ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №4, 2022 Механика
УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2022.75.4-52

СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С ОДНИМ СВОБОДНЫМ КРАЕМ, РАСТЯНУТОЙ ПО ПОТОКУ ГАЗА, ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИНЕРЦИОННЫХ МАСС И МОМЕНТОВ

Мартиросян С. Р.

Ключевые слова: прямоугольная пластинка умеренных размеров, растягивающие силы, сверхзвуковое обтекание, аэроупругая устойчивость, сосредоточенные инерционные массы и моменты, панельный флаттер, дивергенция панели, локализованная дивергенция, аналитический метод решения

S.R. Martirosyan

Supersonic flutter of a rectangular plate with one free edge, stretched along the gas flow, in the presence of pointed inertial masses and moments

Keywords: moderately sized rectangular plate, tensile forces, supersonic flow, aeroelastic stability, pointed inertial masses and moments, panel flutter, panel divergence, localized divergence, analytical solution method

In a linear formulation, the problem of aeroelastic stability of the "plate-flow" dynamic system is studied under the assumption that pointed masses and moments are applied on the free edge of a rectangular plate, initially stretched along a supersonic gas flow. An analytical solution of the stability problem is found. It has been established that the initial stress state due to tensile forces in a supersonic flow leads to a significant stabilization of the unperturbed motion of the system.

Ս.Ռ.Մարտիրոսյան

Գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ նախնական ձգված ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին, որում սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ

Հիմնաբառեր՝ միջին չափերի ուղղանկյուն սալ, ձգող ուժեր, աերոառաձգական կայունություն, գերձայնային շրջհոսում, պանելային և տեղայնացված դիվերգենցիա, պանելային ֆլատեր, իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, անալիտիկ լուծման եղանակ

Գծային դրվածքով ուսումնասիրված է մեկ ազատ եզրով առաձգական ուղղանկյուն սալի նախնական լարվածային վիճակի՝ պայմանավորված գերձայնային գազի հոսքով ուղղված ձգող ուժերով, ազդեցությունը «սալ–հոսք» դինամիկ համակարգի չխոտորված շարժման կայունության վրա: Ստացված է դինամիկական համակարգի կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը երբ սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ:

Ցույց է տրված ընդլայնական ձգող ուժերի զգալի կայունացնող ազդեցությունը «սալ–հոսք» դինամիկական համակարգի վրա:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначального напряжённого состояния прямоугольной упругой пластинки умеренных размеров с одним свободным краем, растянутой по потоку газа, на устойчивость невозмущённого движения динамической системы «пластинка-поток» в предположении, что на её свободном крае имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты. Получено аналитическое решение задачи устойчивости динамической системы.

Показано существенное стабилизирующее действие первоначальных продольных сил растяжения на динамическую систему «пластинка–поток».

Введение. Как известно [1, 2], рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение. Вопрос об упругой устойчивости панелей обшивки летательных аппаратов, представляющих собой плоские пластинки или пологие оболочки, неизбежно возникает на этапе проектирования и конструирования любого летательного аппарата для обеспечения безопасности полета. Теоретические исследования этих задач позволяют выявить различные виды потери устойчивости, обусловленные характером деформаций, а также, дать оценку влияния комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им.

Исследованию задач аэроупругой устойчивости пластин и оболочек посвящено огромное количество работ, обзор которых, в основном, содержится в монографиях и статьях [1– 6]. Однако в этих работах, в основном, построены приближённые решения и не дана эффективная оценка точности этих приближений.

В предлагаемой статье, в отличие от вышеуказанных работ, с помощью алгоритма, подробно изложенного в работе [16], получено аналитическое решение задачи устойчивости невозмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» вблизи границ области устойчивости при следующих предположениях. Рассматриваемая прямоугольная пластинка умеренных размеров с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями, первоначально растянутая силами, равномерно распределёнными по её длине, обтекается сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край, вдоль которого приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота.

Установлено, что при малых значениях параметра отношения ширины пластинки (сторона пластинки по потоку) к её длине невозмущённое движение системы «пластинка–поток» теряет как статическую, так и динамическую устойчивость, соответственно, в виде дивергенции панели (эйлеровой и неэйлеровой) и в виде панельного флаттера. А при больших значениях параметра отношения сторон прямоугольной пластинки – теряет только статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели или в виде локализованной дивергенции.

Показано, что критические скорости дивергенции, локализованной дивергенции и флаттера являются возрастающими функциями от коэффициента напряжения растягивающих сил. Соответственно, предварительное напряжённое состояние пластинки умеренных размеров, обусловленное продольными растягивающими силами, приводит к существенному повышению устойчивости системы «пластинка-поток», в сравнении с системой с ненагруженной панелью [16].

Определены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости в смысле Н.Н. Баутина [14]. При переходе через «опасные» границы происходит потеря прочности и возникновение усталостных трещин в материале пластинки [1, 2].

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка умеренных размеров, которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$: $ab^{-1} \in (0.193, 1.96)$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край $x=0$ пластинки свободен, а края $x=a$, $y=0$ и $y=b$ закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x=0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 10–13].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию растягивающих сил $N_x = 2h\sigma_x$, равномерно распределённых по краям $x=0$ и $x=a$ пластинки, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; растягивающие усилия σ_x предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели, и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y, t)$ [1, 2].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$ «поршневой теории», где a_0 –скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [7, 8]. При этом предполагается, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp, растягивающими усилиями σ_x в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c, приложенными вдоль её свободного края $x=0$, в предположении, что усилия σ_x малы по сравнению с предельным значением $(\sigma_x)_{pr.}$, которое не превосходит нижнюю границу текучести; $(\sigma_x)_{pr.}$ – усилие, начиная с которого имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [1, 11, 13].

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности растянутой прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [7, 8] будет описываться соотношением [1, 2, 6]:

$$D\Delta^2 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \; w = w\left(x, y, t\right); \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [2, 9, 10]:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \tag{1.2}$$

$$D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - N_x \frac{\partial w}{\partial x} = -m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{при } x = 0;$$

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } \ x = a; \tag{1.3}$$

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b; \tag{1.4}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}), \ M_0 = \sqrt{2}, \ M_{2\cos m.} \approx 33.85; \tag{1.5}$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) в предположении, что

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{pr.} \tag{1.6}$$

Здесь, M_0 и $M_{2\cos m.}$ – граничные значения числа Маха M, соответствующие интервалу допустимых значений сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]. Анализ устойчивости невозмущённого движения динамической системы “пластинка – поток” (1.1) – (1.4) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) – (1.4) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале скоростей потока газа (1.5) при условии (1.6).

