ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №4, 2022 Механика
УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2022.75.4-74

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян

Ключевые слова: плоская контактная задача, осесимметрическая контактная задача, контакт стрингера с другим телом, условие ограниченности контактных напряжений, энергетический принцип Кастильяно.

S.M. Mkhitaryan
On the boundedness of stresses in contact problems of the theory of elasticity.

Keywords: plane contact problem, axisymmetric contact problem, stringer contact with another body, contact stress limitation condition, Castigliano's energy principle.

The article deals with the issue of determining the necessary dependencies between the characteristic elastic and geometric parameters that ensure the boundedness of the contact pressures (stresses) at the boundaries of the contact areas in the classical contact problems of the theory of elasticity, namely, in plane and axisymmetric problems, as well as in the problem of contact interaction of a stringer of finite length with an elastic half-plane. To determine the size of contact areas or other parameters when contact stresses are restricted, along with the widely used principle of continuity of contact stresses on smooth contact surfaces, the Castigliano energy principle is also used for elastic bodies, for which Hooke's law is valid. Based on the identity of the results obtained by both principles, their equivalence is shown. In addition, new results have been obtained for these two classical contact problems, supplementing those previously obtained. In the problem of the contact of a stringer with an elastic half-plane, by the principle of stress continuity, the conditions for the boundedness of contact stresses at the ends of a stringer are obtained only in two special cases. In addition, new results have been obtained for these two classical contact problems, supplementing those previously obtained. In the problem of the contact of a stringer with an elastic half-plane, by the principle of stress continuity, the conditions for the boundedness of contact stresses at the ends of a stringer are obtained only in two particular cases.

Ս.Մ. Մխիթարյան
Առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրներում լարումների սահմանափակության մասին

Հիմնաբառեր. հարթ կոնտակտային խնդիր, առանցքահամաչափ կոնտակտային խնդիր, առաձգական մարմնի հետ վերադիրի կոնտակտ, կոնտակտային լարումների սահմանափակության պայման, Կաստիլյանոյի էներգետիկ սկզբունք:

Հոդվածում դիտարկվում է առաձգական և երկրաչափական պարամետրերի միջև անհրաժեշտ կախվածությունների որոշման հարցը, որոնք ապահովում են առաձգականության տեսության հարթ և առանցքահամաչափ դասական կոնտակտային խնդիրներում կոնտակտային լարումների սահմանականությունը՝ կոնտակտային տիրույթների եզրագծերի վրա: Նույն հարցը քննարկվում է նաև վերջավոր երկարության վերադիրի և առաձգական կիսահարթության կոնտակտային փոխազդեցության խնդրում: Կոնտակտային լարումների սահմանափակության դեպքում կոնտակտային տիրույթների չափերի կամ այլ պարամետրերի որոշման համար ողորկ կոնտակտային մակերևույթների դեպքում լայնորեն կիրառվող կոնտակտային լարումների անընդհատության սկզբունքին հավասար կիրառվում է նաև Կաստիլյանոյի էներգետիկ սկզբունքը առաձգական մարմինների համար, որոնք ենթարկվում են Հուկի օրենքին: Երկու սկզբունքներով ստացվող արդյունքների նույնական լինելու հիման վրա ցույց է տրված այդ սկզբունքների համարժեքությունը:

Վերադիրի և առաձգական կիսահարթության կոնտակտային փոխազդեցության խնդրում վերադիրի ծայրակետերում կոնտակտային լարումների սահմանափակության պայմանները՝ լարումների անընդհատության սկզբունքով, ստացվել են միայն երկու մասնավոր դեպքերում:

В статье рассматривается вопрос определения необходимых зависимостей между характерными упругими и геометрическими параметрами, обеспечивающих ограниченность контактных давлений (напряжений) на границах контактных областей в классических контактных задачах теории упругости, а именно, в плоских и осесимметрических задачах, а также в задаче контактного взаимодействия стрингера конечной длины с упругой полуплоскостью. Для определения размеров областей контакта или других параметров, когда контактные напряжения ограничены, наряду с широко применяемым принципом непрерывности контактных напряжений на гладких контактных поверхностях, применяется также энергетический принцип Кастильяно для упругих тел, для которых справедлив закон Гука. На основании идентичности результатов, полученных обеими принципами, показана их эквивалентность. Кроме того, по указанным двум классическим контактным задачам получены новые результаты, дополняющие ранее полученные. В задаче о контакте стрингера с упругой полуплоскостью условия ограниченности контактных напряжений на концах стрингера на основе принципа непрерывности напряжений получены лишь в двух частных случаях.

1.Введение. Классические контактные задачи о взаимодействии двух упругих тел составляют обширную область математической теории упругости, на основе которых в конце XIX и в начале XX столетий в механике деформируемого твердого тела сформировалось теоретически и практически значимое новое научное направление. В последние десятилетия, да и в настоящее время, это направление интенсивно развивается, обогащаясь новыми основополагающими идеями, методами и результатами. Классические контактные задачи теории упругости и, вообще, контактные задачи механики деформируемого твердого тела и результаты их исследования легли в основу теории контактной прочности и механики контактного разрушения, широко применяемых в расчетах разнообразных машиностроительных, в частности, авиационных, строительных, конструкций и их деталей. Исследованию контактных задач посвящены многочисленные оригинальные научные статьи и фундаментальные монографии [1–7]. Основные достижения теории контактных и смешанных задач, полученные до 1976 г., с достаточно полнотой отражены в коллективной монографии [8], а до недавнего времени в [9].

В классических контактных задачах теории упругости принимаются известные гипотезы Герца, вследствие чего одно из двух упругих тел, взаимодействующих между собой, можно заменить упругими основаниями бесконечных размеров, а вместо другого тела рассматривать, без ограничения общности, абсолютно жесткий штамп различных геометрических форм. При этом в качестве упругих оснований берутся полупространство, слой, полуплоскость, полоса, плоские и пространственные клиновидные упругие тела, упругая плоскость с круговым отверстием и прочие. В такой постановке контактных задач контактные напряжения под штампами в концевых точках контактного отрезка или на границе контактной области, как правило, обращаются в бесконечность. Тем самым эти напряжения выходят из пределов применимости закона Гука, который входит в постановку задач и которым обусловлена математическая структура определяющих функциональных уравнений задач. В конечном итоге на контактной поверхности возникает концентрация напряжений, существенно влияющая на характеристики прочности конструкций, снижая их. Поэтому возникает необходимость надлежащим выбором характерных геометрических и физических параметров данной задачи устранить концентрацию контактных напряжений. Для достижения этой цели обычно применяется принцип непрерывности напряжений на контактной поверхности [2–6]. Но, как показано в работах [7, 10], полученные по этому методу размеры контактной зоны не совпадают с экспериментальными данными, т.е. полученные по теории Герца результаты разняться от результатов, полученных экспериментальным путем. Это объясняется тем, что в некоторых местах контактирующих между собой поверхностей из-за их негладкости возникают локальные отталкивающие силы, т.е. происходит явление адгезии. С учетом последнего в [7, 10] предложен энергетический принцип определения размеров контактных зон, аналогично энергетическому принципу Гриффитса [11] в теории трещин.

