ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №3, 2022 Механика
УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2022.75.4-6

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛОСЫ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

Агаловян Л. А., Япуджян В. Т

Ключевые слова: плоская деформация, вынужденные колебания, ортотропное тело, внутреннее трение, смешанная краевая задача.

Aghalovyan L. A., Yapujyan V. T.
Forced vibrations of a layer in a plane deformation state considering internal friction

Keywords: plane deformation, forced vibrations, orthotropic body, internal friction, mixed boundary problem.

The problem of forced vibrations of an orthotropic body in a plane deformation state when there is internal friction is solved by the asymptotic method. It is assumed that the layer rests freely on an absolutely rigid base, and the front surface is affected by normal and tangential forces changing harmonically according to time. The solution of the problem is reduced to the solution of the system of equations, singular perturbated with a small parameter. The solution of the outer problem and the components of the displacement vector and stress tensor corresponding to it are determined. Cases where the solution becomes mathematically precise are noted, and an illustrative example is given.

Աղալովյան Լ. Ա., Յափուջյան Վ. Տ.
Հարթ դեֆորմացիոն վիճակում գտնվող շերտի ստիպողական տատանումները, երբ հաշվի է առնվում ներքին շփումը

Հիմնաբառեր՝ հարթ դեֆորմացիա, հարկադրական տատանումներ, օրթոտրոպ մարմին, ներքին շփում, խառը եզրային խնդիր:

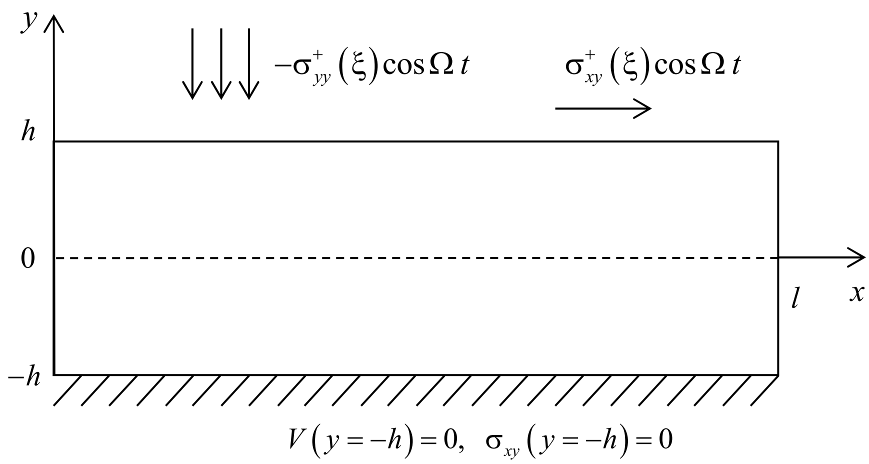
Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է հարթ դեֆորմացիոն վիճակում գտնվող օրթոտրոպ մարմնի ստիպողական տատանումների խնդիրը, երբ առկա է ներքին շփում: Ենթադրվում է, որ շերտը ազատ հենված է բացարձակ կոշտ հենարանի վրա, իսկ դիմային մակերևույթի վրա ազդում են ըստ ժամանակի հարմոնիկ փոփոխվող նորմալ և տանգենցիալ ուժեր: Խնդրի լուծումը հանգեցված է փոքր պարամետրով սինգուլյար գրգռված հավասարումների համակարգի լուծմանը: Որոշված են արտաքին խնդրի լուծումը և նրան համապատասխանող տեղափոխության վեկտորի և լարման թենզորի բաղադրիչները: Նշված են դեպքեր, երբ լուծումը դառնում է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ, բերված է իլյուստրացիոն օրինակ:

Асимптотическим методом решена задача о вынужденных колебаниях ортотропного тела, находящегося в условиях плоской деформации, при наличии в теле внутреннего трения. Предполагается, что полоса свободно лежит на абсолютно жесткой подстилке, а на лицевую поверхность действуют нормальные и тангенциальные силы, изменяющиеся во времени гармонически. Решение задачи сведено к решению системы уравнений, сингулярно возмущенной малым параметром. Определены решение внешней задачи и соответствующие ему компоненты вектора перемещения и тензора напряжений. Указаны случаи, когда решение становится математически точным, приведен иллюстрационный пример.