Заметим, что в статье, с целью получения возможности аналитического исследования рассматриваемой задачи устойчивости, в дифференциальном уравнении (1.1) интенсивность распределённой массы пластинки $m\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ условно заменена интенсивностями $m_c \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ и $I_c \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}$, учитываемых в граничных условиях (1.2), соответственно, приложенных вдоль свободного края пластинки $x = 0$ сосредоточенных масс m_c и моментов поворота I_c [1, 2, 9–13]. Такая замена, вовсе, не приводит к искажению динамической картины явления – потери устойчивости системы; быть может, с точностью до численных значений критических скоростей потока газа, которые могут быть несколько завышенными [9, 10, 13, 16].

Задачу устойчивости (1.1) – (1.4) будем исследовать для прямоугольных пластин умеренных размеров:

$$\gamma = ab^{-1} \in \left(0.193; 1.96\right), \tag{1.7}$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b.

В работе [16] получено аналитическое решение задачи устойчивости невозмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» в отсутствии предварительного напряжённого состояния пластинки.

В работе [17], следуя методу Эйлера, получено решение задачи устойчивости (1.1) – (1.4) в статической постановке при $\gamma \in [0, \infty]$.

2. **Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.4).** Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости динамической системы (1.1) – (1.4) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y), \ \mu_n = \pi n b^{-1}, \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое движение системы (1.1) – (1.4) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\operatorname{Re}\lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\operatorname{Re}\lambda > 0$) [15]. Критическая скорость V_{cr} потока газа, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости невозмущённого движения системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\operatorname{Re}\lambda = 0$) [1, 2, 15].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток», описываемое алгебраическим уравнением четвёртой степени

$$r^4 - 2\cdot(1+\beta_x^2)\cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + 1 = 0, \tag{2.2}$$

где α_n^3 – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3} \tag{2.3}$$

β_x^2 – коэффициент напряжения, характеризующий консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2 \cdot N_x D^{-1} \mu_n^{-2} = h \sigma_x D^{-1} \mu_n^{-2}, \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr.}; \tag{2.4}$$

$(\beta_x^2)_{pr}$ – значение коэффициента напряжения β_x^2, соответствующее $(\sigma_x)_{pr.}$.

Ясно, что

$$\alpha_n^3 \in (a_0^2 \rho_0 M_0 D^{-1} \mu_n^{-3},\ a_0^2 \rho_0 M_{2\cos m.} D^{-1} \mu_n^{-3}), \tag{2.5}$$

в силу условия (1.5) и обозначения (2.3).

Характеристическое уравнение (2.2) подробно исследовано в работе [17].
В соответствии с известным решением Феррари, уравнение (2.2), как алгебраическое уравнение четвёртой степени, можно представить в виде произведения двух квадратных трёхчленов:

$$\left(r^2+\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot r+q-\sqrt{q^2-1}\right)\left(r^2-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot r+q+\sqrt{q^2-1}\right)=0, \quad (2.6)$$

где q – единственный действительный корень кубического уравнения

$$8\cdot(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)-\alpha_n^6=0, \qquad q\in R. \quad (2.7)$$

Согласно обозначению (2.3), отсюда следует, что параметр q характеризует скорость V потока газа при фиксированных значениях остальных параметров системы: $q=q(V)\in\left(q_0,\, q\left(a_0M_{2\cos m}\right)\right)$, в силу условия (1.5).

В работе [17] с помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), записанного в эквивалентной форме (2.6), найден «допустимый» интервал значений параметра $q=q\left(V\right)$:

$$q\in\left(q_0,\, q\left(a_0M_{2\cos m.}\right)\right),\ q_0=\left(-(\beta_x^2+1)+2\sqrt{(\beta_x^2+1)^2+3}\right)\Big/3 \text{ (табл. 1)} \quad (2.8)$$

для всех $\beta_x^2<(\beta_x^2)_{pr}$.

Таблица 1.

β_x^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	2.0	5.0	10.0
q_0	1	1.010	1.027	1.065	1.097	1.309	2.163	3.757

Из данных таблицы 1 следует, что функция $q_0=q_0\left(\beta_x^2\right)$ является монотонно возрастающей в интервале $\left[0,\,\left(\beta_x^2\right)_{pr.}\right)$.

При значениях (2.8) характеристическое уравнение (2.2) имеет два отрицательных $r_1<0$, $r_2<0$ и пару комплексно-сопряжённых $r_{3,4}\in W$ корней, являющихся решением квадратных уравнений – приравненных нулю сомножителей уравнения (2.6) [17]:

$$r_{1,2}=-0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pm\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1-\beta_x^2)},\ r_1<0,\ r_2<0; \quad (2.9)$$

$$r_{3,4}=0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1-\beta_x^2)},\ q\in\left(q_0,\, q\left(a_0M_{2\cos m.}\right)\right) \quad (2.10)$$

Тогда, в соответствии с выражениями (2.9) и (2.10), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда:

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4}C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y). \quad (2.11)$$

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.7), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток» [17]:

$$V(q)=2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}\pi^3n^3\gamma^3D(a_0\rho_0a^3)^{-1}, \quad \gamma\in\left(0.193;196\right). \quad (2.12)$$

Эта формула позволяет по известному значению параметра $q=q\left(n,\gamma,\beta_x^2,\nu\right)$ определить приведённую скорость потока газа $V\left(q\right)\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$.