С другой стороны, упомянутый выше принцип непрерывности контактных напряжений сразу вытекает из известного начала или энергетического принципа Кастильяно [12]. Согласно последнему, если для упругого тела справедлив закон Гука, то накопленная в теле потенциальная энергия деформации минимальна. Более того, если данная задача имеет единственное решение, то этот минимум энергии также единственный. А именно, справедливость закона Гука означает непрерывность напряжений и деформаций, т.е. эти два принципа эквивалентны.

В настоящей статье размеры контактной области в плоской и осесимметрической контактных задачах теории упругости при несколько более общих предположениях, нежели в [5], определяются при помощи энергетического принципа Кастильяно. Одновременно полученные в [3] результаты по исследованию этих задач дополняются некоторыми новыми элементами. Результаты, полученные по принципу непрерывности напряжений на гладких контактных поверхностях и по энергетическому принципу Кастильяно, тождественно совпадают, что показывает эквивалентность этих принципов. Кроме того, в некоторых частных случаях получены условия ограниченности контактных направлений в задаче о контактном взаимодействии конечного стрингера с упругой полуплоскостью.

2. Плоская контактная задача теории упругости. Эта задача обстоятельно исследована в монографиях [3–4]. Пусть в нижнюю упругую полуплоскость $y \le 0$ с упругими постоянными (E, ν), отнесенную к прямоугольной системе координат Oxy, под действием центральной вертикальной силы величины P вдавливается абсолютно жесткий штамп с гладкой поверхностью. Эта поверхность описывается уравнением $y = f(x)$, где функция $f(x)$ неотрицательная, дифференцируемая и четная функция $\left(f(x) \ge 0\right.$, и $f(-x) = f(x)$ при $\left.x \in (-a, a)\right)$. Здесь $[-a, a]$ контактный отрезок, по которому после вдавливания в упругое основание штамп соприкасается с границей упругой полуплоскости. Обозначим через $p(x)$ контактное давление под штампом, т.е. положим

$$\sigma_y \Big|_{y=-0} = \begin{cases} -p(x) & \left(x \in [-a, a]\right); \\ 0 & \left(x \in (-\infty, \infty) \setminus [-a, a]\right); \end{cases} \quad \tau_{yx} \Big|_{y=-0} = 0 \ (-\infty < x < \infty);$$

где σ_y и τ_{yx} – соответственно, компоненты нормальных и касательных напряжений.

Тогда решение поставленной задачи сводится к решению следующего интегрального уравнения (ИУ) Фредгольма первого рода с симметрическим логарифмическим ядром [3].

$$\int_{-a}^{a} \ln\frac{1}{|x-s|}\; p(s)\,ds = \frac{c-f(x)}{\vartheta} \quad (-a<x<a), \tag{2.1}$$

решение $p(x)$ которого должно удовлетворять условию равновесия штампа

$$\int_{-a}^{a} p(x)\,dx = P. \tag{2.2}$$

Здесь c –константа, а $\vartheta = 2\left(1-\nu^2\right)/\pi E$ при плоской деформации и $\vartheta = 2/\pi E$ при обобщенном плоском напряженном состоянии. Считая $f(x)$ дифференцируемой функцией, обе части ИУ (2.1) продифференцируем по x. В результате относительно $p(x)$ придем к следующему сингулярному интегральному уравнению (СИУ):

$$\int_{-a}^{a} \frac{p(s)\,ds}{s-x} = -\frac{f'(x)}{\vartheta} \quad (-a<x<a) \tag{2.3}$$

опять при условии (2.2). Решение СИУ (2.3) в классе неограниченных на концах интервала $(-a,a)$ функций при этом условии имеет вид [3,12]

$$p(x) = \frac{1}{\vartheta\pi^2\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2-s^2}\,f'(s)\,ds}{s-x} + \frac{P}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \quad (-a<x<a). \tag{2.4}$$

Отсюда вытекает, что для непрерывности (ограниченности) контактных напряжений или контактного давления $p(x)$ в концевых точках $x=\pm a$ интервала $(-a,a)$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\frac{1}{\pi\vartheta}\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a+s}{a-s}}\,f'(s)\,ds = P,\; \frac{1}{\pi\vartheta}\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-s}{a+s}}\,f'(s)\,ds = -P. \tag{2.5}$$

Преобразуя первое условие (2.5) и складывая их, придем к условиям

$$\frac{1}{\pi\vartheta}\int_{-a}^{a} \frac{f'(s)\,s\,ds}{\sqrt{a^2-s^2}} = P;\; \int_{-a}^{a} \frac{f'(s)\,ds}{\sqrt{a^2-s^2}} = 0. \tag{2.6}$$

Таким образом, для непрерывности контактных напряжений на концах контактного участка $(-a,a)$ необходимо и достаточно выполнение условий (2.6).

Далее, при выполнении условий (2.5) или (2.6) формула (2.4) для $p(x)$ представляется в форме

$$p(x) = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\pi^2\vartheta}\int_{-a}^{a} \frac{f'(s)\,ds}{(s-x)\sqrt{a^2-s^2}} \quad (-a\le x\le a). \tag{2.7}$$

Исходя из условий (2.6), в [3] для некоторых частных случаев функции $f(x)$ определена полудлина a контактного отрезка $[-a, a]$ и по формуле (2.7) вычислено соответствующее контактное давление $p(x)$.

Обратимся теперь к энергетическому принципу Кастильяно и отметим, что согласно (2.1) вертикальные перемещения $v(x,-0)$ граничных точек нижней упругой полуплоскости от давления $p(x)$ определяется по формуле

$$\mathrm{v}(x,-0) = -\vartheta\int_{-a}^{a} \ln\frac{1}{|x-s|}\, p(s)\,ds + C \quad (-\infty < x < \infty).$$

А для потенциальной энергии деформации U, накопленной в нижней упругой полуплоскости $y \le 0$ будем иметь [2]

$$U = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} \mathrm{v}(x,0)\sigma_y\Big|_{y=-0} dx = \frac{\vartheta}{2}\int_{-a}^{a} p(x)\,dx\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\,p(s)\,ds - CP.$$

Далее решение ИУ (2.1) представим в форме бесконечного ряда

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\sum_{n=0}^{\infty} p_n T_n(x/a) \quad (-a < x < a) \tag{2.8}$$

с неизвестными коэффициентами p_n, где $T_n(x)$ – многочлены Чебышева первого рода. Представление (2.8) для $p(x)$ подставим в левую часть ИУ (2.1), поменяем порядок интегрирования и суммирования, затем воспользуемся известными спектральными соотношениями

$$\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\frac{T_n(s/a)\,ds}{\sqrt{a^2-s^2}} = \mu_n T_n\left(\frac{x}{a}\right) \quad \left(n = 0,1,2,... \qquad -a < x < a\right)$$

$$\mu_n = \begin{cases} \dfrac{\pi}{n}(n = 1,2,...); \\ \pi\ln(2/a \quad n = 0); \end{cases}$$