Введение. Доказано, что если тело даже изолировано от внешнего воздействия, то в ней колебательный процесс имеет затухающий характер. Это объясняется наличием в теле внутреннего трения [1]. В данной работе решена смешанная задача о вынужденных колебаниях ортотропного тела, находящегося в условиях плоской деформации, при наличии в теле внутреннего трения. Считается, что трение пропорционально скорости точек. Для решения подобных динамических задач, эффективным оказался асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. В работе [2] была установлена принципиально новая асимптотика, позволившая найти решения как статических, так и динамических задач [3, 4]. Этим методом решена смешанная трехмерная динамическая задача для ортотропной пластинки с учетом внутреннего трения [5].

1. Постановка задачи, основные уравнения и соотношения

Имеем ортотропное тело, которое находится в условиях плоской деформации и занимает область $D=\left\{(x,y): 0 \le \mathrm{x} \le l, -\mathrm{h} \le \mathrm{y} \le \mathrm{h}, \mathrm{h} << l\right\}$ (Фиг. 1)



Фиг. 1

Требуется найти в области D решение уравнений движения с учетом внутреннего трения:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}-K\frac{\partial u}{\partial t}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}-K\frac{\partial v}{\partial t}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{1}$$

при соотношениях упругости

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\beta_{11}\sigma_{xx}+\beta_{12}\sigma_{yy}; \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\beta_{12}\sigma_{xx}+\beta_{22}\sigma_{yy}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\beta_{66}\sigma_{xy}, \tag{2}$$

и граничных условиях:

$$\sigma_{xy}(x,h,t)=\sigma^{+}_{xy}(\xi)\cos\Omega t; \quad \sigma_{yy}(x,h,t)=-\sigma^{+}_{yy}(\xi)\cos\Omega t; \quad \xi=\frac{x}{l};$$

$$V\left(x,-h,t\right)=0;\quad \sigma_{xy}\left(x,-h,t\right)=0. \tag{3}$$

2. Решение сформулированной задачи

Для решения сформулированной задачи в уравнениях движения (1) и соотношениях упругости (2) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям:

$$\xi=\frac{x}{l};\quad \zeta=\frac{y}{h};\quad U=\frac{u}{l};\quad V=\frac{v}{l}. \tag{4}$$

Согласно (4), уравнения (1) и соотношения (2) примут вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial\zeta}-Kl^2\frac{\partial U}{\partial t}=\rho l^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2};\quad \varepsilon=\frac{h}{l};\\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial\zeta}-Kl^2\frac{\partial V}{\partial t}=\rho l^2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2};\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial U}{\partial\xi}=\beta_{11}\sigma_{xx}+\beta_{12}\sigma_{yy};\quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta}=\beta_{12}\sigma_{xx}+\beta_{22}\sigma_{yy};\\ \varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta}+\frac{\partial V}{\partial\xi}=\beta_{66}\sigma_{xy}.\end{gathered} \tag{6}$$

Решение задачи будем искать в виде:

$$\begin{gathered}\sigma_{\alpha\beta}\left(x,y,t\right)=\sigma_{jkI}\left(\xi,\zeta\right)\sin\Omega t+\sigma_{jkII}\left(\xi,\zeta\right)\cos\Omega t,\\ \alpha,\beta=x,y,\quad j,k=1,2;\\ U\left(x,y,t\right)=U_I\left(\xi,\zeta\right)\sin\Omega t+U_{II}\left(\xi,\zeta\right)\cos\Omega t,\quad \left(U,V\right).\end{gathered} \tag{7}$$

Подставив (7) в (5), (6) и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при $\sin\Omega t,\cos\Omega t$, получим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{11I}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12I}}{\partial\zeta}+Kl^2\Omega U_{II}=-\rho l^2\Omega^2 U_I;\\ \frac{\partial\sigma_{11II}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12II}}{\partial\zeta}-Kl^2\Omega U_I=-\rho l^2\Omega^2 U_{II};\\ \frac{\partial\sigma_{12I}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22I}}{\partial\zeta}+Kl^2\Omega V_{II}=-\rho l^2\Omega^2 V_I;\end{gathered} \tag{8}$$

$$\frac{\partial\sigma_{12II}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22II}}{\partial\zeta}-Kl^2\Omega V_I=-\rho l^2\Omega^2 V_{II};$$

$$\frac{\partial U_I}{\partial \xi} = \beta_{11}\sigma_{11I} + \beta_{12}\sigma_{22I}; \quad \frac{\partial U_{II}}{\partial \xi} = \beta_{11}\sigma_{11II} + \beta_{12}\sigma_{22II};$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial V_I}{\partial \zeta} = \beta_{12}\sigma_{11I} + \beta_{22}\sigma_{22I}; \quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial V_{II}}{\partial \zeta} = \beta_{12}\sigma_{11II} + \beta_{22}\sigma_{22II}; \tag{9}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial U_I}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_I}{\partial \xi} = \beta_{66}\sigma_{12I}; \quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial U_{II}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_{II}}{\partial \xi} = \beta_{66}\sigma_{12II}.$$

Решение (I) сингулярно возмущенной системы (8), (9) складывается из решений внешней задачи (I^{out}) и пограничного слоя (I^b).

