

**О НАПРЯЖЁННОМ СОСТОЯНИИ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ  
ПЛОСКОСТИ С АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИМ ЧАСТИЧНО СКОЛЬЗЯЩИМ  
МЕЖФАЗНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ**

**Акопян В.Н., Акопян Л.В., Даштоян Л.Л.**

**Ключевые слова:** кулоновское трение, абсолютно жёсткое включение, частично скользящее включение, смешанная задача.

**Hakobyan V.N., Hakobyan L.V., Dashtoyan L.L.**

**Stress State of Piecewise Homogeneous Plane with Absolutely Rigid Partially Sliding Interfacial Inclusion**

**Key words:** Coulomb friction, absolutely rigid inclusion, mixed boundary value problem, partially sliding inclusion.

This paper considers the stress state for a piecewise homogeneous plane, containing an absolutely rigid thin interfacial inclusion, one of the long sides of which is completely coupled to the plane, and the other side is in contact with it under dry friction conditions. On the basis of discontinuous solutions of the theory of elasticity for a piecewise homogeneous plane, a closed solution of the mixed boundary value problem is constructed. The regularities for the behavior of contact stresses near the end points of the inclusion are clarified, and simple formulas are obtained for determining both normal and tangential contact stresses acting on the long sides of the inclusion.

**Հակոբյան Վ.Ն., Հակոբյան Լ.Վ., Դաշտոյան Լ.Լ.**

**Մասնակիորեն սահող բացարձակ կոշտ միջֆազային ներդրակ պարունակող կտոր առ կտոր համասեռ հարթության լարվածային վիճակի մասին**

**Հիմնաբառեր՝** կուլոնյան շփում, բացարձակ կոշտ ներդրակ, մասնակիորեն սահող ներդրակ, խառը եզրային խնդիր

Ուսումնասիրված է կտոր առ կտոր համասեռ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը, երբ այն պարունակում է բացարձակ կոշտ ներդրակ, որի երկար կողմերից մեկը ամրակցված է հիմքին, իսկ մյուս կողմի և հիմքի կոնտակտի տեղամասում տեղի ունի շփման Կուլոնի օրենքը: Ստացված են խնդրի որոշիչ հավասարումները երեք սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի տեսքով և կառուցվել է նրա փակ լուծումը: Պարզված է կոնտակտային լարումների վարքը ներդրակի ծայրակետերի շրջակայքում և ստացվել են պարզ բանաձևեր ներդրակի երկար կողմերին գործող ինչպես նորմալ, այնպես էլ շոշափող կոնտակտային լարումների համար:

В настоящей работе, на основе разрывных решений теории упругости для кусочно-однородной плоскости, построено точное решение смешанной задачи для кусочно-однородной плоскости, которая содержит межфазное абсолютно жёсткое тонкое включение, одна из длинных сторон которого полностью сцеплена с плоскостью, а другая сторона контактирует с ней при условиях сухого трения. Выяснены закономерности поведения контактных напряжений вблизи концевых точек включения и получены простые формулы для определения как нормальных, так и касательных контактных напряжений, действующих на длинные стороны включения.

**Введение**

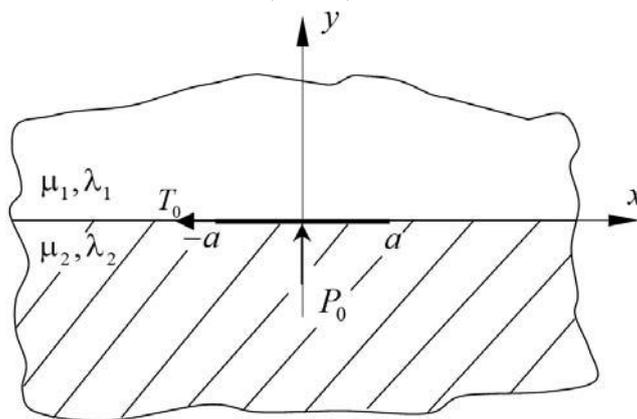
Изучению плоского напряженно-деформированного состояния однородной и кусочно-однородной плоскости, содержащей межфазные дефекты типа трещин, полностью или частично сцепленных тонких абсолютно жёстких включений,