а также условиями ортогональности многочленов Чебышева первого рода:

$$\int_{-a}^{a} T_m\left(\frac{x}{a}\right)T_n\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \nu_{mn} \quad (m,n = 0,1,2,...)$$

$$\nu_{mn} = \begin{cases} \pi(m = n = 0); \\ \dfrac{\pi}{2}(m = n \ne 0); \\ 0 \quad (m \ne n). \end{cases}$$

После простых преобразований находим

$$U=\frac{\vartheta}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\nu_n p_n^2-\frac{1}{2}C\vartheta P;\ \ \nu_n=\begin{cases}\pi\left(n=0\right),\\ \dfrac{\pi}{2}\quad\left(n=1,2,\ldots\right).\end{cases}\tag{2.9}$$

Теперь вычислим коэффициенты p_n. Из (2.8) имеем

$$p_n=\frac{1}{\nu_n}\int_{-a}^{a}p\left(x\right)T_n\left(\frac{x}{a}\right)dx\quad\left(n=0,1,2,\ldots\right).$$

Подставляя сюда выражение из (2.4), после несложных преобразований получим

$$p_n=\frac{1}{\nu_n}\left(P\delta_n-\frac{f_n}{\pi a\vartheta}\right)\quad\left(n=0,1,2,\ldots\right);$$

$$\delta_n=\begin{cases}1\left(n=0\right);\\ 0\left(n=1,2,\ldots\right);\end{cases}\tag{2.10}$$

$$f_0=0;\qquad f_n=\int_{-a}^{a}f'\left(s\right)U_{n-1}\left(\frac{s}{a}\right)\sqrt{a^2-s^2}\,ds\ \left(n=1,2,\ldots\right),$$

где U_{n-1} – многочлены Чебышева второго рода. Приняв во внимание значения ν_n и полагая в интеграле (2.10) $s=a\eta\ \left(-1\le\eta\le1\right)$, будем иметь

$$p_n=\begin{cases}P/\pi\quad\left(n=0\right);\\ -g_n\quad\left(n=1,2,\ldots\right);\end{cases}$$

$$g_n=\frac{f_n}{\pi a\vartheta\nu_n}=\frac{2a}{\vartheta\pi^2}\int_{-1}^{1}f'\left(a\eta\right)U_{n-1}\left(\eta\right)\sqrt{1-\eta^2}\,d\eta.\tag{2.11}$$

Отсюда, предполагая существование второй производной $f''\left(x\right)$, находим

$$\frac{dp_n}{da}=\begin{cases}0\ \left(n=0\right)\\ -\dfrac{2}{\pi^2\vartheta}\displaystyle\int_{-1}^{1}f'\left(a\eta\right)U_{n-1}\left(\eta\right)\sqrt{1-\eta^2}\,d\eta-\\ -\dfrac{2a}{\pi^2\vartheta}\displaystyle\int_{-1}^{1}f''\left(a\eta\right)U_{n-1}\left(\eta\right)\eta\sqrt{1-\eta^2}\,d\eta\quad\left(n=1,2,\ldots\right).\end{cases}\tag{2.12}$$

Теперь из (2.9)

$$\frac{dU}{da}=\vartheta\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\nu_n p_n\frac{dp_n}{da}\tag{2.13}$$

и, следовательно, параметр a – полудлина контактного отрезка, будет определяться из уравнения

$$\frac{dU}{da}=0. \tag{2.14}$$

Итак, вычисление параметра a в плоской контактной задаче по энергетическому принципу Кастильяно осуществляется при помощи формул (2.11) – (2.14).

Для энергии U помимо (2.9) можно получить другую формулу, содержащую, вместо ряда, интегралы. А именно, согласно определяющему ИУ (2.1)

$$v(x,-0)=-\vartheta\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}p(s)\,ds=f(x)-c \quad (-\infty<x<\infty).$$

Поэтому

$$U=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left[f(x)-c\right]\sigma_y\Big|_{y=-0}=\frac{1}{2}\left[cP-\int_{-a}^{a}f(x)\,p(x)\,dx\right].$$

Далее подставляя сюда выражение $p(x)$ из (2.4), после простых преобразований придем к формуле

$$U=\frac{cP}{2}-\frac{P}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{1}{2\pi^2\vartheta}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-s^2}\,f'(s)\,ds\int_{-a}^{a}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}(s-x)} \tag{2.15}$$

Рассмотрим частный случай параболического штампа, полагая [3]

$$\frac{c-f(x)}{\vartheta}=\alpha-Ax^2\Rightarrow f(x)=c-\alpha\vartheta+A\vartheta x^2\Rightarrow f'(x)=2A\vartheta x.$$

Для этой функции $f(x)$ вычислим входящие в (2.15) элементарные интегралы. Получим

$$U=\frac{cP}{2}-\frac{1}{4}AP\vartheta a^2+\frac{\vartheta A^2}{8}a^4,$$

откуда

$$\frac{dU}{da}=-\frac{1}{2}AP\vartheta a+\frac{1}{2}\vartheta A^2a^3=0.$$

Из этого уравнения находим $P=a^2A,$ т.е. $a=\sqrt{P/A},$, что совпадает с известным результатом из [3]. Этот же результат вытекает из формул (2.10) – (2.14). В данном частном случае из (2.10) будем иметь

$$p_n=\begin{cases}\pi P & (n=0);\\ -a^2\,A/\pi & (n=2);\\ 0 & (n=1,3,\ldots).\end{cases}$$

Тогда (2.13) дает

$$U=\frac{\pi\vartheta}{2}\left[P^2\ln\frac{2}{a}+\frac{1}{4}a^4A^2\right).$$

Отсюда

$$\frac{dU}{da}=\frac{\pi\vartheta}{2}\left(-\frac{P^2}{a}+a^3A^2\right) \text{ и } \frac{dU}{da}=0\Rightarrow P=a^2A\Rightarrow a=\sqrt{P/A}.$$

С другой стороны

$$\frac{d^2U}{da^2}=\frac{\pi\vartheta}{2}\left(\frac{P^2}{a^2}+3a^2A^2\right)>0$$

и, следовательно, при указанном a имеем единственный минимум энергии.

3. Осесимметрическая контактная задача теории упругости. Перейдем к осесимметрической контактной задаче теории упругости. Пусть в упругое полупространство $z\le 0$ с упругими постоянными (E,ν), отнесенное к цилиндрической системе координат r,φ,z, под действием центральной вертикальной силы P вдавливается абсолютно жесткий штамп. Предполагается, что штамп имеет форму тела вращения с абсолютно гладкой поверхностью, которая описывается уравнением $z=f(r)\left(f(0)=0, f(r)>0 \quad r>0\right)$. Тогда на поверхности упругого полупространства образуется контактная площадка в форме круга с радиусом a. Действующее на этой площадке контактное давление обозначим через $p(r)$, т.е. $\sigma_r\big|_{z=-0}=-p(r)\ \ (0\le r<a)$.