Решение внешней задачи ищем в виде:

$$\begin{aligned} &\sigma_{ijk}^{out} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{ijk}^{(s)}(\xi,\zeta), \quad s = \overline{0,N}, \quad i,j = 1,2, \quad k = I, II; \\ &U_k^{out} = \varepsilon^{s}U_k^{(s)}(\xi,\zeta), \quad (U,V). \end{aligned} \tag{10}$$

Подставив (10) в (8), (9), для определения $\sigma_{ijk}^{(s)}, U_k^{(s)}, V_k^{(s)}$ получим систему:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{11I}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12I}^{(s)}}{\partial \zeta} + 2H\Omega U_{II}^{(s)} + \rho_1^2\Omega^2 U_I^{(s)} = 0, \quad 2H = Kh^2, \rho_1^2 = \rho h^2; \\ &\frac{\partial \sigma_{11II}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12II}^{(s)}}{\partial \zeta} - 2H\Omega U_I^{(s)} + \rho_1^2\Omega^2 U_{II}^{(s)} = 0; \\ &\frac{\partial \sigma_{12I}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22I}^{(s)}}{\partial \zeta} + 2H\Omega V_{II}^{(s)} + \rho_1^2\Omega^2 V_I^{(s)} = 0; \\ &\frac{\partial \sigma_{12II}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22II}^{(s)}}{\partial \zeta} - 2H\Omega V_I^{(s)} + \rho_1^2\Omega^2 V_{II}^{(s)} = 0; \\ &\frac{\partial U_I^{(s-1)}}{\partial \xi} = \beta_{11}\sigma_{11I}^{(s)} + \beta_{12}\sigma_{22I}^{(s)}; \quad \frac{\partial U_{II}^{(s-1)}}{\partial \xi} = \beta_{11}\sigma_{11II}^{(s)} + \beta_{12}\sigma_{22II}^{(s)}; \\ &\frac{\partial V_I^{(s)}}{\partial \zeta} = \beta_{12}\sigma_{11I}^{(s)} + \beta_{22}\sigma_{22I}^{(s)}; \quad \frac{\partial V_{II}^{(s)}}{\partial \zeta} = \beta_{12}\sigma_{11II}^{(s)} + \beta_{22}\sigma_{22II}^{(s)}; \\ &\frac{\partial U_I^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial \xi} = \beta_{66}\sigma_{12I}^{(s)}; \quad \frac{\partial U_{II}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_{II}^{(s-1)}}{\partial \xi} = \beta_{66}\sigma_{12II}^{(s)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Из (11) напряжения можно выразить через перемещения:

$$\sigma_{12\gamma}^{(s)} = \frac{1}{\beta_{66}}\left(\frac{\partial U_\gamma^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_\gamma^{(s-1)}}{\partial \xi}\right), \quad \gamma = I, II;$$

$$\sigma_{11\gamma}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left(-\beta_{12}\frac{\partial V_\gamma^{(s)}}{\partial \zeta} + \beta_{22}\frac{\partial U_\gamma^{(s-1)}}{\partial \xi}\right); \quad \Delta = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2; \tag{12}$$

$$\sigma_{22\gamma}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left(\beta_{11}\frac{\partial V_\gamma^{(s)}}{\partial \zeta} - \beta_{12}\frac{\partial U_\gamma^{(s-1)}}{\partial \xi}\right).$$