посвящено много работ. В этой связи укажем на монографии [1-6], где построены точные или эффективные решения ряда задач в указанном направлении. Приведём также работы [7-8], где построены точные решения двух задач для кусочно-однородной плоскости с межфазными включениями, одна сторона которых сцеплена с матрицей, а другая сторона отошла от матрицы, создавая трещину, или гладко контактирует с матрицей. Точные решения многих задач о взаимовлиянии абсолютно жёстких включений с трещинами в ортотропной упругой плоскости приведены в монографии [6]. Отметим также работы [10,11] в которых построены точные решения двух контактных задач для кусочно-однородной упругой плоскости с меж-фазной трещиной, на один из берегов которой вдавливается абсолютно жёсткий гладкий штамп или жёсткий штамп с сухим трением. Приведём также работу [9], где построено точное решение аналогичной задачи для однородной ортотропной плоскости.

В настоящей работе изучено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной упругой плоскости с межфазным абсолютно жёстким включением, одна из длинных сторон которого жёстко сцеплён с матрицей, а вторая контактирует с матрицей при сухом трении.

#### Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Рассмотрим плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости из двух разнородных полуплоскостей с коэффициентами Ламэ  $\mu_1, \lambda_1$  и  $\mu_2, \lambda_2$  соответственно, отнесённой к декартовой системе координат  $Oxy$ , ось абсцисс которой направлена по линии соединения разнородных полуплоскостей, и содержащей на интервале  $(-a, a)$  этой оси межфазное, абсолютно жёсткое включение. Считается, что одна из длинных сторон включения полностью сцеплена с кусочно-однородной плоскостью, а другая сторона контактирует с ней в условиях сухого трения. Полагается также, что плоскость деформируется под действием нормальной и горизонтальной сосредоточенных нагрузок величины  $P_0$  и  $T_0$  соответственно, приложенных к включению (Фиг. 1).



Фиг. 1

Требуется построить точное решение задачи в квадратурах и выяснить поведение контактных напряжений, действующих под штампом и на плоскости стыка разнородных полуплоскостей вблизи концевых точек трещины, в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задачи.

Поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0) \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) \\ u^{(1)}(x, 0) = u^{(2)}(x, 0) \\ v^{(1)}(x, 0) = v^{(2)}(x, 0) \end{cases} \quad |x| > a \quad (1a)$$

$$\begin{cases} \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \rho \sigma_y^{(1)}(x, 0) \\ u^{(2)}(x, 0) = \delta_1 \\ v^{(1)}(x, 0) = v^{(2)}(x, 0) = \delta_2 \end{cases} \quad |x| < a \quad (1б)$$

где  $\delta_j$  ( $j = 1, 2$ ) – горизонтальные и вертикальные компоненты жёсткого смещения штампа,  $\sigma_y^{(j)}(x, y)$  и  $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$  ( $j = 1, 2$ ) – компоненты тензора напряжений, действующих в верхней и нижней полуплоскостях,  $u^{(j)}(x, y)$  и  $v^{(j)}(x, y)$  ( $j = 1, 2$ ) – горизонтальные и нормальные составляющие вектора смещений в соответствующих полуплоскостях.

