the beam bending of infinite length on the free boundary of an elastic foundation in the form of an elastic strip rigidly clamped along the other boundary is considered. In this case, it is assumed that the beam rests on a finite number of elastic support elements such as rods embedded in an elastic strip. The connection of the reinforcing elements with the beam is assumed to be hinged. The other ends of the rods are rigidly clamped on the fixed edge of the strip. The bending of the beam is carried out by a given external normal load applied on its free edge. It is assumed that only normal contact pressures arise under the beam, and the contact of the beam with the elastic foundation occurs without separation of the beam from the base, i.e. it is adopted a two-way connection model between the beam and the edge of the strip. Under certain simplifying assumptions, using the stitching method, a closed solution of the problem in Fourier integrals is constructed.

**Աղայան Կ.Լ., Ամիրջանյան Հ.Ա.**

**Հեծանի ծռումը առաձգական հենարաններով ուժեղացված առաձգական շերտի եզրում**

**Հիմնաբառեր՝** հեծան, ծռում, ճկվածք, առաձգական շերտ, կոնտակտային լաչում

Դիտարկվում է մի եզրով կոշտ ամրակցված առաձգական շերտի ազատ եզրի վրա անվերջ երկար հեծանի ծռման հարթ կոնտակտային խնդիրը: Ենթադրվում է, որ հեծանը ուժեղացված ամրացված է, առաձգական շերտի մեջ տեղակայված, ձողի-սյան տեսքով առաձգական ամրաններով: Հեծանի հետ ամրանների միացումը իրականացվում է ազատ հենման ձևով: Ձողերը մյուս ծայրով կոշտ ամրակցված են շերտի անշարժ եզրում: Հեծանի ծռումը իրականացվում է նրա ազատ եզրում ազդող արտաքին բեռնավորմամբ: Ենթադրվում է, որ հեծանի տակ առաջանում են միայն նորմալ կոնտակտային լարումներ, իսկ հեծանի և առաձգական հիմքի միջև փոխազդեցությունը կատարվում է առանց հիմքից անջատվելու, այլ հոսքով հեծանի և հիմքի միջև ենթադրվում է երկկողմանի կապ: Որոշակի ենթադրությունների դեպքում, կարման մեթոդիկայով կառուցված է խնդրի փակ լուծումը Ֆուրյեի ինտեգրալների տեսքով:

Рассматривается плоская контактная задача об изгибе балки бесконечной длины на свободной границе упругого основания в виде упругой полосы, жестко заземленной по другой границе. При этом, предполагается, что балка усилена конечным числом упругих подкрепляющих опорных элементов типа стоек-стержней, вложенных в упругую полосу. Соединение подкрепляющих элементов с балкой предполагается шарнирно-опертым. Другие концы стоек жестко заземлены на неподвижном крае полосы. Изгиб балки осуществляется заданной внешней нагрузкой, приложенной на ее свободном крае. Предполагается, что под балкой возникают только нормальные контактные давления, а контактирование балки с упругим основанием происходит без отрыва балки от основания, т.е. принимается модель

двухсторонней связи между балкой и краем полосы. При определенных упрощающих предположениях, методом сшивания, построено замкнутое решение задачи в интегралах Фурье.

**1. Введение.** Задачи об изгибе балок и плит на упругом основании относятся к классу контактных задач прикладной теории упругости о взаимодействии тонкостенных элементов с массивными деформируемыми телами. Они составляют обширную область теории контактных и смешанных задач, где исследуется изгиб балок и плит различных форм и структуры на упругих линейно-деформируемых основаниях при различных контактных условиях между контактирующими телами. Теория изгиба балок на упругом основании, как отмечает С.П.Тимошенко [1], разработана Е. Винклером. На основе гипотезы Винклера поставлены и решены многочисленные важные, с точки зрения практики, задачи, на которых останавливаться не будем.

Дальнейшему развитию теории, связанному с теоретическими и прикладными проблемами по расчету балок и плит на упругом основании, посвящено много работ. В этих работах исследования поставленных задач проводятся в рамках их точной постановки, т.е. избегая гипотезы Винклера. Из этих работ отметим [3-14] и приведенные там ссылки, где исследованы плоские контактные задачи об изгибе балок, свободно лежащих на крае упругой полуплоскости, при отсутствии сил сцепления. Начало таким работам, как указано в [2], положили работы Н.М.Герсеванова и М.Я.Мечерета [3], П.И. Клубина [4], Б.Г. Коренева [5] и Г.Я. Попова [6]. При этом точное решение задачи об изгибе полубесконечной балки на крае упругой полуплоскости впервые было получено в [6]. В последующем замкнутое решение этой же задачи различными подходами было получено в работах [7-9].