Подставив значения $\sigma_{12\gamma}^{(s)}$ в первые два уравнения (11), для определения $U_I^{(s)}$, $U_{II}^{(s)}$ получим уравнения:

$$\frac{1}{\beta_{66}}\frac{\partial^2 U_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_1^2\Omega^2 U_I^{(s)} + 2H\Omega U_{II}^{(s)} = R_{uI}^{(s-1)};$$

$$\frac{1}{\beta_{66}}\frac{\partial^2 U_{II}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_1^2\Omega^2 U_{II}^{(s)} - 2H\Omega U_I^{(s)} = R_{uII}^{(s-1)}; \tag{13}$$

$$R_{uI}^{(s-1)} = -\frac{\partial \sigma_{11I}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\beta_{66}}\frac{\partial^2 V_I^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}; \quad R_{uII}^{(s-1)} = -\frac{\partial \sigma_{11II}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\beta_{66}}\frac{\partial^2 V_{II}^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}.$$

В (13) исключив $U_{II}^{(s)}$, для определения $U_I^{(s)}$ получим уравнение

$$\frac{\partial^4 U_I^{(s)}}{\partial \zeta^4} + 2\rho_1^2\Omega^2\beta_{66}\frac{\partial^2 U_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \beta_{66}^2\Omega^2\left(\rho_1^4\Omega^2 + 4H^2\right)U_I^{(s)} = \beta_{66}^2\Psi_{1U}^{(s-1)}, \tag{14}$$

где $\Psi_{1U}^{(s-1)} = l_1 R_{uI}^{(s-1)} - l_2 R_{uII}^{(s-1)}$, операторы:

$$l_1 = \frac{1}{\beta_{66}}\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \rho_1^2\Omega^2, \qquad l_2 = 2H\Omega. \tag{15}$$

Решив характеристическое уравнение, соответствующее (14), получим четыре корня:

$$k_1 = \sqrt{\Omega\beta_{66}}\left(\alpha_1 + \alpha_2 i\right);\ k_2 = -k_1;\ k_3 = \sqrt{\Omega\beta_{66}}\left(-\alpha_1 + \alpha_2 i\right);\ k_4 = -k_3;$$

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}H}{\sqrt{\rho_1^2\Omega + \sqrt{\rho_1^4\Omega^2 + 4H^2}}}; \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{\rho_1^2\Omega + \sqrt{\rho_1^4\Omega^2 + 4H^2}}{2}}, \tag{16}$$

следовательно:

$$U_I^{(s)} = A_1^{(s)}\left(\xi\right)\varphi_1 + A_2^{(s)}\left(\xi\right)\varphi_2 + A_3^{(s)}\left(\xi\right)\varphi_3 + A_4^{(s)}\left(\xi\right)\varphi_4 + U_{Iч}^{(s-1)}, \qquad (17)$$

где

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = \cos\sqrt{\Omega\beta_{66}}\alpha_2\zeta ch\sqrt{\Omega\beta_{66}}\alpha_1\zeta; \quad \varphi_2 = \sin\sqrt{\Omega\beta_{66}}\alpha_2\zeta sh\sqrt{\Omega\beta_{66}}\alpha_1\zeta;\\
&\varphi_3 = \cos\sqrt{\Omega\beta_{66}}\alpha_2\zeta sh\sqrt{\Omega\beta_{66}}\alpha_1\zeta; \quad \varphi_4 = \sin\sqrt{\Omega\beta_{66}}\alpha_2\zeta ch\sqrt{\Omega\beta_{66}}\alpha_1\zeta.
\end{aligned} \qquad (18)$$

Из системы (13) $U_{II}^{(s)}$ выражается через $U_I^{(s)}$ по формуле

$$\begin{aligned}
U_{II}^{(s)} &= \frac{1}{l_2}\left(R_{uI}^{(s-1)} - l_1 U_I^{(s)}\right) = A_1^{(s)}\varphi_2 - A_2^{(s)}\varphi_1 + A_3^{(s)}\varphi_4 - A_4^{(s)}\varphi_3 +\\
&+\frac{1}{2H\Omega}\left(R_{uI}^{(s-1)} - \frac{1}{\beta_{66}}\frac{\partial^2 U_{Iч}^{(s-1)}}{\partial\zeta^2} - \rho_1^2\Omega^2 U_{Iч}^{(s-1)}\right).
\end{aligned} \qquad (19)$$