Для решения поставленной задачи будем использовать разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости, полученные в монографии [7]. Сохранив обозначения, введённые в [7], и учитывая, что в рассматриваемом случае  $v(x) = v^{(1)}(x, 0) - v^{(2)}(x, 0) = 0$ , для напряжений на длинных сторонах включения, а также для нормальных и горизонтальных смещений точек кусочно-однородной плоскости, соприкасающихся с длинными сторонами включения получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \frac{l_0}{\Delta} \sigma(x) + \frac{l_1}{\Delta} u'(x) + \frac{l_2}{\pi \Delta} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds; \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= \frac{l_0}{\Delta} \tau(x) - \frac{l_2}{\pi \Delta} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds - \frac{l_3}{\pi \Delta} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sigma_y^{(2)}(x, 0) = \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma(x); \quad \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau(x);$$

$$\frac{dv^{(2)}(x, 0)}{dx} = \frac{dv^{(1)}(x, 0)}{dx} = -\frac{d_0}{\Delta} \tau(x) - \frac{d_1}{\pi \Delta} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds - \frac{l_2}{\pi \Delta \vartheta_2^{(2)}} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds;$$

$$\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx} = -\frac{l_0}{\Delta \vartheta_2^{(2)}} u'(x) + \frac{d_0}{\Delta} \sigma(x) - \frac{d_1}{\pi \Delta} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds;$$

Здесь введены обозначения:

$$\sigma(x) = \sigma_y^{(1)}(x,0) - \sigma_y^{(2)}(x,0); \quad \tau(x) = \tau_{xy}^{(1)}(x,0) - \tau_{xy}^{(2)}(x,0);$$

$$\frac{d[u^{(1)}(x,0) - u^{(2)}(x,0)]}{dx} = \frac{du^{(1)}(x,0)}{dx} = u'(x) / \theta_2^{(2)};$$

$$l_0 = \vartheta_2^{(1)}(\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}) - \vartheta_1^{(1)}(\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}); \quad l_2 = \vartheta_1^{(1)}\vartheta_2^{(2)} + \vartheta_2^{(1)}\vartheta_1^{(2)};$$

$$l_1 = 2(\vartheta_2^{(2)})^{-1}(\vartheta_1^{(2)}l_0 - \vartheta_2^{(2)}l_2); \quad l_3 = 2(\vartheta_2^{(2)})^{-1}(\vartheta_1^{(2)}l_2 - \vartheta_2^{(2)}l_0);$$

$$d_0 = \frac{\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}}{2}; \quad d_1 = \frac{\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}}{2}; \quad \vartheta_1^{(j)} = \frac{\mu_j}{2 + \alpha_j}; \quad \vartheta_2^{(j)} = \frac{(1 + \alpha_j)\mu_j}{2 + \alpha_j};$$

$$\Delta = (\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)})^2 - (\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)})^2; \quad \alpha_j = \frac{1}{1 - 2\nu_j}; \quad (j = 1, 2).$$

Используя соотношения (2), удовлетворим условиям на берегах трещины (1.6), предварительно продифференцировав последние два. В итоге, для определения неизвестных скачков нормальных и касательных контактных напряжений  $\sigma(x)$  и  $\tau(x)$ , действующих на длинные стороны включения, а также дислокации горизонтальных смещений  $u'(x)$ , получим следующую определяющую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} d_0 \tau(x) + \frac{d_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{l_2}{\pi \vartheta_2^{(2)}} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds = 0; \\ l_0 \tau(x) - \rho l_0 \sigma(x) - \rho l_1 u'(x) - \frac{\rho l_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds - \frac{l_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds - \frac{l_3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds = 0; \\ \frac{l_0}{\vartheta_2^{(2)}} u'(x) - d_0 \sigma(x) + \frac{d_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds = 0; \end{cases} \quad (3)$$

Для определения единственного решения системы (3), её будем рассматривать при условиях равновесия включения и непрерывности смещений в концевых точках трещины:

$$\int_{-a}^a \sigma(x) dx = P_0; \quad \int_{-a}^a \tau(x) dx = T_0; \quad \int_{-a}^a u'(x) dx = 0 \quad (4)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений (3) при условиях (4).