Для вывода определяющего ИУ относительно $p(r)$, воспользуемся известным решением задачи Буссинеска. Тогда для вертикальных перемещений $w(r,-0)$ граничных точек нижнего упругого полупространства будем иметь

$$w(r,-0)=-\Theta\int_0^a\int_{-\pi}^{\pi}K(r,\rho)p(\rho)\rho d\rho \quad (0<r<\infty)$$
$$K(r,\rho)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\vartheta)}};\qquad \Theta=\frac{1-\nu^2}{\pi E}. \tag{3.1}$$

Далее интеграл $K(r,\rho)$ преобразуем в интеграл Вебера-Сонина, для чего положим д $\tau=\varphi-\vartheta$ и примем во внимание свойство интегралов от периодических функций. В результате

$$K(r,\rho)=\int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta}\frac{d\tau}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\tau}}=2\int_0^{\pi}\frac{d\tau}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\tau}}.$$

Теперь подкоренное выражение в этом интеграле представим в форме

$$r^2+\rho^2-2r\rho\cos\tau=(r+\rho)^2\left(1-k^2\cos^2\frac{\tau}{2}\right)\qquad\left(k^2=\frac{4r\rho}{(r+\rho)^2}\le 1\right)$$

и перейдем к переменной $u=(\pi-\tau)/2$. Будем иметь

$$K(r,\rho)=\frac{4}{r+\rho}K(k)=\frac{2\pi}{r+\rho}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\frac{4r\rho}{(r+\rho)^2}\right)\ (r,\rho>0).$$

Здесь $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода модуля k, $F(\alpha,\beta,\gamma,\chi)$ – гипергеометрическая функция Гаусса и использована известная формула из [13] (стр.919, ф-ла 8.113.1). Далее, воспользовавшись формулами опять из [13] (стр.1057, ф-ла 9.134.3,стр.680, ф-ла 6.152.1), окончательно находим

$$K(r,\rho)=2\pi\int_0^a J_0(\lambda r)J_0(\lambda\rho)d\lambda\ \ (r,\rho>0),$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода нулевого индекса. Последний интеграл и есть интеграл Вебера-Сонина. В результате, формула (3.1) запишется в виде

$$w(r,-0)=-2\pi\Theta\int_0^a W_0(r,\rho)p(\rho)\rho d\rho\quad(0\le r<\infty)$$

$$W_0(r,\rho)=\int_0^\infty J_0(\lambda r)J_0(\lambda\rho)d\lambda \tag{3.2}$$

Далее, (3.2) подставим в условие контакта штампа с упругим полупространством

$$w(r,-0)=f(r)-\alpha\quad(0\le r\le a).$$

Тогда для определения контактного давления придем к следующему ИУ Фредгольма первого рода с симметрическим ядром:

$$\int_0^a W_0(r,\rho)p(\rho)\rho d\rho=g(r);\ \ g(r)=\frac{\alpha-f(r)}{2\pi\Theta}, \tag{3.3}$$

где α – мера жесткого погружения штампа в упругое полупространство. ИУ (3.3) должно быть рассмотрено при условии равновесия штампа

$$\int_0^a p(\rho)\rho d\rho=\frac{P}{2\pi}. \tag{3.4}$$

Здесь решение определяющего ИУ (3.3) – (3.4) построим более простым методом, нежели в [3]. А именно, к (3.3) – (3.4) применим метод последовательных обращений интегральных уравнений типа Абеля. С этой целью воспользуемся известным представлением интеграла Вебера-Сонина [14,15].

$$W_0(r,\rho)=\int_0^\infty J_0(\lambda r)J_1(\lambda\rho)d\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^{mtn(r,\rho)}\frac{dt}{\sqrt{(r^2-t^2)(\rho^2-t^2)}}\ \ (r,\rho>0).$$

Это представление ядра $W_0(r,\rho)$ подставим в ИУ (3.3):

$$\frac{2}{\pi}\int_0^r p(\rho)\rho d\rho\int_0^\rho \frac{dt}{\sqrt{(r^2-t^2)(\rho^2-t^2)}}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^a p(\rho)\rho d\rho\int_0^r \frac{dt}{\sqrt{(r^2-t^2)(\rho^2-t^2)}}=g(r)\quad (0<r<a).$$

и поменяем порядок интегралов:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{dt}{\sqrt{r^2-t^2}}\int_t^r \frac{p(\rho)\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2-t^2}}+\frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{dt}{\sqrt{r^2-t^2}}\int_t^r \frac{p(\rho)\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2-t^2}}=g(r)\quad (0<r<a).$$

Отсюда

$$\frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{dt}{\sqrt{r^2-t^2}}\int_t^r \frac{p(\rho)\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2-t^2}}=g(r)\quad (0<r<a)$$

и, следовательно, полагая

$$\chi(t)=\int_t^a \frac{p(\rho)\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2-t^2}}\quad (0<t<a), \tag{3.5}$$

будем иметь

$$\frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{\chi(t)dt}{\sqrt{r^2-t^2}}=g(r)\quad (0<r<a). \tag{3.6}$$

Таким образом, решение исходного определяющего ИУ (3.3) свелось к последовательному решению двух ИУ Абеля (3.5) и (3.6).

Для решения ИУ (3.5) и (3.6) воспользуемся формулами обращения Абеля:

$$\begin{aligned}&\int_0^\xi \frac{\varphi(\eta)d\eta}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}}=h(\xi)\Rightarrow\varphi(\xi)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi \frac{h(\eta)\eta d\eta}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}};\\&\int_\xi^a \frac{\psi(\eta)d\eta}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}=g(\xi)\Rightarrow\psi(\xi)=-\frac{2}{\pi}\int_\xi^a \frac{g(\eta)\eta d\eta}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Теперь по первой паре формул (3.7) обратим ИУ (3.6)

$$\chi(r)=\frac{d}{dr}\int_\xi^a \frac{g(t)tdt}{\sqrt{r^2-t^2}}\quad (0<r<a), \tag{3.8}$$

а по второй паре формул (3.7) – ИУ (3.5):

$$p(r)=-\frac{2}{\pi r}\frac{d}{dr}\int_r^a \frac{\chi(t)tdt}{\sqrt{t^2-r^2}}\quad (0<r<a). \tag{3.9}$$

Далее, предполагая, что функция $f(r)$ и, следовательно, функция $g(r)$ непрерывно дифференцируема на $0 \le r \le a$, интегрированием по частям преобразуем формулу (3.8):

$$\chi(r) = \frac{d}{dr}\left[g(t)\sqrt{r^2-t^2}\Big|_{t=r}^{t=0} + \int_0^r \sqrt{r^2-t^2}\, g'(t)\,dt \right] = r\int_0^r \frac{g'(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} + g(0).$$

Так как $f(0)=0$, то $g(0) = \dfrac{\alpha}{2\pi\Theta}$.