В силу условия (1.5), из выражения (2.12) следует, что

$$V\left(q\right)\in\left(V\left(q_0\right),\,a_0\,M_{2cos\,m.}\right)\subseteq\left(a_0M_0,\,a_0\,M_{2cos\,m.}\right),\;V\left(q_0\right)\geq a_0M_0\,; \tag{2.13}$$

$$V\left(q\right)\in\left(a_0M_0,\,a_0\,M_{2cos\,m.}\right),\;V\left(q_0\right)<a_0M_0\,. \tag{2.14}$$

Согласно формуле цилиндрической жёсткости $D=\dfrac{E\cdot(2h)^3}{12\cdot(1-\nu^2)}$ соотношения (2.13) и (2.14) для приведённой скорости $V\left(q\right)\cdot D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ запишутся, соответственно, в виде [17]:

$$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)\in(V(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3),a_0M_{2\cos m}\Psi)\subseteq(a_0M_0,a_0M_{2\cos m.})\Psi\,; \tag{2.15}$$

$$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)\in(a_0M_0,\,a_0M_{2\cos m})\Psi\,, \tag{2.16}$$

где

$$\Psi=12(1-\nu^2)a_0\rho_0E^{-1}(2ha^{-1})^{-3},\;M_0=\sqrt{2}\,,\;M_{2\cos m.}\approx 33.85\,. \tag{2.17}$$

Подставляя значения относительной толщины $2ha^{-1}\in\left[0.006,\,0.015\right]$ пластинки в выражения (2.15)–(2.17), получаем $d\left(2ha^{-1},\nu\right)=(a_0M_0,\,a_0M_{2\cos m})\Psi$ – соответствующие интервалы допустимых значений приведённой скорости $VD^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ потока, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5), приведённые в таблице 2 для стальных пластинок.

Из данных таблицы 2 следует, что интервалы $d\left(2ha^{-1},\nu\right)$ с ростом относительной толщины $2ha^{-1}$ пластинки уменьшаются, примерно, в 15.6 раз при всех фиксированных значениях ν, а с ростом коэффициента Пуассона ν – уменьшаются в 1.32 раза при фиксированных значениях параметра $2ha^{-1}$.

Таблица 2.

ν / $2ha^{-1}$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.81,1311.78)	(52.03,1245.27)	(50.52,1208.98)	(47.70,1141.58)	(41.63,996.35)
0.010	(11.84,283.45)	(11.24,269.09)	(10.91,261.25)	(10.30,246.70)	(8.99,215.32)
0.012	(6.85,164.01)	(6.50,155.72)	(6.32,151.20)	(5.96,142.69)	(5.20,124.60)
0.015	(3.51,84.04)	(3.33,79.73)	(3.23,77.33)	(3.05,73.10)	(2.67,63.81)

3. Достаточные признаки потери устойчивости невозмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4). Подставляя общее решение (2.11) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.9) и (2.10), в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель - после несложных преобразований описывается в виде биквадратного уравнения относительно собственного значения λ:

$$\chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + \left(\chi_n A_1 + \delta_n A_2\right)\lambda^2 + A_3 = 0 \ , \tag{3.1}$$

где

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}\,, \ \ \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1}\,, \ \delta_n > 0\,, \ \chi_n > 0\,, \tag{3.2}$$

приведённые значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки;

$$A_0 = A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2) = \sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\left(1 - e^{-2\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\cdot\pi n\gamma}\right)B_1 B_2 -$$

$$-2B_2\left(q+1+\beta_x^2+\sqrt{q^2-1}\right)e^{-\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\cdot\pi n\gamma}\,\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2) -$$

$$-2B_1\left(q+1+\beta_x^2-\sqrt{q^2-1}\right)e^{-\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\cdot\pi n\gamma}\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\,; \tag{3.3}$$

$$A_1 = A_1(q,n,\gamma,\beta_x^2) =$$

$$= 2\left(q+1+\beta_x^2\right)\left[\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)+\left(q+\sqrt{q^2-1}\right)e^{-2\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\cdot\pi n\gamma}\right]B_1 B_2 +$$

$$+2B_2\left[\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)\left(q^2-1\right)}\cdot\left(q+1+\beta_x^2+\sqrt{q^2-1}\right)\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1) +\right.$$

$$\left.+\,2B_1\left(\left(2q-1\right)\left(q+1\right)+q\beta_x^2\right)\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\right]\cos(\pi n\gamma B_2)e^{-\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\cdot\pi n\gamma} +$$

$$+2\left[B_1\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)\left(q^2-1\right)}\left(q+1+\beta_x^2-\sqrt{q^2-1}\right)\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1) +\right.$$

$$\left.+\left(q+1+\beta_x^2\right)\left(q-1+q\beta_x^2\right)\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\right]\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot e^{-\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\cdot\pi n\gamma}\,; \qquad \text{h(3.4)}$$

$$A_2 = A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2) = 2\left(q+1+\beta_x^2\right)\left(1 + e^{-2\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\cdot\pi n\gamma}\right)B_1 B_2 -$$

$$-4\left(q+1+\beta_x^2\right)B_1 B_2\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)e^{-\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\cdot\pi n\gamma} +$$

$$+2\left(3(q^2-1)-2\beta_x^2-\beta_x^4\right)\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)e^{-\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\cdot\pi n\gamma}; \tag{3.5}$$

$$A_3=A_3(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2)=\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2+\right.$$

$$\left.+2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)\right\}B_1B_2-\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-\right.$$

$$\left.-\left(1-\nu\right)^2+2\beta_x^2\left(q+\sqrt{q^2-1}\right)\right\}B_1B_2e^{-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}+$$

$$+2B_2e^{-\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\pi n\gamma}\left\{\left[\left(4q^2+2q-1\right)\sqrt{q^2-1}+\left(2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1}+2q\beta_x^2\right)\beta_x^2-\right.\right.$$

$$-\left(2q^2-4q+1\right)\left(q+1\right)-2\left(\left(2q-1\right)\left(q+1\right)-q\sqrt{q^2-1}+q\beta_x^2\right)\nu+$$

$$\left.+\left(q+1+\beta_x^2+\sqrt{q^2-1}\right)\nu^2\right]\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+$$

$$\left.+2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}(q+1+\beta_x^2)B_1\,\mathrm{ch}\left(\pi n\gamma B_1\right)\right\}\cos(\pi n\gamma B_2)+$$

$$+2e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}\left\{-B_1\left[\left(4q^2+2q-1\right)\sqrt{q^2-1}+\left(2q^2-4q+1\right)\left(q+1\right)-\right.\right.$$

$$-\left(2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1}+2q\beta_x^2\right)\beta_x^2+2\left(\left(2q-1\right)\left(q+1\right)+q\sqrt{q^2-1}+q\beta_x^2\right)\nu-$$

$$\left.-\left(q+1+\beta_x^2-\sqrt{q^2-1}\right)\nu^2\right]\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)-$$

$$\left.-\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)\left(q^2-1\right)}\left(3\left(q^2-1\right)-2\beta_x^2-\beta_x^4\right)\mathrm{sh}\left(\pi n\gamma B_1\right)\right\}\sin\left(\pi n\gamma B_2\right); \tag{3.6}$$

$$B_1=\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1-\beta_x^2)},\qquad B_2=\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1-\beta_x^2)}. \tag{3.7}$$