### Решение системы определяющих уравнений

Чтобы построить замкнутое решение системы (3) при условиях (4), приведём систему (3) к каноническому виду. Получим:

$$\begin{cases} \sigma(x) + \frac{a_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{a_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \frac{a_3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds = 0; \\ \tau(x) + \frac{b_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{b_3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds = 0; \\ u'(x) + \frac{c_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{c_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \frac{c_3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds = 0. \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\vartheta_2^{(1)} l_0}{2\rho\vartheta d_0}; & a_2 &= -\frac{\vartheta_1^{(1)}\vartheta_2^{(2)}}{\vartheta}; & a_3 &= \frac{\vartheta_2^{(1)}\vartheta_1^{(2)} l_0}{\rho\vartheta_2^{(2)}\vartheta d_0}; & b_1 &= \frac{d_1}{d_0}; & b_3 &= \frac{l_2}{\vartheta_2^{(2)} d_0}; \\ c_1 &= \frac{\vartheta_2^{(1)}\vartheta_2^{(2)}}{2\rho\vartheta}; & c_2 &= \frac{\vartheta_2^{(1)}\vartheta_2^{(2)}}{2\vartheta}; & c_3 &= \frac{\vartheta_2^{(1)}\vartheta_1^{(2)}}{\rho\vartheta}; & \vartheta &= (\vartheta_2^{(1)})^2 - (\vartheta_1^{(1)})^2 + \vartheta_1^{(1)}\vartheta_1^{(2)}. \end{aligned}$$

Отметим, что представление (5) определяющей системы непригодно лишь в случае однородной плоскости, рассмотренной в [9], когда  $d_0 = l_1 = 0$ .

Как и в [11], решение системы (5) приведем к решению трех независимых сингулярных интегральных уравнений. Для этого умножим второе и третье из уравнений (5) на отличные от нуля неизвестные постоянные  $m$  и  $n$  соответственно и просуммируем с первым уравнением (5). Получим:

$$\begin{aligned} &\sigma(x) + m\tau(x) + nu'(x) + \\ &+ \frac{a_1 + mb_1 + nc_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s) + \frac{(a_2 + nc_2)\tau(s)}{a_1 + mb_1 + nc_1} + \frac{(a_3 + mb_3 + nc_3)u'(s)}{a_1 + mb_1 + nc_1}}{s-x} ds = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Далее, потребуем, чтобы имели место равенства:

$$\frac{a_2 + nc_2}{a_1 + mb_1 + nc_1} = m; \quad \frac{(a_3 + mb_3 + nc_3)}{a_1 + mb_1 + nc_1} = n.$$

Исключив из полученных уравнений  $n$ , для определения  $m$  придём к следующему уравнению третьего порядка :

$$Am^3 + Bm^2 + Cm + D = 0 \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A &= -c_1(b_1c_3 - c_1b_3) - c_2b_1^2; \\ B &= c_2(b_1c_3 - b_3c_1) + c_1(a_3c_1 - a_1c_3) - b_1(a_1c_2 - a_2c_1) - c_2(b_3c_1 + a_1b_1); \end{aligned}$$

$$C = c_2(a_1c_3 - a_3c_1) + c_1(a_2c_3 - a_3c_2) - a_1(a_1c_2 - a_2c_1) + c_2(b_3c_2 + a_2b_1);$$

$$D = c_2(c_2a_3 - a_2c_3) + a_2(a_1c_2 - a_2c_1)$$

При этом  $n$  через  $m$  определяется по формуле:

$$n = \frac{b_1m^2 + a_1m - a_2}{c_2 - c_1m}. \quad (8)$$

Рассмотрим случай, когда (7) имеет три различных корня. В этом случае, введя функции

$$\varphi_j(x) = \sigma(x) + m_j\tau(x) + n_ju'(x) \quad (j = 1, 2, 3), \quad (9)$$

где  $m_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) – решения уравнения (7), а  $n_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) для каждого решения  $m_j$  уравнения (7) определяются по формуле (8), решение системы (5) сводится к решению следующих трех независимых сингулярных интегральных уравнений:

$$\varphi_j(x) + \frac{q_j}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi_j(s)}{s-x} ds = 0; \quad (10)$$

$$(-a < x < a; \quad q_j = a_1 + m_jb_1 + n_jc_1; \quad j = 1, 2, 3).$$

при условиях

$$\int_{-a}^a \varphi_j(x) dx = P_0 + m_jT_0 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (11)$$