Следовательно,

$$\chi(r) = r\int_0^r \frac{g'(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} + \frac{\alpha}{2\pi\Theta} \quad (0 \le r < a). \tag{3.10}$$

Аналогичные преобразования формулы (3.9) приводят ее к виду

$$p(r) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\chi(a)}{\sqrt{a^2-r^2}} - \int_r^a \frac{\chi'(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}} \right] \quad (0 < r < a), \tag{3.11}$$

где, согласно (3.10),

$$\chi(a) = a\int_0^a \frac{g'(t)\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}} + \frac{\alpha}{2\pi\Theta}. \tag{3.12}$$

Предполагая функцию $g(r)$ дважды непрерывно дифференцируемой, из (3.10) находим

$$\chi'(r) = \left[r\int_0^r \frac{g'(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} + \frac{\alpha}{2\pi\theta} \right]'_r = \left[r\int_0^1 \frac{g'(ur)\,du}{\sqrt{1-u^2}} \right]'_r = \int_0^1 \frac{g'(ur)\,du}{\sqrt{1-u^2}} +$$

$$+ r\int_0^1 \frac{g''(ur)\,u\,du}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{2\pi\Theta}\int_0^r \frac{f'(t)+tf''(t)}{\sqrt{r^2-t^2}}\,dt \qquad (0 < r < a).$$

Итак,

$$\chi'(r) = -\frac{1}{2\pi\Theta}\int_0^r \frac{f'(t)+tf''(t)}{\sqrt{r^2-t^2}}\,dt \qquad (0 < r < a). \tag{3.13}$$

Далее, подставляя выражение $\chi'(r)$ из (3.13) в (3.11), после несложных преобразований решение исходного определяющего ИУ (3.3) представим формулой

$$p(r)=\frac{1}{\pi^2\Theta}\left\{\left[\alpha-a\int_0^a\frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{a^2-t^2}}\right]\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}+\right.$$

$$\left.+\int_0^a L(r,u)\left[f'(u)+uf''(u)\right]du\quad(0\le r<a)\right.\tag{3.14}$$

$$L(r,u)=L(u,r)=\int_{\max(r,u)}^{a}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-r^2)(t^2-u^2)}}.$$

Симметрическое ядро $L(r,u)$ при помощи известного выражения этих интегралов из [13] (стр.260, ф-ла 3.152.11) запишется в виде

$$L(r,u)=\begin{cases}\dfrac{1}{r}F\left(\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{a^2-u^2}}\right),\dfrac{u}{r}\right) & (u<r);\\[2ex] \dfrac{1}{u}F\left(\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{a^2-u^2}}{\sqrt{a^2-r^2}}\right),\dfrac{r}{u}\right) & (u>r);\end{cases}$$

где $F(u,t)$ – неполный эллиптический интеграл первого рода.

Далее выражение $p(r)$ из (3.11) подставим в условие равновесия штампа (3.4)

$$P=2\pi\int_0^a p(r)r\,dr=4\left[\chi(a)\int_0^a\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}-\int_0^a r\,dr\int_r^a\frac{\chi'(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}\right]=$$

$$=4\left[\chi(a)\sqrt{a^2-r^2}\Big|_{r=a}^{r=0}+\frac{1}{2}\int_0^a\chi'(t)\,dt\int_0^t\frac{d(t^2-r^2)}{\sqrt{t^2-r^2}}\right].$$

После простых преобразований находим

$$P=4\int_0^a\chi(t)\,dt.$$

Теперь сюда подставим выражение $\chi(t)$ из (3.10). В результате будем иметь

$$P=\frac{2}{\pi\Theta}\left[\alpha a-\int_0^a\frac{rf(r)\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}\right].\tag{3.15}$$

Так как $P>0$, то отсюда для меры погружения штампа в упругое полупространство получим следующую оценку:

$$\alpha>\frac{1}{a}\int_0^a\frac{rf(r)\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Таким образом, контактное давление $p(r)$ под штампом выражается формулами (3.10) – (3.11) или формулой (3.14). А зависимость меры погружения штампа в упругое основание α от прижимающей штампа вертикальной силы P выражается формулой (3.15).

Теперь условие ограниченности контактного давления $p(r)$ на граничной окрестности $r = a$ контактной области, согласно (3.11), запишется в виде $\chi(a) = 0$ или в виде

$$a\int_0^a \frac{g'(t)\,dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = -\frac{\alpha}{2\pi\Theta}. \tag{3.16}$$

Рассмотрим частный случай, когда поверхность штампа представляет собой параболоид вращения: $f(r) = Ar^2\ (A > 0).$ Тогда

$$g(r) = \frac{\alpha - Ar^2}{2\pi\theta} \Rightarrow g'(r) = -\frac{Ar}{\pi\Theta}$$

и, следовательно, из (3.10)

$$\chi(r) = -\frac{A}{\pi\Theta}r^2 + \frac{\alpha}{2\pi\Theta}.$$

Отсюда

$$\chi(a) = 0 \Rightarrow \alpha = 2Aa^2 \tag{3.17}$$

и, следовательно, из (3.11)

$$p(r) = \frac{4A}{\pi^2\Theta}\sqrt{a^2 - r^2} \quad (0 \le r \le a). \tag{3.18}$$

Далее из (3.15)

$$P = \frac{8Aa^3}{3\pi\Theta},$$

откуда

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi\Theta P}{8A}}. \tag{3.19}$$

При этом формула (3.18) приобретает вид

$$p(r) = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}\,\frac{P}{\pi a^2} \ (0 \le r \le a), \tag{3.20}$$

а формула (3.17) – вид

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt[3]{9\pi^2 A\Theta P}. \tag{3.21}$$

Результаты (3.19) – (3.21) совпадают с результатами, полученными раннее в [3] другими методами.