Здесь, в рамках классической теории изгиба балок, рассматривается плоская контактная задача об изгибе балки бесконечной длины на границе упругой полосы с жестко защемленным другим краем. Изгиб балки осуществляется заданной внешней нормальной нагрузкой, приложенной к ней, предполагая при этом, что под балкой возникают только нормальные контактные напряжения. Предполагается также, что балка подкреплена конечным числом упругих опорных элементов типа стоек-стержней, вложенных в упругую полосу. Усиливающие стойки одним концом шарнирно соединены с балкой, а другим концом жестко защемлены на неподвижном крае полосы. Отметим, что поставленную задачу можно рассматривать как задачу управления прогибом балки: при подходящем подборе числа подкрепляющих стоек, их местоположения и жесткостей, можно скорректировать прогиб балки, приведя его к желаемому. Аналогичную задачу можно поставить и для балок конечной и полубесконечной длины.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим, отнесенную к декартовой системе координат  $Oxuz$ , упругую полосу  $\Omega(|x| < \infty; 0 \leq y \leq h)$ , с упругими характеристиками  $E, \nu$ . Полоса жестко защемлена по границе  $y = h$ , а на ее свободной границе  $y = 0$ , под давлением заданной внешней нормальной нагрузки  $q^+(x)$ , изгибается балка бесконечной длины с изгибной жесткостью  $D_0$  и толщиной  $h_0$ . В свою очередь, балка в конечных точках  $x = c_k (k = \overline{1, N})$  усилена подкрепляющими упругими опорными элементами типа стоек-стержней с жесткостями на растяжение-

сжатие  $E_k A_k$ ,  $E_k$  - модуль упругости,  $A_k$  - площадь поперечного сечения  $k$ -той стойки и с равными длинами  $l_k = h$ . Предполагается, что укрепляющие элементы одним концом контактируют с балкой в режиме свободного опирания, а другим концом зашцемялены на неподвижном крае полосы.

Не нарушая общности, принимается, что внешняя нагрузка  $q^+(x)$ , которая на практике обычно складывается из сосредоточенных сил  $P_k$  ( $k = \overline{1, N_p}$ ) и сосредоточенных моментов  $M_n$  ( $n = \overline{1, N_M}$ ), приложенных в точках  $x_k^{(P)}$  и  $x_n^{(M)}$  соответственно, а также распределенной нагрузки интенсивности  $q_p^+(x)$ , приложенных на интервалах  $(a_p, b_p)$  ( $p = \overline{1, N_q}$ ). Тогда, имея в виду представление сосредоточенных сил и моментов в виде распределенной нагрузки [163], можем записать:

$$q^+(x) = q_{0q}^+(x) + q_{0p}^+(x) + q_{0m}^+(x) \quad (2.1)$$

где

$$q_{0p}^+(x) = \sum_{k=1}^{N_p} P_k \delta(x - x_k^{(P)}); \quad q_{0m}^+(x) = \sum_{k=1}^{N_M} M_k \delta'(x - x_k^{(M)}); \quad (2.2)$$

$$q_{0q}^+(x) = \sum_{k=1}^{N_q} [H(x - a_k) - H(x - b_k)] q_k^+(x)$$

Здесь  $H(x)$  - ступенчатая функция Хевисайда,  $\delta(x)$  - дельта - функция Дирака, определяемые следующим образом:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}; \quad \frac{dH(x)}{dx} = \delta(x); \quad \delta' = \frac{d\delta(x)}{dx} \quad (2.3)$$

Относительно реактивного (контактного) сопротивления со стороны упругой полосы и подкрепляющих стоек на балку, принимается, что: под балкой, в контактной зоне с краем полосы касательные напряжения отсутствуют и там возникают только нормальные давления  $q_0^-(x)$ , а контактирование происходит без отрыва балки от края упругого основания.

В точках  $c_k$  соединения  $k$ -той стойки с балкой возникают неизвестные сосредоточенные силы  $R_k$ .