При всех допустимых значениях параметра скорости $q=q(V)$ (2.8) и коэффициента напряжения $\beta_x^2<(\beta_x^2)_{pr.}$ очевидно, что $B_1=B_1(q,\beta_x^2)>0$ и $B_2=B_2(q,\beta_x^2)>0$, откуда следует справедливость неравенств:

$$A_0=A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2)>0\,,\; A_2=A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2)>0\,,\; n\ge 1,\gamma\in\left(0.193,\,1.96\right). \tag{3.8}$$

Вводя обозначение

$$k_n=\chi_n\cdot\delta_n^{-1}=I_c\left(\pi n\gamma\right)^2\cdot\left(m_ca^2\right)^{-1}, \tag{3.9}$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.8), перепишется в виде

$$\lambda^4+(k_nA_1+A_2)\chi_n^{-1}A_0^{-1}\lambda^2+\chi_n^{-1}\delta_n^{-1}A_0^{-1}A_3=0\,,\;\delta_n>0\,,\;\chi_n>0\,,\;k_n>0\,. \tag{3.10}$$

Заметим, что непосредственной подстановкой значения $\beta_x^2 = 0$ в уравнение (3.10) можно убедиться в его тождественности соответствующему дисперсионному уравнению, полученному в работе [16].

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.4) сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.10), определяющих собственные движения системы в пространстве «существенных» параметров $\Im = \{q(V), n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическое поведение системы. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

4. **Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости.** Введём в рассмотрение в пространстве параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\Im_0$ и области неустойчивости $\Im_1, \Im_2, \Im_3$. В области $\Im_0$ все корни λ_k уравнения (3.10) находятся в левой части комплексной плоскости $(\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0)$; в областях $\Im_1, \Im_2$ и $\Im_3$, соответственно, либо среди корней λ_k имеется один положительный корень, либо имеются два положительных корня, либо имеется пара комплексно сопряжённых корней с положительной вещественной частью [15].

Область устойчивости $\Im_0 \in \Im$ будет определяться соотношениями:

$$k_n A_1 + A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad \Delta > 0; \tag{4.1}$$

а области неустойчивости $\Im_l,\ l = \overline{1,3}$ – соответственно, соотношениями:

$$\begin{aligned}
&\Im_1: k_n A_1 + A_2 > 0, A_3 < 0, \Delta > 0 \quad \text{и} \quad k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 < 0, \Delta > 0;\\
&\Im_2: k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 > 0, \Delta > 0;\\
&\Im_3: k_n A_1 + A_2 > 0, A_3 > 0, \Delta < 0 \quad \text{и} \quad k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 > 0, \Delta < 0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь Δ – дискриминант характеристического определителя (3.10):

$$\Delta = \Delta(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4 k_n A_0 A_3. \tag{4.3}$$

В области устойчивости $\Im_0$ уравнение (3.10) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$: прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния.

В области $\Im_1$ характеристический определитель (3.10) имеет два действительных корня $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ и два чисто мнимых $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$ (из двух собственных движений пластинки, соответствующих собственным значениям λ_1 и λ_2, одно затухает, а другое неограниченно отклоняется по экспоненциальному закону). В силу этого, прогибы пластинки будут возрастать во времени по экспоненциальному закону: в области $\Im_1$ имеет место эйлерова дивергенция панели [1, 2, 13].

В области $\Im_2$ уравнение (3.10) имеет четыре действительных корня λ_i – два отрицательных ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) и два положительных ($\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$): из четырёх собственных движений пластинки два затухают, а остальные два неограниченно отклоняются по экспоненциальному закону. Тем самым, невозмущённое движение системы в области $\Im_2$ так же, как и в области $\Im_1$, является статически неустойчивым: имеет место дивергенция панели. Однако, в отличие от области $\Im_1$, в области $\Im_2$ явление дивергенции более ярко выражено: имеет место не эйлерова дивергенция панели [13].

В области $\Im_3$ характеристическое уравнение (3.10) имеет, по крайней мере, два комплексно-сопряжённых корня с положительной вещественной частью. Невозмущённое движение системы теряет динамическую устойчивость: имеет место панельный флаттер – колебания пластинки по нарастающей амплитуде.

Границами области устойчивости $\Im_0$ системы «пластинка-поток» в пространстве её параметров $\Im$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ являются гиперповерхности [12 – 15]:

$$A_3 = 0; \tag{4.4}$$

$$\Delta = 0. \tag{4.5}$$

Характеристическое уравнение (3.10) на гиперповерхности (4.4) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2, а на гиперповерхности (4.5) – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

На границе (4.4) области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ невозмущённое движение системы «пластинка-поток» теряет статическую устойчивость или в виде эйлеровой дивергенции панели, или в виде локализованной дивергенции, соответственно, при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ и $V \geq V_{locdiv.}$, в зависимости от значений параметров γ, ν и β_x^2.

Заметим, что уравнение (4.4) тождественно дисперсионному уравнению, полученному в работе [17] при исследовании задачи устойчивости обтекаемой растянутой панели в статической постановке с помощью метода Эйлера.

Критические скорости дивергенции панели $\left\{V_{cr.div.}^{(1)}, V_{cr.div.}^{(2)}\right\}$, определяемые подстановкой, соответственно, первого $q_{cr.div}^{(1)}$ и третьего $q_{cr.div}^{(3)}$ корней уравнения (4.4) в формулу (2.12), разграничивают область устойчивости $\Im_0$ и область эйлеровой дивергенции $\Im_1$. При скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера невозмущённого движения системы от устойчивости к статической неустойчивости в виде дивергенции панели. Это приводит к соответствующему изменению динамического поведения растянутой прямоугольной пластинки в потоке газа: в пластинке возникают дополнительные напряжения, приводящие к изменению её плоской формы равновесия: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания». Так как монотонное «выпучивание» пластинки не имеет колебательного характера, то может рассматриваться как квазистатический процесс – дивергенция панели.