Решение уравнений (10) имеет вид [ 4 ]:

$$\varphi_j(x) = C_j X_j^+(x); \quad (12)$$

$$X_j(z) = (z+a)^{-\gamma_j} (z-a)^{\gamma_j-1}; \quad \gamma_j = \frac{1}{2\pi i} \ln|G_j| + \frac{\vartheta_j}{2\pi} = \alpha_j - i\beta_j;$$

$$0 < \vartheta_j = \arg G_j < 2\pi; \quad G_j = \frac{1-iq_j}{1+iq_j} \quad (j = 1, 2, 3).$$

а функция

$$X_j^+(x) = -\sqrt{G_j} (a+x)^{-\gamma_j} (a-x)^{\gamma_j-1} = -\sqrt{G_j} \omega_j(x)$$

значение комплексной функций  $X_j(z)$  на верхнем берегу интервала  $(-a, a)$ .

При помощи (12), удовлетворив условиям (11) и учитывая значение интеграла [12]

$$\int_{-a}^a (x+a)^{-\gamma} (a-x)^{\gamma-1} dx = \frac{\pi}{\sin \pi\gamma},$$

найдем:

$$C_j = -\left(P_0 + m_j T_0\right) \frac{\sin \pi\gamma_j}{\pi\sqrt{G_j}} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Следовательно,

$$\varphi_j(x) = \frac{\left(P_0 + m_j T_0\right) \sin \pi\gamma_j}{\pi(a+x)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j}}. \quad (13)$$

Далее, подставляя значение функций  $\varphi_j(x)$  из (13) в соотношения (9), для определения неизвестных функций  $\sigma(x)$ ,  $\tau(x)$  и  $u'(x)$  получим систему алгебраических уравнений. Решив эту систему, найдем:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\left(P_0 + m_j T_0\right) A_j^* \sin \pi\gamma_j}{\pi(x+a)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j}}; \quad \tau(x) = \sum_{j=1}^3 \frac{\left(P_0 + m_j T_0\right) B_j^* \sin \pi\gamma_j}{\pi(x+a)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j}}; \\ u'(x) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\left(P_0 + m_j T_0\right) C_j^* \sin \pi\gamma_j}{\pi(x+a)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_1^* &= \frac{(m_2 n_3 - m_3 n_2)}{\Delta_*}; \quad A_2^* = \frac{(m_3 n_1 - m_1 n_3)}{\Delta_*}; \quad A_3^* = \frac{(m_1 n_2 - m_2 n_1)}{\Delta_*}; \quad B_1^* = \frac{n_2 - n_3}{\Delta_*}; \\ B_2^* &= \frac{n_3 - n_1}{\Delta_*}; \quad B_3^* = \frac{n_1 - n_2}{\Delta_*}; \quad C_1^* = \frac{m_3 - m_2}{\Delta_*}; \quad C_2^* = \frac{m_1 - m_3}{\Delta_*}; \quad C_3^* = \frac{m_2 - m_1}{\Delta_*}; \\ \Delta_* &= (m_2 n_3 - m_3 n_2) + (m_3 n_1 - m_1 n_3) + (m_1 n_2 - m_2 n_1). \end{aligned}$$

Из полученных формул (14) можно заключить, что в случае, когда уравнение (7) имеет три различных действительных корня, то  $|G_j| = 1$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и как скачки контактных напряжений  $\sigma(x)$  и  $\tau(x)$ , так и горизонтальная компонента дислокации  $u'(x)$  в конечных точках включения будут иметь показательную особенность без осцилляции с тремя различными показателями  $\gamma_j = \vartheta_j / 2\pi$  ( $j = 1, 2, 3$ ). В случае же, когда уравнение (7) имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня, эти функции в конечных

точках включения будут иметь одну показательную особенность без осцилляции и две с осцилляцияй.