Тогда, аналогично с (2.2), общее реактивное сопротивление  $q^-(x)$ , возникающее под балкой, можно представить в виде:

$$q^-(x) = q_0^-(x) + q_{0R}^-(x) \quad (2.4)$$

где  $q_0^-(x)$  контактное напряжение, обусловленное контактированием балки с краем полосы, а

$$q_{0R}^-(x) = \sum_{k=1}^N R_k \delta(x - c_k) \quad (2.5)$$

Здесь, как отмечалось,  $R_k$  неизвестные постоянные, которые определяются из условия совместности деформаций в точках  $c_k$  соединения балки и усиливающих элементов.

Отметим также, что в качестве вертикальных перемещений на линии  $y = 0$  принимаются вертикальные перемещения однородной полосы, жестко защемленной по одному краю под воздействием контактного напряжения  $q_0^-(x)$ .

При этих предположениях и в рамках классической теории изгиба балок, требуется определить закон распределения интенсивности нормальных напряжений  $q_0^-(x)$ , возникающих под балкой, неизвестные реакции опор  $R_k$ , которые позволят определить и остальные основные механические параметры, характеризующие изгиб балки в целом.

**3. Построение общего решения задачи.** Задача определения напряженно-деформированного состояния рассматриваемой составной конструкции решается методом “сшивания”, рассматривая отдельно напряженные состояния балки и полосы, используя при этом соответствующие условия контакта на границе соприкосновения балки с краем полосы  $y = 0$ .

Разделим балку от полосы и рассмотрим их равновесие отдельно.

Изгиб балки осуществляется, приложенными к ее краям распределенными нагрузками  $q^+(x)$  и  $q^-(x)$ , определяемыми формулами (2.1) и (2.4) соответственно. Тогда, дифференциальное уравнение изогнутой оси балки запишем в виде [1].

$$\frac{d^3 V_0}{dx^3} = \frac{1}{D_0} [q^+(x) - q^-(x)]; \quad |x| < \infty \quad (3.1)$$

где  $V_0(x) = dv_0(x)/dx$ ,  $v_0(x)$  - вертикальное перемещение (прогиб) оси балки,  $D_0 = E_0 I_0$  - жесткость на изгиб,  $E_0$  - модуль упругости,  $I_0 = b_0 h_0^3 / 12$  - момент инерции поперечного сечения относительно оси  $Oz$ ,  $b_0$  - ширина балки. В случае цилиндрического изгиба  $D_0 = E_0 h_0^3 / [12(1 - \nu_0^2)]$ , где  $\nu_0$  - коэффициент Пуассона материала балки. Из (3.1), после преобразования Фурье, получим:

$$\bar{V}_0(\sigma) = \frac{1}{iD_0 \sigma^3} [\bar{q}^+(\sigma) - \bar{q}^-(\sigma)] \quad (3.2)$$

где

$$\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx; \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (3.3)$$

Обратимся теперь к полосе. Построить решение для упругой полосы с учетом стоек-стержней в рамках плоской теории упругости достаточно сложно, если, вообще, возможно. Предполагая, что усиливающие стойки имеют достаточно малые площади поперечных сечений, расположены на достаточном расстоянии друг от друга и находятся в условиях гладкого контакта с полосой, при решении задачи теории упругости для полосы будем считать, что усиливающие элементы отсутствуют.

Исходя из этих соображений и следуя [14], построено решение уравнений Ляме для упругой области  $\Omega(|x| < \infty; 0 < y < h)$  с упругими параметрами  $E, \nu$ , при граничных условиях:

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) = q_0^-(x); \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0 \\ u(x, h) = v(x, h) = 0; \quad |x| < \infty \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $\sigma_y, \tau_{xy}$  - компоненты тензора напряжений,  $u(x, y), v(x, y)$  - компоненты перемещений.