Как оказалось, в соответствии с численными результатами, для всех $\gamma \in [1.3, 1.96)$ при условии $\beta_x^2 \geq (\beta_x^2)_{gr.} = (\beta_x^2)_{gr.}(\gamma, \nu)$ система теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции – дивергенции, локализованной в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки, подобно полубесконечной пластине–полосе $(\gamma = \infty)$ [17]. При этом уравнение (4.4) имеет единственное решение $q = q_{locdiv}$, подставлением которого в формулу (2.12), получаем критическую скорость локализованной дивергенции $V_{locdiv.}$. При скоростях потока газа $V \geq V_{locdiv.}$ «выпучивается» окрестность свободного края $x = 0$ пластинки. Функция $(\beta_x^2)_{gr.} = (\beta_x^2)_{gr.}(\gamma, \nu)$ является монотонно убывающей от $\gamma \in [1.3, 1.96)$ и слабо убывающей от коэффициента Пуассона ν. Значения $(\beta_x^2)_{gr.}(\gamma, \nu)$ разграничивают область $\Im_1$ на две подобласти: $\Im_1 = \Im_{div.} \cup \Im_{locdiv}$ [17].

Критические скорости не эйлеровой дивергенции $\{V_{1,2}\}$ разграничивают области $\Im_1$ и $\Im_2$: при скоростях потока газа $V \geq V_{1,2}$ происходит “мягкий” переход из области эйлеровой дивергенции $\Im_1$ в область не эйлеровой дивергенции $\Im_2$.

На границе (4.5) области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, а так же, на границе (4.5) области дивергентной неустойчивости $\Im_2$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, невозмущённое движение системы при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl}$ теряет динамическую устойчивость в виде панельного флаттера.

Критические скорости панельного флаттера $\{V_{cr.fl.}^{(1)}\}$, соответствующие первому корню $q_{cr.fl.}^{(1)} \in (q_0, \infty)$ уравнения (4.5) и подсчитанные по формуле (2.12), в зависимости от значений параметров системы $n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n$ разграничивают, или области устойчивости $\Im_0$ и флаттерной неустойчивости $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, или области дивергентной неустойчивости $\Im_2$ и флаттерной неустойчивости $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$. В обоих случаях, при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к флаттерным колебаниям – к колебаниям по нарастающей амплитуде.

Однако, в первом случае плоская по форме пластинка начинает совершать флаттерные колебания относительно равновесного состояния, а во втором случае –

«выпученная» (изогнутая) пластинка. Соответственно, переходы $\Im_0 \to \Im_3$ и $\Im_2 \to \Im_3$ определяют «опасные границы» областей $\Im_0$ и $\Im_2$ [1, 2, 13, 14].

Критические скорости дивергенции $V_{cr.div.}$, $V_{1,2}$, локализованной дивергенции $V_{locdiv.}$ и панельного флаттера $V_{cr.fl.}$, определяются по формуле (2.12) с достаточной точностью.

5. **Численные результаты.** В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n,\gamma,\nu,\beta_y^2,k_n)\} \in \Im$, параметризованных надлежащим образом в пространстве $\Im$. Размер статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. Поэтому, ограничимся иллюстрацией типичных случаев, выделяя наиболее представительные из этого семейства кривых (таблицы 3 – 15). При этом, численные расчеты, проведённые для различных значений числа полуволн n, показали, что при фиксированных значениях остальных параметров системы критические скорости дивергенции и флаттера являются возрастающими функциями от n: их наименьшему значению соответствует $n = 1$.

Следует отметить, что несмотря на существенную зависимость качественных характеристик поведения возмущённого движения системы от параметра $\gamma \in (0.193;1.96)$, тем не менее, можно выделить три интервала значений γ: $(0.193, 0.33)$, $[0.33, 0.74)$ и $[0.74, 1.96)$, в которых поведение невозмущённого движения системы можно принять, примерно, одинаковым. Для наглядной иллюстрации динамики состояния системы в указанных интервалах, составлены соответствующие цепочки переходов состояний системы из области $\Im_l \subset \Im$ в область $\Im_k \subset \Im$, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5).

5.1. Для стальных пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$ в интервале $\gamma \in (0.193, 0.33)$ невозмущённое движение системы «пластинка–поток» при малых значениях коэффициента напряжения $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{\min}$ неустойчиво вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.5): имеет место эйлерова дивергенция панели (область $\Im_1$). Начиная со значения $\beta_x^2 = (\beta_x^2)_{\min}$ – становится устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ (табл. 3).

Таблица 3.

$2ha^{-1}$	0.006	0.01	0.012	0.015
$(\beta_x^2)_{\min}, \gamma = 0.2$	22.06	5.34	2.96	1.21
$(\beta_x^2)_{\min}, \gamma = 0.3$	9.78	1.89	0.82	0.04

Значения функции $\left(\beta_x^2\right)_{\min}\left(\gamma, 2ha^{-1}\right)$ найдены из сопоставления критической скорости эйлеровой дивергенции $V_{cr.div.}^{(1)}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ с данными таблицы 2.

Из данных таблицы 3 следует, что функция $\left(\beta_x^2\right)_{\min}=\left(\beta_x^2\right)_{\min}\left(\gamma, 2ha^{-1}\right)$ является убывающей функцией от параметра $\gamma\in\left(0.193, 0.33\right)$ при фиксированных значениях параметра $2ha^{-1}$: с ростом γ, примерно в 1.7 раз, значение функции $\left(\beta_x^2\right)_{\min}$ уменьшается более, чем на порядок. Влияние коэффициента Пуассона ν на пороговое значение коэффициента напряжения $\left(\beta_x^2\right)_{\min}$ исчезающе мало.