Обратимся теперь к энергетическому принципу Кастильяно и вычислим энергию деформации упругого полупространства U . Вертикальные перемещения граничных точек упругого полупространства $z < 0$, вызванные вследствие вдавливания штампа в него, определяются формулой (3.2). С другой стороны, согласно определяющему ИУ (3.3)

$$w(r,-0) = f(r) - \alpha = -2\pi\Theta g(r);\ g(r) = \frac{\alpha - f(r)}{2\pi\Theta} \qquad (0 \le r \le a).$$

Следовательно,

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{L\pi} d\varphi \int_0^a w(r,-0)\sigma_z\big|_{z=-0} r dr = 2\pi^2\Theta \int_0^a g(r)p(r) r dr.$$

Подставляя сюда выражения $p(r)$ из (3.14) и $g(r)$, после элементарных преобразований получим

$$U = 2\left[\alpha a\chi(a) - \alpha\int_0^a \chi'(t) t dt - \chi(a)\int_0^a \frac{f(r) r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \int_0^a f(r) r dr \int_0^a \frac{\chi'(t) t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}\right]. \quad (3.22)$$

Пусть теперь, в частности, как выше

$$f(r) = Ar^2 \Rightarrow g(r) = \frac{\alpha - Ar^2}{2\pi\Theta} \Rightarrow g'(r) = -\frac{Ar}{\pi\Theta},$$

$$\chi(r) = -\frac{A}{\pi\Theta}r^2 + \frac{\alpha}{2\pi\Theta} \Rightarrow \chi'(r) = -\frac{\alpha A r}{\pi\Theta}.$$

Теперь после вычисления элементарных интегралов из (3.22) будем иметь

$$U = 2\left[\frac{\alpha}{\pi\Theta}\left(\frac{\alpha}{2} - Aa^2\right)\left(\alpha - \frac{2a^2A}{3}\right) + \frac{2a^3\alpha A}{3\pi\Theta} - \frac{4}{15\pi\Theta}A^5a^2\right].$$

Отсюда

$$\frac{dU}{da} = \frac{2a^2A}{3\pi\Theta}\left(\alpha - 2a^2A\right) = 0 \Rightarrow \alpha = 2a^2A.$$

Последнее совпадает с полученным выше результатом (3.17), обеспечивающим ограниченность контактного давления $p(r)$ на граничной окружности $r = a$ контактного круга. Далее, как и выше, получаются приведенные выше формулы (3.18) – (3.21).

Выражение энергии (3.22) преобразуем дальше, подставляя туда выражение функции $\chi(r)$ из (3.10). Не останавливаясь на элементарных выкладках, приведем окончательный результат:

$$U = \frac{1}{\pi\Theta}\left\{\alpha^2 a - 2\alpha\int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} f'(r) dr + \int_0^a t^2 dt \left[\int_0^t \frac{f'(r) dr}{\sqrt{t^2 - r^2}}\right]^2\right\}.$$

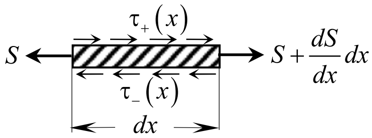
4. Контактное взаимодействие стрингера конечной длины с упругой полуплоскостью. Пусть нижняя упругая полуплоскость с упругими постоянными

(E,ν) на своей границе $y=0$ по отрезку $[-a,a]$ усилена стрингером. Пусть далее стрингер обладает модулем Юнга E_s, коэффициентом Пуассона ν_s, имеет высоту h_s и нагружен симметрически. А именно, на его верхней границе действуют касательные силы интенсивности $\tau_+(x)$, причем $\tau_+(-x)=-\tau_+(x)$ $(x\in[-a,a])$, а на кромках - горизонтальные сосредоточенные силы величины P, направленные в противоположные стороны. В предположении, что механическое поведение стрингера описывается известной моделью Мелана [16] как одномерного упругого континуума, т.е. стрингер находится в одноосном напряженном состоянии, требуется определить касательные контактные напряжения $\tau_-(x)(-a<x<a)$ под стрингером, а также горизонтальные усилия в сечениях стрингера $S(x)=\sigma_x(x)h_s$, где σ_x – нормальное напряжение в сечении x стрингера. При этом предполагается, что упругая полуплоскость находится в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния.

При различных видах нагружения стрингера и полуплоскости описанная контактная задача различными методами рассматривается во многих работах [17,18]. В работе [17] решение этой задачи впервые было сведено к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

В настоящей статье будет, в основном, рассмотрена возможность построения ограниченного на концах отрезка $[-a,a]$ решения определяющего интегро-дифференциального уравнения (ИДУ) поставленной выше контактной задачи для стрингера.

Приступив к выводу определяющего (ИДУ) задачи, рассмотрим равновесие дифференциальной части длины dx стрингера:



Так как по принятой модели стрингер находится в одноосном напряженном состоянии, то проектируя все силы на ось Ox можем записать

$$-S(x)+\tau_+(x)dx+S(x)+\frac{dS}{dx}dx-\tau_-(x)dx=0.$$

Отсюда

$$\frac{dS}{dx}=\tau_-(x)-\tau_+(x)\quad(-a<x<a),$$

причем для $S(x)$ должны выполняться граничные условия

$$S(-a)=P;\qquad S(a)=P.$$

Следовательно,

$$S(x) = P + \int_{-a}^{x} \left[\tau_-(s) - \tau_+(s) \right] ds \quad (-a \le x \le a). \tag{4.1}$$

Очевидно, что (4.1) при втором условии $S(a) = P$ приводит к тривиальному условию равновесия стрингера

$$\int_{-a}^{a} \left[\tau_-(s) - \tau_+(s) \right] ds = 0.$$

которое удовлетворяется автоматически из-за нечетности подынтегральных функций. Далее по закону Гука для стрингера

$$S(x) = \sigma_x h_s = E_s^* h_s \varepsilon_s = E_s^* h_s \frac{du_s}{dx}, \tag{4.2}$$

где $u_s = u_s(x)$ – упругие горизонтальные перемещения точек стрингера, а

$$E_s^* = \begin{cases} E_s / \left(1 - \nu_s^2\right) & \text{при плоской деформации;} \\ E_s & \text{при обобщенном плоском напряженном состоянии.} \end{cases}$$

Теперь из (4.1) и (4.2) будем иметь

$$\frac{du_s}{dx} = \frac{1}{h_s E_s^*} \left[\int_{-a}^{x} \tau_-(s) ds + P - \int_{-a}^{x} \tau_+(s) ds \right] \quad (-a \le x \le a). \tag{4.3}$$

С другой стороны, горизонтальные перемещения $u(x,-0)$ граничных точек нижней упругой полуплоскости $y \le 0$ от касательных напряжений интенсивности $\tau_-(x)$, распределенных по отрезку $[-a, a]$ ее границы, будут даваться формулой

$$u(x,-0) = \vartheta \int_{-a}^{a} \ln \frac{1}{|x-s|} \tau_-(s) ds + const \quad (-\infty < x < \infty).$$

Отсюда

$$\frac{du(x,-0)}{dx} = \vartheta \int_{-a}^{a} \frac{\tau_-(s) ds}{s - x} \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{4.4}$$

где

$$\vartheta = \begin{cases} \dfrac{2\left(1 - \nu^2\right)}{\pi E} & \text{при плоской деформации;} \\ \dfrac{2}{\pi E} & \text{при обобщенном плоском напряженном состоянии.} \end{cases}$$

Далее (4.3) и (4.4) подставим в условие контакта стрингера с упругой полуплоскостью

$$\frac{du(x,-0)}{dx} = \frac{du_s}{dx} \quad (-a < x < a).$$

В результате придем к следующему ИДУ относительно функции $\varphi(x)$ с сингулярным ядром Коши:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi'(s)\,ds}{s-x}=\lambda_*\varphi(x)+\lambda_* f(x) \qquad (-a<x<a)$$

$$\varphi(x)=\int_{-a}^{x}\tau_-(s)\,ds, \quad f(x)=P-\int_{-a}^{x}\tau_+(s)\,ds \tag{4.5}$$

$$\varphi(\pm a)=0; \quad \varphi'(x)=\tau_-(x); \qquad \lambda_*=\frac{1}{E_s^* h_s \vartheta\pi}.$$