Для вертикальных перемещений граничных точек полосы  $y = 0$  будем иметь:

$$v(x, 0) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(3-4\nu)\text{ch } \alpha h \text{sh } \alpha h - \alpha h}{(3-4\nu)\text{ch}^2 \alpha h + (\alpha h)^2 + (1-2\nu)^2} \frac{\bar{q}_0(\alpha)}{\alpha} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (3.5)$$

Условие равенства вертикальных перемещений точек края полосы  $v(x, 0)$  с прогибом балки  $v_0(x)$ , замененное равенством их производных и записанное в трансформантах Фурье, запишется в виде:

$$\bar{V}_0(\sigma) = \bar{V}(\sigma, 0) \quad (3.6)$$

Здесь  $\bar{V}(\sigma, 0)$  - трансформанта Фурье производной  $v(x, 0)$  и определяется формулой

$$\bar{V}(\sigma, 0) = iD_1 \frac{\chi \text{ch}(\sigma h) \text{sh}(\sigma h) - \sigma h}{\chi \text{ch}^2(\sigma h) + (\sigma h)^2 + \chi_1^2} \bar{q}_0(\sigma) \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} \{D; \chi; \chi_1\} = \left\{ \frac{1-\nu^2}{E}; 3-4\nu; 1-2\nu \right\} \quad \text{при плоской деформации} \\ \{D; \chi; \chi_1\} = \left\{ \frac{2(1-2\nu)(1-\nu)}{E(1+\nu)}; \frac{3-\nu}{1+\nu}; \frac{1-\nu}{1+\nu} \right\} \quad \text{при плоском напр. сост.} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подставляя (3.2) и (3.7) в условие контакта (3.6) и учитывая (2.1) и (2.4), после некоторых выкладок, получаем следующее представление для определения контактного давления  $q_0^-(x)$ , в зависимости от заданных внешних нагрузок  $q_0^+(x)$  и неизвестных  $q_{0R}^-(x)$ , приложенных к балке:

$$q_0^-(x) = \frac{\lambda^3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{q}^+(\sigma) - \bar{q}_{0R}^-(x)}{\lambda^3 + |\sigma|^3} e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (3.9)$$

где

$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{1}{D_0 D_1}}; \quad f(\sigma h) = \frac{\chi \operatorname{ch}(\sigma h) \operatorname{sh}(|\sigma h| - |\sigma h|)}{\chi \operatorname{ch}^2(\sigma h) + (\sigma h)^2 + \chi_1^2} \quad (3.10)$$

Теперь, имея ввиду формулы (2.1) и (2.4),  $q_0^-(x)$  из (3.9) можно представить в виде

$$q_0^-(x) = \sum_{k=1}^{N_p} P_k J_1(x - x_k^{(P)}) + \sum_{k=1}^{N_M} M_k \frac{d}{dx} J_1(x - x_k^{(M)}) + \sum_{k=1}^{N_q} \int_{a_k}^{b_k} J_1(x-t) q_k^+(t) dt - \sum_{k=1}^N R_k J_1(x - c_k) \quad (3.11)$$

где

$$J_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^3 e^{-i\sigma z} d\sigma}{\lambda^3 + |\sigma|^3} f(\sigma h) \quad (3.12)$$

Обратимся теперь к определению прогиба балки  $v_0(x)$ . Из дифференциального уравнения (3.1) получим, что

$$\bar{v}_0(\sigma) = \frac{1}{D_0 \sigma^4} [\bar{q}_0^+(\sigma) - \bar{q}_{0R}^-(\sigma) - \bar{q}_0^-(\sigma)] \quad (3.13)$$

Подставляя сюда значение  $\bar{q}_0^-(\sigma)$  из (3.9), после обратного преобразования, получим

$$v_0(x) = \frac{1}{2\pi D_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{q}_0^+(\sigma) - \bar{q}_{0R}^-(\sigma)}{\lambda^3 + |\sigma|^3} \frac{f(\sigma h)}{|\sigma|} e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (3.14)$$

которое, аналогично (3.11), можно представить в виде

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{N_p} P_k J_2(x - x_k^{(P)}) + \sum_{k=1}^{N_M} M_k \frac{d}{dx} J_2(x - x_k^{(M)}) + \sum_{k=1}^{N_q} \int_{a_k}^{b_k} J_2(x-t) q_k^+(t) dt - \sum_{k=1}^N R_k J_2(x - c_k) \quad (3.15)$$

где

$$J_2(z) = \frac{1}{2\pi D_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\sigma h) e^{-i\sigma z}}{[\lambda^3 + |\sigma|^3] |\sigma|} d\sigma \quad (3.16)$$

Отметим, что формулами (3.9) и (3.14), при отсутствии усиливающих элементов, т.е. при  $q_{0R}^-(x) = 0$ , представляется точное решение контактной задачи об изгиб балки бесконечной длины на крае упругой полосы с заземленным другим краем. При  $h \rightarrow \infty$  (3.9) и (3.14) дают решение задачи с упругим основанием в виде полуплоскости, рассмотренной в [15].