Соответственно, цепочки переходов состояний системы будут вида:

$$\left(\Im_0\right)\xrightarrow{V_{cr.div.}^{(1)}}\Im_1\xrightarrow{V_0}\Im_0\xrightarrow{V_{cr.fl.}^{(1)}}\Im_3\xrightarrow{V_0^*}\Im_0\xrightarrow{V_{cr.div.}^{(2)}}\Im_1,\ k_1<0.4; \qquad (5.1)$$

$$\left(\Im_0\right)\xrightarrow{V_{cr.div.}^{(1)}}\Im_1\xrightarrow{V_{1,2}}\Im_2\xrightarrow{V_{cr.fl.}^{(1)}}\Im_3\xrightarrow{V_0^*}\Im_0\xrightarrow{V_{cr.div.}^{(2)}}\Im_1,\ k_1\geq 0.4. \qquad (5.2)$$

Здесь, в соответствии с обозначением (3.9), $k_1=I_c\pi^2\gamma^2\left(m_c a^2\right)^{-1}$.

Справедливо равенство $V_0=V_{1,2}$: приведённые скорости $V_0D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_{1,2}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ исчисляются подстановкой второго корня уравнения (4.4) в формулу (2.12). При этом, при малых $k_1<0.4$ имеет место переход $\Im_0\to\Im_3$, а при больших $k_1\geq 0.4$ – переход $\Im_2\to\Im_3$, соответственно, при скоростях потока газа $V\geq V_{cr.fl.}^{(1)}$ при $k_1<0.4$ начинает совершать автоколебания «плоская» пластинка, а при $k_1\geq 0.4$ – «изогнутая» пластинка.

Таблица 4.

β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
$V_0D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_{1,2}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	88.199 89.786 90.435 91.422 93.088	91.350 93.198 93.877 95.283 96.685	93.746 95.477 96.186 97.230 99.064	99.521 101.138 101.887 103.014 105.028	110.399 112.594 113.373 114.725 117.027	119.662 123.661 125.003 126.351 129.058

Таблица 5.

β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
$V_{crdiv}^{(1)}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	–	5.014 4.473 4.255 3.925 3.362	5.830 5.278 5.051 4.716 4.156	7.931 7.349 7.114 6.760 6.156	12.165 11.701 11.416 11.061 10.423	16.905 16.280 16.046 15.658 14.962

В таблицах 4 – 7 приведены численные результаты для $\gamma = 0.3$. При этом, данные таблиц 4–6 соответствуют значениям $\nu = 0.125;\ 0.25;\ 0.3;\ 0.375;\ 0.5$, а таблицы 7 – $\nu = 0.3$.

Из данных таблиц 5–7 следует, что в интервале $\gamma \in (0.193, 0.33)$ для пластинок из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν критические скорости $V_{crdiv}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_{crdiv}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ убывают, соответственно, на 12% и 3%, а $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_{crfl}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ – возрастают на 2.3% и 1.4% соответственно.

Таблица 6.

β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
$V_{crdiv}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	491.454 481.234 477.171 471.210 461.463	496.671 486.017 481.876 475.772 465.992	499.942 489.200 485.009 478.745 468.716	508.448 496.800 492.586 486.288 475.852	524.871 512.453 508.194 501.404 490.225	541.357 528.588 523.637 515.920 503.990

Таблица 7. Значения $V_{crfl}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\nu = 0.3$

k_1 \ β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
0.1	110.408	117.187	121.950	135.203	176.729	–
0.3	90.437	93.853	95.972	102.012	114.674	127.567
0.5	93.451	96.293	98.400	103.516	114.023	125.003
1.0	104.255	106.889	108.818	113.468	122.844	132.469
2.0	118.049	120.733	122.481	127.192	136.401	145.828
5.0	134.647	137.594	139.423	144.213	153.840	163.684
10.0	144.330	147.348	149.364	154.413	164.421	174.803

На промежутке $\beta_x^2 \in [0, 3]$ критические скорости $V_{crdiv}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $V_{crdiv}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_{crfl}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ возрастают, соответственно, в 1.4 раза, 1.045 раз, 1.18 раза и в 1.1–1.2 раза.

5.2. Невозмущённое движение системы «пластинка–поток», начиная примерно со значения $\gamma = 0.33$, становится устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ при всех $\beta_x^2 \geq 0$ для стальных пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \in (0.01, 0.015]$. А, для пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \in [0.006, 0.01]$ – при $\beta_x^2 \geq \left(\beta_x^2\right)_{\min}$ (табл. 8).

Таблица 8. Значения $\left(\beta_x^2\right)_{\min}$ при $\gamma \in [0.33, 0.74)$ и $2ha^{-1} = 0.006;\ 0.01$.

$2ha^{-1}$ \ γ	0.4	0.5	0.6	0.7	0.73
0.006	4.2	2.3	1.28	0.49	0.011
0.010	0.52	0.01	0	0	0

Соответственно, при $2ha^{-1} \in [0.006, 0.01]$ и $\beta_x^2 < \left(\beta_x^2\right)_{\min}$ невозмущённое движение системы неустойчиво вблизи $a_0\sqrt{2}$: имеет место эйлерова дивергенция панели.

Цепочки переходов представятся в виде:

$$(\Im_0) \xrightarrow{V^{(1)}_{cr.div.}} \Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{V^{(2)}_{cr.div.}} \Im_1,\ k_1 < 0.5; \tag{5.3}$$

$$(\Im_0) \xrightarrow{V^{(1)}_{cr.div.}} \Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{V^{(1)}_{cr.fl.}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{V^{(2)}_{cr.div.}} \Im_1, k_1 \in [0.5, 2);$$

$$(\Im_0) \xrightarrow{V^{(1)}_{cr.div.}} \Im_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \Im_2 \xrightarrow{V^{(1)}_{cr.fl.}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{V^{(2)}_{cr.div.}} \Im_1,\ k_1 \geq 2\ ;.$$

Здесь, также, по аналогии с предыдущим случаем (разд. 5.1), $V_0 = V_{1.2}$.

Как следует из выражений (5.3), при малых k_1 ($k_1 < 0.5$) флаттер отсутствует: имеет место потеря устойчивости системы только лишь в виде эйлеровой дивергенции панели при скоростях потока газа $V \geq V^{(1)}_{cr.div.}$ и $V \geq V^{(2)}_{cr.div.}$ соответственно. При $k_1 \in [0.5, 2)$ и $k_1 \geq 2$ система теряет устойчивость и в виде дивергенции панели, и в виде флаттера. При этом имеют место, соответственно, переходы $\Im_0 \to \Im_3$ и $\Im_2 \to \Im_3$: при скоростях потока газа $V \geq V^{(1)}_{cr.fl.}$ при $k_1 \in [0.5, 2)$ начинает совершать автоколебания «плоская» пластинка, а при $k_1 \geq 2$ – «изогнутая» пластинка.