Подставив значение $\sigma_{22\gamma}^{(s)}$ в третье и четвертое уравнения системы (11), для определения $V_\gamma^{(s)}$ получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta_{11}}{\Delta}\frac{\partial^2 V_I^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \rho_1^2\Omega^2 V_I^{(s)} + 2H\Omega V_{II}^{(s)} = R_{vI}^{(s-1)};\\
&\frac{\beta_{11}}{\Delta}\frac{\partial^2 V_{II}^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \rho_1^2\Omega^2 V_{II}^{(s)} - 2H\Omega V_I^{(s)} = R_{vII}^{(s-1)};\\
&R_{vI}^{(s-1)} = \frac{\beta_{12}}{\Delta}\frac{\partial^2 U_I^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta} - \frac{\partial\sigma_{12I}^{(s-1)}}{\partial\xi}; \quad R_{vII}^{(s-1)} = \frac{\beta_{12}}{\Delta}\frac{\partial^2 U_{II}^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta} - \frac{\partial\sigma_{12II}^{(s-1)}}{\partial\xi}.
\end{aligned} \qquad (20)$$

В (20) исключив $V_{II}^{(s)}$, для определения $V_I^{(s)}$ получим уравнение

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^4 V_I^{(s)}}{\partial\zeta^4} + \frac{2\Delta\rho_1^2\Omega^2}{\beta_{11}}\frac{\partial^2 V_I^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \frac{\Delta^2\Omega^2\left(\rho_1^4\Omega^2 + 4H^2\right)}{\beta_{11}^2}V_I^{(s)} = \frac{\Delta^2}{\beta_{11}^2}\Psi_{1V}^{(s-1)};\\
&\Psi_{1V}^{(s-1)} = l_3 R_{vI}^{(s-1)} - l_2 R_{vII}^{(s-1)}, \quad l_3 = \frac{\beta_{11}}{\Delta}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + \rho_1^2\Omega^2.
\end{aligned} \qquad (21)$$

Корнями соответсвующего (21) характеристического уравнения являются:

$$n_1 = \sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\left(\alpha_1 + \alpha_2 i\right);\, n_2 = -n_1; \quad n_3 = \sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\left(-\alpha_1 + \alpha_2 i\right);\, n_4 = -n_3, \qquad (22)$$

следовательно:

$$V_I^{(s)} = B_1^{(s)}\psi_1 + B_2^{(s)}\psi_2 + B_3^{(s)}\psi_3 + B_4^{(s)}\psi_4 + V_{I\text{ч}}^{(s-1)},$$

$$\psi_1 = \cos\sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_2\zeta ch\sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_1\zeta; \quad \psi_2 = \sin\sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_2\zeta sh\sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_1\zeta; \qquad (23)$$

$$\psi_3 = \cos\sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_2\zeta sh\sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_1\zeta; \quad \psi_4 = \sin\sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_2\zeta ch\sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\beta_{11}}}\alpha_1\zeta.$$

Из системы (20), учитывая (23),

$$V_{II}^{(s)} = B_1^{(s)}\psi_2 - B_2^{(s)}\psi_1 + B_3^{(s)}\psi_4 - B_4^{(s)}\psi_3 +$$

$$+\frac{1}{2H\Omega}\left(R_{vI}^{(s-1)} - \frac{\beta_{11}}{\Delta}\frac{\partial^2 V_{I\text{ч}}^{(s-1)}}{\partial\zeta^2} - \rho_1^2\Omega^2 V_{I\text{ч}}^{(s-1)}\right). \qquad (24)$$

3. Определение неизвестных функций решения

Решения $U_\gamma^{(s)}, V_\gamma^{(s)}$ содержат пока неизвестные функции $A_i^{(s)}(\xi), B_i^{(s)}(\xi)$, которые однозначно определяются из граничных условий (3), которые, согласно (7), принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{12I}^{(s)}(\xi,1) = 0;\ \sigma_{12II}^{(s)}(\xi,1) = \sigma_{xy}^{+(s)}(\xi),\ \sigma_{xy}^{+(0)} = \varepsilon\sigma_{xy}^{+},\ \sigma_{xy}^{+(s)} = 0,\ s \neq 0;\\
&\sigma_{12I}^{(s)}(\xi,-1) = 0;\ \sigma_{12II}^{(s)}(\xi,-1) = 0;\\
&\sigma_{22I}^{(s)}(\xi,1) = 0;\ \sigma_{22II}^{(s)}(\xi,1) = -\sigma_{yy}^{+(s)}(\xi),\ \sigma_{yy}^{+(0)} = \varepsilon\sigma_{yy}^{+},\ \sigma_{yy}^{+(s)} = 0,\ s \neq 0;\\
&V_I^{(s)}(\xi,-1) = 0;\ V_{II}^{(s)}(\xi,-1) = 0.
\end{aligned} \qquad (25)$$