Теперь ИДУ (4.5) как СИУ относительно $\tau_-(x)=\varphi'(x)$ обращаем в классе неограниченных на концах интервала $(-a,a)$ функций. Будем иметь [12,3]

$$\tau_-(x)=\varphi'(x)=-\frac{\lambda_*}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-s^2}\varphi(s)\,ds}{s-x}-$$
$$-\frac{\lambda_*}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-s^2}f(s)\,ds}{s-x} \qquad (-a<x<a). \tag{4.6}$$

Преобразуем первое слагаемое в (4.6):

$$-\frac{\lambda_*}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-s^2}p(s)\,ds}{s-x}=-\frac{\lambda_*}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\left(a^2-x^2+x^2-s^2\right)\varphi(s)\,ds}{(s-x)\sqrt{a^2-s^2}}=$$

$$=-\frac{\lambda_*}{\pi}\sqrt{a^2-x^2}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)\,ds}{(s-x)\sqrt{a^2-s^2}}+\frac{\lambda_* x}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)\,ds}{\sqrt{a^2-s^2}},$$

так как $\varphi(x)$ на $[-a,a]$ четная функция. В результате (4.6) запишется в виде

$$\tau_-(x)=\varphi'(x)=-\frac{\lambda_*}{\pi}\sqrt{a^2-x^2}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)\,ds}{(s-x)\sqrt{a^2-s^2}}+$$
$$+\frac{\lambda_*}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\left[Kx-\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-s^2}f(s)\,ds}{s-x}\right]; \qquad K=\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)\,ds}{\sqrt{a^2-s^2}}. \tag{4.7}$$

Отсюда вытекает, что для ограниченности $\tau_-(x)$ на концах интервала $(-a,a)$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{cases} Ka + \int\limits_{-a}^{a} \dfrac{a+s}{\sqrt{a^2-s^2}} f(s)\,ds = 0 \\ Ka + \int\limits_{-a}^{a} \dfrac{a-s}{\sqrt{a^2-s^2}} f(s)\,ds = 0; \end{cases}$$

которые вследствие четности функции $f(x)$ на $(-a,a)$ сводятся к одному условию

$$K + \int\limits_{-a}^{a} \frac{f(s)\,ds}{\sqrt{a^2-s^2}} = 0 \qquad \text{или} \qquad \int\limits_{-a}^{a} \frac{\varphi(s)\,ds}{\sqrt{a^2-s^2}} + \int\limits_{-a}^{a} \frac{f(s)\,ds}{\sqrt{a^2-s^2}} = 0 \tag{4.8}$$

Отметим, что условие (4.8) вытекает также из известного условия ограниченности решения СИУ с ядром Коши на концах интервала $[-a,a]$ [12].

Итак, при соблюдении условия (4.8) правая часть (4.7) будет ограниченной функцией при $x = \pm a$.

Теперь в (4.1), (4.5) и (4.8) введем безразмерные величины, полагая

$$\xi = x/a, \quad \eta = s/a; \quad \tau(s) = \frac{\tau_-(a\xi)}{\vartheta}; \quad g(\xi) = \frac{f(a\xi)}{a\vartheta};$$

$$\chi(\xi) = \frac{\varphi(a\xi)}{\vartheta} = \int\limits_{-1}^{\xi} \tau(\eta)\,d\eta; \quad \chi(\pm 1) = 0, \quad g(\xi) = P_0 - \int\limits_{-1}^{\xi} \tau_+^{(0)}(\eta)\,d\eta;$$

$$P_0 = \frac{P}{a\vartheta}; \quad \tau_+^{(0)}(\xi) = \frac{\tau_+(\xi a)}{\vartheta}, \qquad \lambda = a\lambda_* = \frac{a}{E_s^* h_s \vartheta \pi}.$$

В результате ИДУ (4.5) примет вид

$$\begin{gathered} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\chi'(\eta)\,d\eta}{\eta-\xi} = \lambda\chi(\xi) + \lambda g(\xi) \quad (-1<\xi<1) \\ \chi'(\xi) = \tau(\xi); \ \chi(\pm 1) = 0; \end{gathered} \tag{4.9}$$

а (4.1) и (4.8) примут, соответственно, вид

$$S_0(\xi) = \chi(\xi) + g(\xi) \quad (-1 \le \xi \le 1); \ S_0(\xi) = \frac{S(a\xi)}{\vartheta}; \tag{4.10}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\chi(\eta)\,d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{g(\eta)\,d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = 0. \tag{4.11}$$

Построим ограниченное на концах интервала (-1,1) решение ИДУ (4.9), полагая

$$\tau(\xi) = \chi'(\xi) = \sqrt{1-\xi^2}\sum_{n=1}^{\infty} x_n U_{2n-1}(\xi) \quad (-1 \le \xi \le 1), \tag{4.12}$$

где x_n –пока неизвестные коэффициенты. Отсюда

$$\chi(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\int_{-1}^{\xi}U_{2n-1}(\eta)\sqrt{1-\eta^2}\,d\eta=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{1-\xi^2}\ \sum_{n=1}^{\infty}x_n\left[\frac{U_{2n+2}(\xi)}{2n+1}-\frac{U_{2n}(\xi)}{2n-1}\right]\ (-1\le\xi\le 1). \tag{4.13}$$

Теперь (4.12) и (4.13) подставим в (4.9), поменяем порядок интегрирования и суммирования и воспользуемся известным соотношением

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\eta^2}\,U_{n-1}(\eta)\,d\eta}{\eta-\xi}=-T_n(\xi)\qquad (n=1,2,...,\ \ -1<\xi<1).$$

В результате получим

$$-\sum_{n=1}^{\infty}x_nT_{2n}(\xi)=\frac{\lambda}{2}\sqrt{1-\xi^2}\sum_{n=1}^{\infty}x_n\left[\frac{U_{2n+2}(\xi)}{2n+1}-\frac{U_{2n}(\xi)}{2n-1}\right]+\lambda g(\xi)\ \ (-1<\xi<1).$$

Далее обе части этого равенства умножим на $T_{2m}(\xi)\sqrt{1-\xi^2}\ (m=1,2,...)$ и проинтегрируем по ξ от -1 до 1. Приняв во внимание условия ортогональности многочленов $T_{2m}(\xi)$, после вычисления некоторых элементарных интегралов относительно коэффициентов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ придем к следующей бесконечной СЛАУ:

$$x_m+\frac{2\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}K_{mn}x_n=-\frac{2\lambda}{\pi}g_m\qquad (m=1,2,...)$$
$$K_{mn}=\frac{2n+3}{(2n+1)\left[(2n+1)^2-4m^2\right]}-\frac{2n+1}{(2n-1)\left[(2n-1)^2-4m^2\right]}; \tag{4.14}$$
$$g_m=\int_{-1}^{1}\frac{g(\xi)T_{2m}(\xi)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Доказательство регулярности бесконечной системы (4.14) проводится совершенно аналогично тому, что изложено в [18].