В таблицах 9–12 приведены численные результаты исходной задачи для $\gamma = 0.5$.

Таблица 9.

β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
$V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	112.626 117.410 120.011 124.885 133.268	119.749 128.058 130.737 135.756 145.169	125.924 133.991 137.492 143.073 153.181	141.674 151.087 155.146 161.708 173.805	173.443 185.942 191.627 200.469 206.291	205.683 222.210 229.671 241.946 267.577

Таблица 10.

β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
$V_{crdiv}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	15.217	18.773	21.485	28.945	44.734	62.175
	12.613	16.454	19.211	26.241	41.742	58.306
	11.706	15.565	18.563	25.182	4 0.443	56.904
	10.448	14.201	16.910	23.813	38.494	54.805
	8.406	12.041	14.581	21.254	35.565	51.315
$V_{crdiv}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	501.104	512.567	522.207	543.400	586.043	626.011
	469.630	480.837	488.510	507.432	539.972	573.127
	458.288	466.950	475.123	492.685	524.875	553.991
	441.092	450.348	456.415	471.701	499.471	524.774
	413.148	421.869	426.441	437.960	457.585	472.538

Из данных таблиц 9 – 12 следует, что приведённые критические скорости, соответствующие критическим скоростям эйлеровой дивергенции панели $V_{cr.div.}^{(1)}$ и $V_{cr.div.}^{(2)}$, не эйлеровой дивергенции панели $V_{1,2}$ и панельного флаттера $V_{cr.fl.}^{(1)}$ являются возрастающими функциями от параметров: n, γ и β_x^2. В отличие от скоростей $V_{1,2}$ и $V_{cr.fl.}^{(1)}$, критические скорости эйлеровой дивергенции $V_{cr.div.}^{(1)}$ и $V_{cr.div.}^{(2)}$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν.

Таблица 11. Значения $V_{crfl}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $k_1 < 2$ (переход $\Im_0 \to \Im_3$).

k_1 \ β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
0.5	125.112	140.281	151.488	185.733		
	135.351	153.966	168.959	–	–	–
	140.250	161.281	180.177			
	149.329	178.751	–			
	–	–				
1.0	111.422	121.623	128.788	147.461	190.749	249.783
	118.522	130.085	138.079	159.649	214.860	–
	121.879	133.818	142.204	165.434	234.193	
	126.587	140.046	149.361	175.960	–	
	137.134	152.958	164.815	–		

Таблица 12. Значения $V_{crfl}^{(1)} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ при $k_1 \geq 2$ (переход $\Im_2 \to \Im_3$).

k_1 \ β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
2.0	112.809 118.894 121.579 125.698 133.422	121.248 128.211 131.198 135.950 145.130	126.991 124.572 137.844 143.113 153.382	141.873 151.087 155.269 162.079 176.214	173.870 188.123 194.708 207.178 –	209.324 232.487 246.238 –
5.0	126.852 131.234 133.153 136.125 141.620	134.399 139.420 141.617 145.011 151.431	139.450 144.975 147.362 151.086 158.251	152.302 159.238 162.162 166.890 176.150	179.446 189.435 193.826 201.306 218.641	208.412 222.813 229.671 290.858 –
10.0	138.689 140.250 142.602 144.965 146.548	147.353 151.150 152.656 155.238 159.972	152.374 156.420 158.292 161.113 166.303	165.434 170.232 172.542 176.002 182.814	191.715 198.692 202.252 207.898 219.816	219.199 229.741 234.842 243.660 –

А приведённые критические скорости эйлеровой дивергенции $V_{cr.div.}^{(1)} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ и $V_{cr.div.}^{(2)} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ убывают, примерно, в 1.2 раза с ростом коэффициента Пуассона ν, а скорости $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ и $V_{crfl}^{(1)} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$ – возрастают, примерно, в 1.2 раза и 1.05 – 1.22 раза соответственно. При этом, при больших значениях коэффициента Пуассона ν с ростом коэффициента напряжения β_x^2 автоколебания начинают постепенно исчезать: растягивающие усилия приводят к существенному повышению устойчивости системы «пластинка – поток».

5.3. Невозмущённое движение системы «пластинка–поток» для стальных пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \in \left[0.006, 0.015\right]$ при всех $\gamma \in \left[0.74, 1.96\right)$ и $\beta_x^2 \geq 0$ является устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$. С увеличением скорости потока газа невозмущённое движение системы теряет устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели или в виде локализованной дивергенции в зависимости от параметров γ, ν и β_x^2: панельный флаттер и не эйлерова дивергенция панели отсутствуют [17].

Таблица 13.

β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
$V_{crdiv}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ $\gamma = 0.8$	81.466 59.421 54.086 46.171 35.167	102.765 76.187 68.915 60.668 48.453	118.628 87.526 80.128 70.625 57.489	165.402 117.202 107.909 96.533 81.124	689.543 173.640 165.655 150.345 130.259	783.569 247.456 228.778 207.903 183.078

При $\gamma \in [0.74, 1.3)$, $\beta_x^2 \geq 0$ и всех ν система теряет устойчивость в виде дивергенции панели при скоростях потока $V \geq V_{cr.div.}$ (табл. 13 и 14).
Соответственно, цепочка переходов будет вида:

$$\Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div.}} \Im_1 \;, \gamma \in [0.74, 1.3) ,\; \beta_x^2 \geq 0 \,. \tag{5.4}$$

Таблица 14.

β_x^2	0	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0
$V_{crdiv}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ $\gamma = 1$	522.743 156.951 128.462 102.093 72.910	577.560 206.272 165.615 133.979 100.260	612.285 239.197 190.252 155.561 118.173	702.632 310.434 255.029 208.950 164.256	897.284 470.539 383.445 317.049 258.358	1071.121 597.198 511.530 430.057 356.738

Из данных таблиц 13 и 14 следует, что приведённая критическая скорость дивергенции панели $V_{cr.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, являясь монотонно убывающей функцией от коэффициента Пуассона ν и монотонно возрастающей от коэффициента напряжения β_x^2 и параметра γ, существенно зависит от этих параметров. При этом, при $\gamma = 0.8$ и $\gamma = 1$ критическая скорость дивергенции панели с возрастанием ν убывает примерно в 2.3 – 4.28 раза и в 3 – 7.17 раза соответственно. А с ростом коэффициента напряжения $\beta_x^2 \in [0, 3]$ – возрастает, примерно, в 6.5 – 11.7 раза при $\gamma = 0.8$ и в 2.8 – 7.7 раза при $\gamma = 1$.