Используя представления (14) и значение интеграла [12]

$$\int_{-a}^a \frac{(a+s)^{-\gamma} (a-s)^{\gamma-1}}{s-x} ds = \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi\gamma)}{(a+x)^\gamma (a-x)^{1-\gamma}} \quad (0 < \gamma < 1; |x| < a),$$

по формулам (2) для контактных напряжений, действующих на длинные стороны включения, получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \frac{1}{\pi\Delta} \sum_{j=1}^3 \frac{(P_0 + m_j T_0) [l_0 A_j^* + l_1 B_j^* + l_2 C_j^* \operatorname{ctg} \pi\gamma_j] \sin \pi\gamma_j}{(x+a)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j}}; \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= -\frac{1}{\pi\Delta} \sum_{j=1}^3 \frac{(P_0 + m_j T_0) [l_2 A_j^* \cos \pi\gamma_j - l_0 B_j^* \sin \pi\gamma_j - l_3 C_j^* \cos \pi\gamma_j]}{(x+a)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j}}; \\ \sigma_y^{(2)}(x, 0) &= \frac{1}{\pi\Delta} \sum_{j=1}^3 \frac{(P_0 + m_j T_0) [(l_0 - \Delta) A_j^* + l_1 B_j^* + l_2 C_j^* \operatorname{ctg} \pi\gamma_j] \sin \pi\gamma_j}{(x+a)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j}}; \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= -\frac{1}{\pi\Delta} \sum_{j=1}^3 \frac{(P_0 + m_j T_0) [l_2 A_j^* \cos \pi\gamma_j - (l_0 - \Delta) B_j^* \sin \pi\gamma_j - l_3 C_j^* \cos \pi\gamma_j]}{(x+a)^{\gamma_j} (a-x)^{1-\gamma_j}}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, рассматривая представления (2) вне интервала контакта включений с плоскостью и используя формулу [12]

$$\int_{-a}^a \frac{(s+a)^{-\gamma} (a-s)^{\gamma-1}}{s-x} = \frac{\pi \operatorname{sign} x}{|a+x|^\gamma |a-x|^{1-\gamma} \sin \pi\gamma} \quad (|x| > a)$$

для контактных напряжений в зоне сцепления разнородных полуплоскостей получим формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \frac{l_2}{\pi\Delta} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds = \frac{l_2}{\pi^2 \Delta} \sum_{j=1}^3 \int_{-a}^a \frac{(P_0 + m_j T_0) B_j^* \sin \pi\gamma_j}{(s-x)(s+a)^{\gamma_j} (a-s)^{1-\gamma_j}} ds = \\ &= \frac{l_2 \operatorname{sign} x}{\pi\Delta} \sum_{j=1}^3 \frac{(P_0 + m_j T_0) B_j^*}{|a+x|^\gamma |a-x|^{1-\gamma}} \quad (|x| > a); \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = -\frac{l_2}{\pi\Delta} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds - \frac{l_3}{\pi\Delta} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds = \\ &= -\frac{\operatorname{sign} x}{\pi\Delta} \sum_{j=1}^3 \frac{(P_0 + m_j T_0) (l_2 A_j^* + l_3 C_j^*)}{|a+x|^\gamma |a-x|^{1-\gamma}} \quad (|x| > a). \end{aligned}$$

Следовательно, можно утверждать, что контактные напряжения как на длинных сторонах включения, так и на стыке разнородных полуплоскостей имеют те же особенности, что и их скачки на длинных сторонах включений.