Таким образом, формулами (3.9) и (3.14) дается формальное аналитическое решение поставленной выше контактной задачи при принятом довольно жестком предположении относительно взаимовлияния усиливающих элементов с пластиной.

4. Теперь, для завершения полученного аналитического решения (3.9), (3.14), необходимо определить входящие туда неизвестные функции  $\bar{q}_{0R}^-(\sigma)$ . Более точно, следует определить постоянные  $R_k$ , входящие в (2.5). Для этого обратимся к предположениям, сделанным выше относительно условий совместности деформаций. Эти условия, как известно, непосредственно связаны с условиями закрепления концов усиливающих элементов в точках  $c_m$ . Здесь принято, что в точках  $c_m$  прогиб балки должен удовлетворять следующим условиям совместности:

$$v_0(c_m) = \Delta l_m = \frac{R_m h}{E_m A_m} \quad (3.17)$$

Удовлетворяя, при помощи (3.15), условиям (3.17), приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно  $R_m$

$$\sum_{k=1}^N K_{mk} R_k = a_m^{(p)} + a_m^{(q)} \quad (m=1, 2, \dots, N) \quad (3.18)$$

$$K_{mk} = \frac{h D_0}{E_m A_m} \delta_{mk} + J_2(c_k - c_m) \quad (3.19)$$

$$a_m^{(p)} = \sum_{k=1}^{N_p} P_k J_2(x_k^{(p)} - c_m); \quad a_m^{(q)} = \sum_{k=1}^{(q)} \int_{a_k}^{b_k} q^+(t) J_2(c_m - t) dt; \quad (3.20)$$

где  $\delta_{mk}$  - символ Кронекера, а  $J_2(z)$  дается формулой (3.16).

В частном случае, когда распределенная на интервалах  $(a_k, b_k)$  нагрузка равномерна, т.е.  $q_k(x) = q_{0k} = const$ , для  $a_m^{(q)}$  будем иметь:

$$a_m^{(q)} = \sum_{k=1}^{(q)} q_{0k} [J_3(b_k - c_m) - J_3(a_k - c_m)]$$

где

$$J_3(z) = \frac{1}{2\pi D_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\sigma h) e^{-i\sigma z}}{[\lambda^3 + |\sigma^3| f(\sigma h)] \sigma |\sigma|} d\sigma$$

Коэффициенты и свободные члены определяющей системы (3.18) выражаются при помощи интегралов  $J_2(z)$  и  $J_3(z)$ , при этом, как нетрудно заметить  $J_2(z) = J_3'(z)$ . Эти интегралы, очевидно, не поддаются непосредственному интегрированию и их следует вычислять численно-аналитическими методами с применением контурного интегрирования в сочетании с методом асимптотического представления подынтегральных функций. Покажем это для интеграла  $J_3(z)$ .

Имея ввиду асимптотическое поведение функции  $f(z)$ , входящей в этот интеграл:

$$f(z) \sim O(z) \text{ при } z \rightarrow 0; \quad f(z) \sim 1 \text{ при } |z| \rightarrow \infty$$

в интеграле  $J_3(z)$  сделаем следующие замены:

$$\frac{f(z)}{|z|} \sim \frac{1}{1+|z|}; \quad \lambda^3 + |z|^3 f(z) \sim \lambda^3 + |z|^3$$

После некоторых преобразований, интеграл  $J_3(z)$  примет вид:

$$J_3(z) \sim \frac{1}{D_0 \lambda^4} J_3^*(z)$$

где

$$J_3^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda z \sigma}}{\sigma(1+|\sigma|^3)} \frac{d\sigma}{a_0 + |\sigma|}; \quad a_0 = \frac{1}{\lambda h}$$

При помощи контурного интегрирования [9,15] для  $J_3^*(z)$  получим представление:

$$J_3^*(z) = \text{sign } z \left\{ \frac{1}{2a_0} - \frac{2}{3} e^{-\sqrt{\frac{3}{2}} \lambda |z|} \left[ \sin \left( \frac{\lambda |z|}{2} + \beta \right) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1-a_0 \tau^2) e^{-\tau |\lambda z|}}{(1+\tau^6)(a_0^2 + \tau^2)} d\tau \right] \right\}$$