Удовлетворив условиям (25) относительно $\sigma_{12\gamma}^{(s)}$, получим систему:

$$
\begin{aligned}
&A_1^{(s)}N_1 + A_2^{(s)}N_2 + A_3^{(s)}N_3 + A_4^{(s)}N_4 = P_{1I}^{(s)};\\
&-A_1^{(s)}N_1 - A_2^{(s)}N_2 + A_3^{(s)}N_3 + A_4^{(s)}N_4 = P_{2I}^{(s)};\\
&A_1^{(s)}N_2 - A_2^{(s)}N_1 + A_3^{(s)}N_4 - A_4^{(s)}N_3 = P_{3I}^{(s)};\\
&-A_1^{(s)}N_2 + A_2^{(s)}N_1 + A_3^{(s)}N_4 - A_4^{(s)}N_3 = P_{4I}^{(s)},
\end{aligned}
\tag{26}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&N_1 = \alpha_1 a_2 - \alpha_2 a_1; \quad N_2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2; \quad N_3 = \alpha_1 a_4 - \alpha_2 a_3;\\
&N_4 = \alpha_1 a_3 + \alpha_2 a_4; \quad a_i = \varphi_i\left(\zeta = 1\right), \quad i = 1,2,3,4;\\
&P_{1I}^{(s)} = -\frac{1}{\sqrt{\Omega\beta_{66}}}\left(\frac{\partial U_{I\text{ч}}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)_{\zeta=1}; \quad P_{3I}^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{\Omega\beta_{66}}}\Bigg(\beta_{66}\sigma_{xy}^{+(s)} -\\
&-\frac{1}{2H\Omega}\left(\frac{\partial R_{uI}^{(s-1)}}{\partial\zeta} - \frac{1}{\beta_{66}}\frac{\partial^3 U_{I\text{ч}}^{(s-1)}}{\partial\zeta^3} - \rho_1^2\Omega^2\frac{\partial U_{I\text{ч}}^{(s-1)}}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=1} - \left(\frac{\partial V_{II}^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)_{\zeta=1}\Bigg);\\
&P_{4I}^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{\Omega\beta_{66}}}\Bigg(-\frac{1}{2H\Omega}\left(\frac{\partial R_{uI}^{(s-1)}}{\partial\zeta} - \frac{1}{\beta_{66}}\frac{\partial^3 U_{I\text{ч}}^{(s-1)}}{\partial\zeta^3} - \rho_1^2\Omega^2\frac{\partial U_{I\text{ч}}^{(s-1)}}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=-1} -\\
&-\left(\frac{\partial V_{II}^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)_{\zeta=-1}\Bigg); \quad P_{2I}^{(s)} = -\frac{1}{\sqrt{\Omega\beta_{66}}}\left(\frac{\partial U_{I\text{ч}}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)_{\zeta=-1}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Решением алгебраической системы (26) является:

$$
\begin{aligned}
&A_{1I}^{(s)} = \delta_1\left(N_1\left(P_{1I}^{(s)} - P_{2I}^{(s)}\right) + N_2\left(P_{3I}^{(s)} - P_{4I}^{(s)}\right)\right), \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{N_1^2 + N_2^2};\\
&A_{2I}^{(s)} = \delta_1\left(N_2\left(P_{1I}^{(s)} - P_{2I}^{(s)}\right) - N_1\left(P_{3I}^{(s)} - P_{4I}^{(s)}\right)\right);\\
&A_{3I}^{(s)} = \delta_2\left(N_3\left(P_{1I}^{(s)} + P_{2I}^{(s)}\right) + N_4\left(P_{3I}^{(s)} + P_{4I}^{(s)}\right)\right), \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{N_3^2 + N_4^2};\\
&A_{4I}^{(s)} = \left(N_4\left(P_{1I}^{(s)} + P_{2I}^{(s)}\right) - N_3\left(P_{3I}^{(s)} + P_{4I}^{(s)}\right)\right).
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Удовлетворив условиям (25) относительно $\sigma_{22\gamma}^{(s)}, V_\gamma^{(s)}$, получим систему:

$$
\begin{aligned}
&B_1^{(s)}M_1 + B_2^{(s)}M_2 + B_3^{(s)}M_3 + B_4^{(s)}M_4 = P_{1II}^{(s)};\\
&B_1^{(s)}b_4 + B_2^{(s)}b_3 - B_3^{(s)}b_2 - B_4^{(s)}b_1 = P_{2II}^{(s)};\\
&B_1^{(s)}M_2 - B_2^{(s)}M_1 + B_3^{(s)}M_4 - B_4^{(s)}M_3 = P_{3II}^{(s)};\\
&-B_2^{(s)}b_4 + B_1^{(s)}b_3 + B_4^{(s)}b_2 - B_3^{(s)}b_1 = P_{4II}^{(s)},
\end{aligned}
\tag{29}
$$