Не разбирая случая, когда уравнение (7) имеет кратные корни, заметим только, что в этом случае число уравнений (10) уменьшается. Это не позволяет сразу определить искомые функции. Однако, решив эти уравнения, можно определить одну из искомым функций через две другие, если (7) имеет трёхкратный корень, или две из искомым функций через одну из них, если (7) имеет один простой и один двукратный корень. Затем, используя соответственно два или одно из уравнений (5), решение задачи можно свести к решению системы из двух неоднородных сингулярных интегральных уравнений, в первом случае, и к одному неоднородному сингулярному интегральному уравнению во втором случае.

Следует отметить также, что, как показывают численные расчеты, когда  $\mu = \mu_1 / \mu_2 > 0.5$  и значение коэффициента трения  $\rho$  меньше, чем  $0.5$ , уравнение (7) имеет три действительных корня.

### **Заключение**

Таким образом, методом сингулярных интегральных уравнений построено точное решение задачи для кусочно-однородной плоскости с межфазным конечным, абсолютно жёстким тонким включением, одна из длинных сторон которого жёстко сцеплена с матрицей, а другая сторона контактирует с матрицей при сухом трении. Получены простые формулы как для определения контактных напряжений на длинных сторонах включения и вне трещины, так и для горизонтальной компоненты дислокации. Показано, что в случае, когда характеристическое кубическое уравнение имеет три действительных корня, что имеет место когда нижняя полуплоскость не жёстче верхней полуплоскости более, чем в два раза, а коэффициент трения не превосходит  $0.5$ , как контактные напряжения на длинных сторонах включения, так и нормальные и касательные контактные напряжения вне трещины в концевых точках трещины имеют показательную особенность без осцилляции с тремя различными показателями. Обсуждён также случай, когда характеристическое кубическое уравнение имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня. Показано, что в этом случае контактные напряжения помимо показательной особенности без осцилляции имеют также показательную особенность с осцилляцией.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21Т-2С209

## ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости, М. Наука, 1980г.,304с.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. - М.: Наука, 1982.- 344с.
3. Панасюк В.В. Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.- Киев: Наукова думка, 1976.- 443с.
4. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708с.
5. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г. Взаимодействие жёстких линейных включений и трещин в деформируемом теле.-Киев: Наукова думка, 1983.-288с.
6. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2014. 322с.
7. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. // Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, No4, с.57-65.
8. Ильина И.И., Сильвестров В.В. Задача о тонком жёстком включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. // Изв. РАН. МТТ. 2005. №3. С.153-166.
9. Hakobyan V., Dashtoyan L. On a stress state of orthotropic plane with absolutely rigid inclusion //Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 2016, 69 (2). pp. 23-31. Doi- <http://doi.org/10.33018/69.2.2>
10. Акопян Л.В., Даштоян Л.Л. Контактная задача для кусочно-однородной плоскости с межфазной трещиной. Сб. трудов VII-ой межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Цахкадзор-2021, ст.18-22.
11. Hakobyan V.N., Hakobyan L.V. and Dashtoyan L.L. Contact problem for a piecewise-homogeneous plane with an interfacial crack under dry friction. //Journal of Physics: Conference Series, Vol. 2231, VII Int. Conf.: Topical Problems of Continuum Mechanics (TPCM 2021) 04/10/2021 - 08/10/2021, Publ. online: 25/04/2022. DOI - <http://doi.org/10.1088/1742-6596/2231/1/012024>
12. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 738с.

### Сведения об авторах

**Акопян Ваграм Наслетникович** – доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. института механики НАН Армении, тел.: (37410) 568188 E-mail: [vhakobyan@sci.am](mailto:vhakobyan@sci.am)

**Акопян Лусине Ваграмовна** – канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотр. института механики НАН Армении, Тел.: (37410) 568188 E-mail: [lhakobyan@gmail.com](mailto:lhakobyan@gmail.com)

**Даштоян Лилит Левоновна** – кандидат физ.-мат. наук, ученый секретарь института механики НАН РА, тел.: (+3741) 56-81-89, e-mail: [lilit.dashtoyan@sci.am](mailto:lilit.dashtoyan@sci.am)

Поступила в редакцию 28 октября 2022