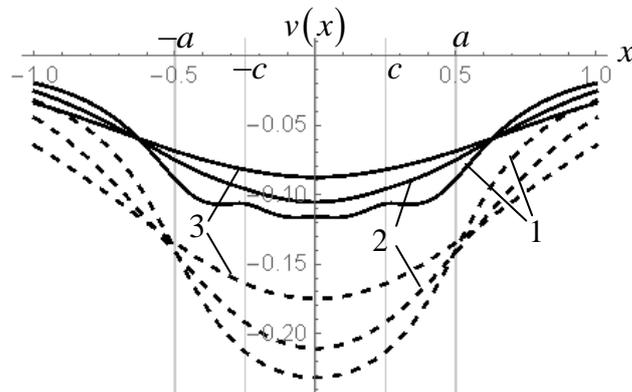
$$\text{где } \text{tg } \beta = \frac{2a_0 + 1}{\sqrt{3}}.$$

Определив из системы (3.18) неизвестные  $R_m$ , при помощи (3.11) можем определить контактное давление  $q_0^-(x)$ , а из (3.15) - прогиб балки, а затем и поперечную силу и изгибающий момент в любом сечении балки.

**Численный анализ.** Проведем численный анализ для симметричного случая, когда имеем стойку-стержень по оси  $Oy$  и еще две стойки, равноудаленные от нее на расстояние  $c$ . В качестве внешней нагрузки будем рассматривать либо равномерно распределенное по отрезку  $[-a, a]$  давление  $q$ , либо сосредоточенную силу  $P$ , приложенную над средней стойкой. Введем два параметра  $\alpha_0$  и  $\alpha_c$ , являющиеся

коэффициентами пропорциональности между перемещением балки в точке соединения со стойкой-стержнем  $v_{0c}$  и соответствующим перемещением балки при отсутствии стоек-стержней  $v_{0b}$ , т.е.  $v_{0c}(0) = \alpha_0 v_{0b}(0)$  и  $v_{0c}(\pm c) = \alpha_c v_{0b}(\pm c)$ . Задавая значения этим параметрам, определяем необходимые жесткости для стоек-стержней.

При численных расчетах для некоторых параметров задачи зафиксируем следующие значения:  $h = 1$ ,  $h_0 = 0.1h$ ,  $a = 0.5h$ ,  $\nu = 0.25$ . На Фиг. 1 представлены кривые прогиба балки под действием равномерно распределенной нагрузки. Сплошными линиями представлены безразмерные, отнесенные к толщине полосы  $h$ , кривые прогиба балки при наличии стоек-стержней, когда  $\alpha_0 = \alpha_c = 0.5$  и  $c = 0.25$ , а пунктирными – те же кривые при отсутствии стоек-стержней. Пары кривых, соответствующих значениям отношения модулей упругости  $E_0/E = 5, 100, 500$  обозначены цифрами 1, 2, 3 соответственно.



Фиг. 1 Форма прогиба балки от распределенной внешней нагрузки

В таблице 1. приведены значения жесткостей стоек-стержней, при которых прогибы балки имеют вид сплошных линий Фиг.1.

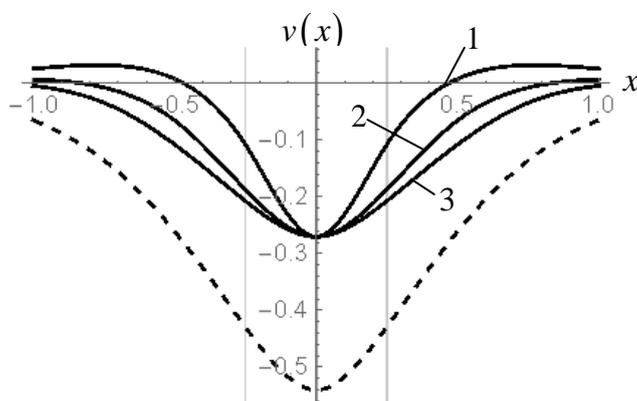
Таблица 1.

$E_0/E$	5	100	500	2000	10000
$E_m A_m$ средней стойки	0.4909	0.2841	0.1915	0.1160	0.0136
$E_m A_m$ боковых стоек	0.7614	1.0810	1.3811	1.7821	2.4942

По данным таблицы можно заметить, что с увеличением жесткости балки роль средней стойки уменьшается и основную нагрузку берут на себя боковые стойки. Казалось бы, что при достаточно жесткой балке все три стойки должны были бы нести нагрузку практически одинаково, однако это невозможно обеспечить при произвольном задании обоих параметров  $\alpha_0$  и  $\alpha_c$ . Это и подтверждается в рассчитанном случае, когда принято  $\alpha_0 = \alpha_c = 0.5$ . Очевидно, что подбором

одного из указанных параметров можно достичь указанной выше ожидаемой ситуации.