где

$$
M_1 = \alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1; \quad M_2 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2; \quad M_3 = \alpha_1 b_4 - \alpha_2 b_3;
$$

$$
M_4 = \alpha_1 b_3 + \alpha_2 b_4; \quad b_i = \psi_i\left(\zeta = 1\right), \quad i = 1, 2, 3, 4;
$$

$$
\begin{aligned}
&P_{1II}^{(s)} = -\frac{1}{\sqrt{\Delta\Omega\beta_{11}}}\left(\beta_{11}\frac{\partial V_{I\text{ч}}^{(s-1)}}{\partial\zeta} - \beta_{12}\frac{\partial U_I^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)_{\zeta=1};\\
&P_{2II}^{(s)} = -\left(V_{I\text{ч}}^{(s-1)}\right)_{\zeta=-1}; \quad P_{3II}^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta\Omega\beta_{11}}}\Bigg(-\Delta\sigma_{yy}^{+(s)} -
\end{aligned}
\tag{30}
$$

$$
-\frac{\beta_{11}}{2H\Omega}\left(\frac{\partial R_{\nu I}^{(s-1)}}{\partial\zeta} - \frac{\beta_{11}}{\Delta}\frac{\partial^3 V_{I\text{ч}}^{(s-1)}}{\partial\zeta^3} - \rho_1^2\Omega^2\frac{\partial V_{I\text{ч}}^{(s-1)}}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=1} + \left(\beta_{12}\frac{\partial U_{II}^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)_{\zeta=1}\Bigg);
$$

$$
P_{4II}^{(s)} = -\frac{1}{2H\Omega}\left(R_{\nu I}^{(s-1)} - \frac{\beta_{11}}{\Delta}\frac{\partial^2 V_{I\text{ч}}^{(s-1)}}{\partial\zeta^2} - \rho_1^2\Omega^2 V_{I\text{ч}}^{(s-1)}\right)_{\zeta=-1}.
$$

По формуле Крамера

$$
B_i^{(s)} = \frac{\Delta_i^{(s)}}{\Delta_1}; \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ d_{II} & c_{II} & -b_{II} & -a_{II} \\ M_2 & -M_1 & M_4 & -M_3 \\ -d_{II} & c_{II} & b_{II} & -a_{II} \end{vmatrix}; \quad P^{(s)} = \begin{vmatrix} P_{1II}^{(s)} \\ P_{2II}^{(s)} \\ P_{3II}^{(s)} \\ P_{4II}^{(s)} \end{vmatrix}, \tag{31}
$$

где $\Delta_i^{(s)}$ получается заменой i - того столбца Δ_1 столбцом $P^{(s)}$ свободных членов.

Имея значения функций $A_i^{(s)}, B_i^{(s)}$ по формулам (17), (19) определяются $U_I^{(s)}, U_{II}^{(s)}$, а по формулам (23), (24) - $V_I^{(s)}, V_{II}^{(s)}$. По формулам (12) определяются напряжения.

4. О математически точных решениях

Если входящие в граничные условия (3) функции $\sigma_{xy}^{+}(\xi), \sigma_{yy}^{+}(\xi)$ являются алгебраическими многочленами от ξ, итерационный процесс обрывается на определенном приближении, зависящем от степени многочлена. В результате, получаем математически точное решение во внешней задаче.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим случай, когда

$$\sigma_{xy}^{+} = \gamma_1 + \gamma_2\xi, \, \sigma_{yy}^{+} = \gamma_3 + \gamma_4\xi. \tag{32}$$