При $\gamma \in [1.3, 1.96)$ и всех ν невозмущённое движение системы теряет устойчивость или в виде дивергенции панели, или в виде локализованной дивергенции, в зависимости от $\beta_x^2 = \left(\beta_x^2\right)_{gr.}(\gamma, \nu) \in [0, 3)$. При этом, $\left(\beta_x^2\right)_{gr.}(\gamma, \nu)$ является монотонно убывающей функцией от γ и слабо убывающей от ν (табл.15) [17].

Таблица 15.

γ	1.96	1.8	1.6	1.4	1.3
$\left(\beta_x^2\right)_{gr.}$ при $\nu = 0.3$	0	1.8	2.0	2.1	2.2

В интервале $\gamma \in [1.3, 1.96)$ при $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{gr.}(\gamma, \nu)$ система теряет устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели $\left(\Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div.}} \Im_{div.}\right)$, а при значениях $\beta_x^2 \geq (\beta_x^2)_{gr.}(\gamma, \nu)$ – в виде локализованной дивергенции $\left(\Im_0 \xrightarrow{V_{loc.div.}} \Im_{loc.div.}\right)$. При этом, $\Im_{div.} \subset \Im_1$ и $\Im_{loc.div.} \subset \Im_1$: $\Im_1 = \Im_{div.} \cup \Im_{locdiv.}$ [17].

Начиная с $\gamma = \gamma_{gr.} = 1.96$, при скоростях потока $V \geq V_{locdiv.}$ при всех $\beta_x^2 \geq 0$ и ν система теряет устойчивость только в виде локализованной дивергенции – дивергенции, локализованной в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки, подобно полубесконечной пластине–полосе $(\gamma = \infty)$ [16, 17].

Тем самым, для всех $\gamma \in [0.74, 1.96)$ предварительное статическое нагружение в виде растягивающих усилий $(\beta_x^2 > 0)$ приводит к существенному повышению устойчивости системы, в сравнении с системой с предварительно ненагруженной панелью $(\beta_x^2 = 0)$ [16].

6. Основные результаты и заключение. В работе получено аналитическое решение задачи динамической устойчивости невозмущённого состояния равновесия упругой прямоугольной пластинки умеренных размеров $(\gamma \in (0.193, 1.96))$ с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край, в предположении, что пластинка предварительно растянута по направлению потока газа и на свободном крае имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота.
Получена формула зависимости скорости потока газа от «существенных» параметров системы «пластинка–поток», позволяющая найти критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера.

Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы на область устойчивости и области неустойчивости.

Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Найдены «безопасные» и «опасные» границы области устойчивости в смысле Н.Н. Баутина.

Найдены критические скорости дивергенции и панельного флаттера.

Установлено, что в интервале $\gamma \in (0.193, 0.74)$ при малых значениях коэффициента напряжения система «пластинка-поток» является неустойчивой вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей для стальных пластин относительной толщины $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$.

Найдено минимальное значение коэффициента напряжения в зависимости от относительной толщины и от отношения сторон прямоугольной пластинки, начиная с которого система становится устойчивой вблизи значения $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуко-

вых скоростей при всех $\gamma \in (0.193, 0.74)$. При дальнейшем увеличении скорости потока система, становясь устойчивой, вновь теряет её в виде дивергенции панели (эйлеровой и не эйлеровой), а после, в виде панельного флаттера
Найдены соответствующие критические скорости дивергенции и панельного флаттера.

В интервале $\gamma \in [0.74, 1.3)$ система теряет устойчивость только в виде эйлеровой дивергенции панели, а при значениях $\gamma \in [1.3, 1.96)$ – теряет устойчивость или в виде дивергенции панели, или в виде локализованной дивергенции, в зависимости от коэффициента напряжения растягивающих усилий.

Найдено граничное значение коэффициента напряжения $\left(\beta_x^2\right)_{gr.}$ в зависимости от $\gamma \in [1.3, 1.96)$ и от коэффициента Пуассона ν, разграничивающее область эйлеровой неустойчивости на подобласти дивергенции панели и локализованной дивергенции.

Показано, что при малых значениях параметра отношения интенсивностей приложенных моментов поворота и инерционных масс имеет место переход из области устойчивости в область панельного флаттера: переход системы от «покоя» к движению – автоколебаниям (флаттерным колебаниям). При этом плоская пластинка начинает совершать автоколебания. При больших значениях этого параметра потеря устойчивости наступает при меньшей скорости потока, но это не эйлерова потеря устойчивости, а переход системы из области не эйлеровой дивергенции в область панельного флаттера – к автоколебаниям: «изогнутая» пластинка начинает совершать автоколебания.

Показано, что критические скорости дивергенции и флаттера являются возрастающими функциями от коэффициента напряжения растягивающих сил. Тем самым, растягивающие силы приводят к существенному повышению устойчивости системы «пластинка–поток», в сравнении с системой, в случае панели с предварительно ненагруженными краями [16].

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем..– М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии Механика деформируемых твердых тел. – М.: Наука. 1978. Т.11. С. 67–122.
5. Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // Изв. АН СССР. ПММ. 1957. Т.21. № 2. С. 231–243.
6. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968.

7. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
8. Ashley G H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N12. P. 1109–1118.
9. Ржаницын А.Р. Устойчивость равновесия упругих систем. – М.: Гостехиздат. 1955. 475 с.
10. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. № 5. с. 33–44.
11. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
12. Алфутов Н.А. Расчёт на устойчивость упругих систем.– М.: Машиностроение. 1978, 312 с.
13. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука. 1979. 384 с.
14. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
15. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.-Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
16. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
17. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции растянутой панели при набегании сверхзвукового потока газа на ее свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 2, с.37–58.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, с.н.с. Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890, (+374 10) 441010 E-mail: mechinsstella@mail.ru