На Фиг. 2 представлены кривые прогиба балки под действием сосредоточенной силы при различных, но симметричных, местоположениях боковых стоек. Следует отметить, что здесь, в отличие от случая распределенной нагрузки, нецелесообразно принимать значения параметров  $\alpha_0$  и  $\alpha_c$  равными, поскольку выбирая  $\alpha_0$ , для всех точек балки получаем такое же значение соответствующего параметра и установка стоек в любом месте никак не будет влиять на результат. Поэтому, пусть  $\alpha_0 = 0.5$ ,  $\alpha_c = 0.25$ , для отношения модулей упругости балки и полосы примем значение  $E_0/E = 100$ , а расстояние  $c$  принимает значения  $c = 0.25; 0.5; 0.75$ . Кривые на Фиг.2 обозначены цифрами 1; 2; 3 в соответствии со значениями  $c$ .

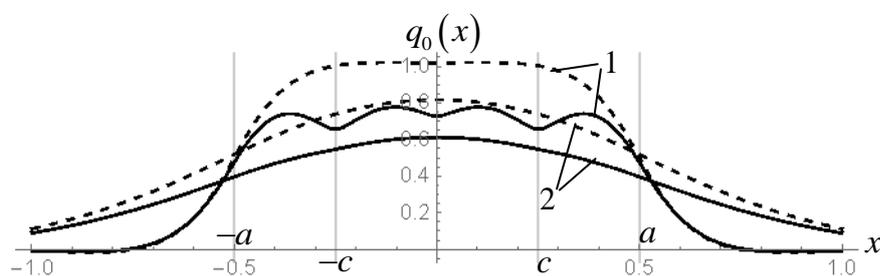


Фиг. 2 Форма прогиба балки от сосредоточенной внешней нагрузки

В таблице 2. приведены значения жесткостей стоек-стержней, при которых прогибы балки имеют вид сплошных линий Фиг.2.

Таблица 2.

$c$	0.25	0.5	0.75	1.5	5
$E_m A_m$ средней стойки	-3.5342	1.1948	1.7214	1.8479	1.8498
$E_m A_m$ боковых стоек	8.5154	2.8219	2.0403	1.8283	1.8497

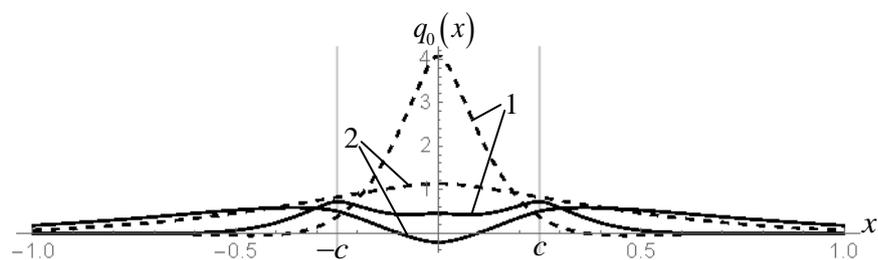


Фиг. 3 Контактное давление под балкой от распределенной внешней нагрузки Как и следовало ожидать, влияние задания конкретных значений параметров

$\alpha_0$  и  $\alpha_c$  наиболее существенно, когда стойки расположены близко друг к другу.

Как видно из Табл.2 значительная разница между значениями  $\alpha_0$  и  $\alpha_c$  приводит к тому, что средняя стойка меняет свою опорную функцию на сдерживающую (отрицательная жесткость).

На Фиг.3 и Фиг.4 представлены пары кривых (сплошная и пунктирная) распределения контактного давления  $q_0(x)$  от распределенной и сосредоточенной внешних нагрузок для двух значений отношения модулей упругости  $E_0/E = 5; 250$ . При этом в первом случае  $\alpha_0 = \alpha_c = 0.5$ , а во втором -  $\alpha_0 = 0.25$ ,  $\alpha_c = 0.5$ .