После решения бесконечной системы (4.14) безразмерные осевые усилия согласно (4.10) и (4.13) можно вычислить по формуле

$$S_0(\xi)=\frac{1}{2}\sqrt{1-\xi^2}\ \sum_{n=1}^{\infty}x_n\left[\frac{U_{2n+2}(\xi)}{2n+1}-\frac{U_{2n}(\xi)}{2n-1}\right]+g(\xi)\quad (-1\le\xi\le 1).$$

Подставляя (4.13) в условие (4.11), после элементарных вычислений его представим в виде

$$8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx_n}{\left(4n^2-1\right)^2}=\int_{-1}^{1}\frac{g(\eta)\,d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}. \tag{4.15}$$

Рассмотрим два частных случая симметрического нагружения стрингера.

1. Пусть $\tau_+\left(x\right)=A\,\mathrm{sign}\,x\left(-a\le x\le a\right);\ A=const.$ Тогда

$$f\left(x\right)=P-A\int\limits_{-a}^{x}\mathrm{sign}\,s\,ds=P-A\left(\left|x\right|-a\right)\ \left(-a\le x\le a\right).$$

Следовательно,

$$g\left(\xi\right)=\frac{f\left(a\xi\right)}{a\vartheta}=P_0-A_0\left(\left|\xi\right|-1\right);\ A_0=\frac{A}{\vartheta}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{g\left(\eta\right)d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{P_0-A_0\left(\left|\eta\right|-1\right)}{\sqrt{1-\eta^2}}d\eta=\pi\left(A_0+P_0\right)-2A_0. \tag{4.16}$$

В данном частном случае из (4.14) вычислим также коэффициенты g_m. После элементарных выкладок находим

$$g_m=\left(-1\right)^m\frac{2A_0}{4m^2-1}\quad\left(m=1,2,...\right).$$

Теперь решение бесконечной системы (4.14) при правой части $\left(-1\right)^{m+1}\lambda\big/\left(4m^2-1\right)\ \left(m=1,2,...\right)$ обозначим через y_m. Тогда

$$x_m=\frac{4A_0}{\pi}y_m\ \left(m=1,2,...\right). \tag{4.17}$$

Наконец, подставляя (4.16) и (4.17) в условие (4.15), определим отношение величин P_0 и A_0;

$$\frac{P_0}{A_0}=\frac{2}{\pi^2}\left[\pi+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{my_m}{4m^2-1}\right]-1,$$

при котором безразмерные касательные напряжения под стрингером в точках $\xi=\pm1$ ограничены или исходные контактные касательные напряжения в точках $x=\pm a$ ограничены.

2. Пусть теперь

$$\tau_+\left(x\right)=Ax^{2n-1}\ \left(n=1,2,...\quad -a\le x\le a\right).$$

В этом случае

$$g\left(\xi\right)=P_0-A_n\left(\xi^{2n}-1\right)\left(-1\le\xi\le1\right);\ A_n=\frac{a^{2n+1}A}{2\pi\vartheta}.$$

и, следовательно

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{g\left(\eta\right)d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}=\pi\left(A_0+A_n\right)-A_n\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+1/2\right)}{n!}. \tag{4.18}$$

Коэффициенты g_m из (4.14) легко вычисляются при помощи известной формулы из [13] (стр.39, ф-ла 1.320.5). В результате

$$g_m = -\frac{A_n}{2^{2n}} \begin{cases} \pi C_{2n}^{n-m} & (1 \le m \le n); \\ 0 & (m > n). \end{cases}$$

Теперь решение бесконечной системы (4.14) при правой части

$$\delta_m^{(n)} = \begin{cases} \lambda C_{2n}^{n-m} & (1 \le m \le n); \\ 0 & (m > n). \end{cases}$$

обозначим через $y_m^{(n)}$. Тогда

$$x_m = \frac{A_n}{2^{2n-1}} y_m^{(n)} \quad (m, n = 1, 2, ...). \tag{4.19}$$

Подставляя (4.18) и (4.19) в условие (4.15), придем в данном случае и следующему условию ограниченности касательных контактных напряжений в концевых точках интервала (-1,1):

$$\frac{P_0}{A_n} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)}{n!} + \frac{1}{2^{2n-4}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m y_m^{(n)}}{(4m^2-1)^1}\right] - 1 \quad (n = 1, 2, ...).$$

Заключение. Изложенные в статье результаты, основанные на применении энергетического принципа Кастильяно, в некоторой степени пополняют и расширяют возможности получения ограниченных напряжений на границах рассматриваемых областей в контактных и смешанных задачах теории упругости. Этот принцип в применении к вопросам исследования концентрации напряжений в окрестности вершины составного клиновидного упругого тела, может позволить определить необходимые зависимости между характерными упругими и геометрическими параметрами, обеспечивающие справедливость закона Гука в этой области, т.е. непрерывность или ограниченность напряжений и деформаций.

Отметим, что в статье установлено тождественное совпадение результатов, полученных принципом непрерывности напряжений на гладких, контактных поверхностях и энергетическим принципом Кастильяно, что указывает на их эквивалентность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляв А.Е. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М: Наука, 1966. 708 с.
3. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М. –Л: 1949, 270 с.
4. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304с.
5. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970, 940с.
6. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия, М.: Мир, 1989, 512с.
8. Развитие теории контактных задач в СССР. Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976, 493с.

9. Механика контактных взаимодействий/ под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001. 670 с.

10. K. L. Johnson, K. Kendall, A. D. Roberts, Surface energy and the contact of elastic solids. Proc Roy. Soc. A 324 1971, 301-313. 2

11. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. Phil. Trans. of Roy. Soc. London, Ser. A., vol.221, 1920, p.163–198.

12. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977, 640с.

13. Градштейн И.С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

14. Ахиезер Н.И. и Щербина В.А. Об обращении некоторых сингулярных интегралов.// Записки матем. отд. физ.-мат. ф.-та Харьковского ун.-та и Харьковского матем. общества, 1957, т. 25, сер. 4, 191-198.

15. Мхитарян С.М. О формулах Н.И.Ахиезера и В.А.Щербины обращения некоторых сингулярных интегралов.// Матем. Исследования, Кишинев, 1968, т. 3, вып. 1(7), 61-70.

16. Melan E., Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen, Ing.– Arch., 3, 1932, N2, p. 123–129.

17. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ,т.32, вып.4, 1968, с.632–646.

18. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983, 488 с.

Сведения об авторе

Мхитарян Сурен Манукович – чл.- корр. НАН РА, проф., зав.отделом, Институт механики НАН РА,

E-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

Поступила в редакцию 9 ноября 2022