При $s = 0$, согласно формулам (17), (27), (28), (30), (31) имеем

$$\begin{aligned}
&P_{1I}^{(0)} = P_{2I}^{(0)} = P_{4I}^{(0)} = 0; \quad P_{3I}^{(0)} = \sqrt{\frac{\beta_{66}}{\Omega}}\varepsilon(\gamma_1 + \gamma_2\xi);\\
&P_{1II}^{(0)} = P_{2II}^{(0)} = P_{4II}^{(0)} = 0; \quad P_{3II}^{(0)} = -\sqrt{\frac{\Delta}{\Omega\beta_{11}}}\varepsilon\sigma_{yy}^{+};\\
&A_1^{(0)} = \frac{N_2}{\delta_1}\sqrt{\frac{\beta_{66}}{\Omega}}\varepsilon(\gamma_1 + \gamma_2\xi); \quad A_2^{(0)} = -\frac{N_1}{\delta_1}\sqrt{\frac{\beta_{66}}{\Omega}}\varepsilon(\gamma_1 + \gamma_2\xi);\\
&A_3^{(0)} = \frac{N_4}{\delta_2}\sqrt{\frac{\beta_{66}}{\Omega}}\varepsilon(\gamma_1 + \gamma_2\xi); \quad A_4^{(0)} = -\frac{N_3}{\delta_2}\sqrt{\frac{\beta_{66}}{\Omega}}\varepsilon(\gamma_1 + \gamma_2\xi);\\
&B_1^{(0)} = -\frac{\sqrt{\Delta}\varepsilon(\gamma_3 + \gamma_4\xi)}{\sqrt{\Omega\beta_{11}}\Delta_1}M_1^3; \quad B_2^{(0)} = \frac{\sqrt{\Delta}\varepsilon(\gamma_3 + \gamma_4\xi)}{\sqrt{\Omega\beta_{11}}\Delta_1}M_2^3;\\
&B_3^{(0)} = -\frac{\sqrt{\Delta}\varepsilon(\gamma_3 + \gamma_4\xi)}{\sqrt{\Omega\beta_{11}}\Delta_1}M_3^3; \quad B_4^{(0)} = \frac{\sqrt{\Delta}\varepsilon(\gamma_3 + \gamma_4\xi)}{\sqrt{\Omega\beta_{11}}\Delta_1}M_4^3,
\end{aligned} \tag{33}$$

где M_i^j является минором элемента, стоящего на пересечении i - того столбца и j - той строки определителя Δ_1.

Аналогичным образом вычисляются данные для $s = 1$ (в силу объемистости, их значения не приводим), а все величины при $s \geq 2$ тождественно равны нулю, т. е. итерация обрывается на приближении $s = 1$, следовательно имеем математически точное решение:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ijk}^{out} = \varepsilon^{-1}\sigma_{ijk}^{(0)} + \sigma_{ijk}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2, \quad k = I, II;\\
&U_k^{out} = U_k^{(0)} + \varepsilon U_k^{(1)}, \quad (U, V).
\end{aligned} \tag{34}$$

Найденное в работе решение внешней задачи (I^{out}), как правило, не будет удовлетворять условиям на торцевых сечениях полосы $x = 0, l$. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя (I^{b}). Это решение можно построить автономно и срастить его с решением внешней задачи, описанном в [4] способом. Как показано в [4], решение пограничного слоя, при удалении от торцов во внутрь полосы, убывает экспоненциально.

Заключение. Найдено решение внешней задачи плоской деформации ортотропной полосы при наличии в ней внутреннего трения. Полоса лежит на жесткой подстилке, на верхнюю кромку полосы действуют нормальные и тангенциальные нагрузки, гармонически изменяющиеся во времени. Если эти нагрузки зависят от продольной координаты полиномиально, итерация обрывается, в результате получаем математически точное решение во внешней задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко Я.Г. Внутренее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз. 1960. 193с.
2. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела // Межвуз. сб. Механика. Изд-во ЕГУ. 1982. Вып. 2. С. 7-12.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория деформируемых тонкостенных систем. // В сб. Механика. 2009: Труды межд. школы – конференции молодых ученых. Ереван. Изд-во ЕГУАС, 2009. С. 5-35.
4. Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore. London. World Scientific. 2015. 376p.
5. Агаловян Л.А., Саргсян М.З. К решению трехмерной смешанной динамической задачи о вынужденных колебаниях ортотропной пластины с учетом внутреннего вязкого трения. // Доклады. Изд-во “Гитутюн” НАН РА. Т.110. №2. 2010. С. 163-170.

Сведения об авторах

Агаловян Ленсер Абгарович – академик НАН РА, доктор физ.-мат. наук, зав. отделом «Механика тонкостенных систем» Института механики НАН РА
Тел.: (+37410) 529630
E-mail: lagal@sci.am

Япуджян Варужан Тигранович – аспирант, млад. науч. сотр. Института механики НАН РА
Тел.: (+37444) 990250
E-mail: varujan.yapujyan@mail.ru

Поступила в редакцию 14 ноября 2022