Фиг.4 Контактное давление под балкой от сосредоточенной внешней нагрузки

Пары кривых, представленные на Фиг.3 и Фиг.4, явно указывают на существенное перераспределение контактного давления под балкой в связи с наличием стоек-стержней. При этом, на Фиг.3 можно заметить, что при более мягких балках перераспределение контактного давления происходит только лишь непосредственно под интервалом действия внешней равномерно распределенной нагрузки.

**Заключение.** Рассмотрена плоская контактная задача об изгибе балки бесконечной длины на крае упругой полосы, в которую вложены опорные элементы типа стоек-стержней. При определенных предположениях относительно опорных элементов построено замкнутое решение в интегралах Фурье. Получены конечные аналитические формулы для определения прогиба балки и распределения контактного давления под ней. При некоторых частных случаях параметров задачи проведена ее численная реализация. По результатам вычислений построены кривые изогнутой оси балки и графики распределения контактных напряжений.

Из этих графиков следует, что наличие опорных элементов существенно влияет на прогиб балки и распределение контактных напряжений под ней. Максимальные значения этих величин, как и следовало ожидать, уменьшаются и, в итоге, общая картина распределения этих величин сглаживается.

Результаты вычислений позволяют предположить, что при помощи соответствующего выбора основных параметров – жесткость стоек-стержней на растяжение - сжатие, взаимное расположение стоек, внешняя нагрузка – можно управлять формой изогнутой оси балки или получить близкое к требуемому распределение контактного давления. При подходящем расположении стоек-стержней можно избежать отрыва балки от края полосы, что имеет немаловажную роль в подобных задачах.

Предлагаемый подход решения задачи может найти практическое применение, например, при проектировании водяных платформ и производственных конвейерных линий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т.2, М., Наука, 1965, с.480.
2. Развитие контактных задач в СССР. М., Наука, 1976, с. 492.
3. Герсеванов Н.М., Мачерет М.Я. К вопросу о бесконечной длинной балке на упругой почве, нагруженной силой. «Сб. НИС фундаментостроя», 1937, №8
4. Клубин П.И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании. Инж. сб. АН СССР, 1952, т. XII, стр. 95-135.
5. Корнев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М., Гостройиздат, 1954, 232с.
6. Попов Г.Я., Контактные задачи для линейно-деформируемого основания, Киев-Одесса, Выша школа, 1982, с. 182
7. Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином, ПММ, 1975, т.39, вып. 6, с. 1100-1109.
8. Григорян Э.Х. Изгиб полубесконечной балки, лежащей на упругой полуплоскости, Изд. НАН Армении, Механика, 1992, т. 45, №1-2, с.11-26
9. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О задаче изгиба полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости, Изд. НАН РА, Механика, 2008, т. 61, №4, с. 5-19
10. Ефимов А.Б., Малый В.И., Толкачева Н.М. Контактная задача для упругого тела с тонким покрытием, МТТ, 1969, №1, с.166-171.
11. Агабекян П., Агаян К. Изгиб бесконечной кусочно-однородной балки, лежащей на границе упругой полуплоскости. Изв.НАН РА, 1999, т.52, №3, с. 3-8.
12. Агаян К.Л., Манукян Э.А. Изгиб кусочно-однородной балки на упругой полуплоскости, Изд. НАН РА, Механика, 2000, т. 33, №2, с. 3-9
13. Агаян К.Л. Изгиб двух полубесконечных балок на крае упругой полуплоскости плоским штампом, Изд. НАН РА, Механика, 2010, т. 63, №4, с.3-11.
14. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.- М.: Наука, 1983.- 488с.
15. Агаян К.Л., Мартиросян А.В. Изгиб балки бесконечной длины на границе упругой полуплоскости. Сборник трудов VII-ой международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», 04-08 октября 2021, Цахкадзор, Армения, с. 10-14.

#### Сведения об авторах:

**Агаян Каро Леренцович** – проф., д.ф.м.н., в.н.с., Институт механики НАН РА,  
тел. +37491 485566,

**E-mail:** [karo.aghayan@gmail.com](mailto:karo.aghayan@gmail.com)

**Амирджанян Арутюн Арменович** – к.ф.м.н., в.н.с., Институт механики НАН РА,  
тел. +37477 920639,

**E-mail:** [amirjanyan@gmail.com](mailto:amirjanyan@gmail.com)

Поступила в редакцию 06.03.2023