ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №3, 2022 Механика
УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2022.75.3-64

СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР УДЛИНЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С ОДНИМ СВОБОДНЫМ КРАЕМ, РАСТЯНУТОЙ ПО ПОТОКУ ГАЗА

Мартиросян С. Р.

Ключевые слова: удлинённая прямоугольная пластинка, растягивающие силы, сверхзвуковое обтекание, аэроупругая устойчивость, аналитический метод решения

S.R. Martirosyan

Supersonic flutter of an elongated rectangular plate with one free edge stretched along a gas flow

Key words: rectangular elongated plate, tensile forces, supersonic overrunning, aeroelastic stability, analytical solution method

In the article, in a linear formulation, the influence of the initial stress state of an elongated rectangular elastic plate with one free edge, stretched along the gas flow, on the stability of the unperturbed motion of the "plate-flow" linear dynamic system is studied under the assumption that there are concentrated inertial masses on its free edge and moments. An analytical solution of the problem of stability of a dynamical system is obtained.
The stabilizing effect of tensile forces on the system is shown.

Ս.Ռ.Մարտիրոսյան

Շրջհոսման ուղղությամբ ձգված երկարաձիգ ուղղանկյուն սալի գերձայնային ֆլատերի մասին

Հիմնաբառեր՝ երկարաձիգ ուղղանկյուն սալ, առաձգական կայունություն, գերձայնային շրջհոսում, ձգող ուժեր, անալիտիկ լուծման եղանակ

Գծային դրվածքով ուսումնասիրված է շրջհոսման ուղղությամբ ձգված մեկ ազատ եզրով երկարաձիգ ուղղանկյուն սալի նախնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը «սալ–հոսք» գծային դինամիկ համակարգի չգրգռված շարժման կայունության վրա: Ենթադրվում է, որ սալի ազատ եզրին տեղակայված են կենտրոնացած իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ: Ստացված է դինամիկ համակարգի կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: Ցույց է տրված ձգող ուժերի կայունացնող ազդեցությունը:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначального напряжённого состояния удлинённой прямоугольной упругой пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа, на устойчивость невозмущённого движения линейной динамической системы «пластинка-поток» в предположении, что на её свободном крае имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты. Получено аналитическое решение задачи устойчивости динамической системы. Показано стабилизирующее действие растягивающих сил на систему.

Введение. Исследованию задач аэроупругой устойчивости посвящено большое количество работ, обзор которых, в частности, содержится в монографиях [1–3]. Теоретические исследования этих задач позволяют выявить различные виды потери устойчивости, обусловленные характером деформаций, а также, дать оценку влияния комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им.

В предлагаемой статье исследуется влияние первоначального напряжённого состояния на устойчивость динамической системы «пластинка–поток» удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями, растянутой по потоку газа, набегающим на её свободный край, в предположении, что на свободном крае приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты.

Получено аналитическое решение задачи устойчивости с помощью алгоритма, подробно изложенного в работе [8].

Показано, что невозмущённое движение системы «пластинка–поток» теряет устойчивость в виде дивергенции панели (эйлеровой и не эйлеровой) и в виде панельного флаттера. Определены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости [7].

Дана эффективная оценка влияния первоначальных растягивающих сил на повышение устойчивости системы.

Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая достаточно удлинённая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$, $ab^{-1} \le 0.193$. Декартовая система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край $x=0$ пластинки свободен, а края $x=a$, $y=0$ и $y=b$ закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x=0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 8].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию растягивающих сил $N_x = 2h\sigma_x$, равномерно распределённых по краям $x=0$ и $x=a$ пластинки, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; растягивающие усилия σ_x предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели, и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y, t)$ [1, 2, 4].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$ «поршневой теории», где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [5]. При этом предполагается, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp, растягивающими усилиями σ_x в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c, приложенными вдоль её свободного края $x = 0$, в предположении, что усилия σ_x малы по сравнению с предельным значением $(\sigma_x)_{pr.}$, которое не превосходит нижнюю границу текучести; $(\sigma_x)_{pr.}$ – усилие, начиная с которого имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [6].

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности растянутой прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» будет описываться соотношением [1, 2]:

$$D\Delta^2 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \; w = w\left(x, y, t\right); \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [2]:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \tag{1.2}$$

$$D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - N_x \frac{\partial w}{\partial x} = -m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ при } x = 0;$$

$$w = 0, \; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = a; \tag{1.3}$$

$$w = 0, \; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b; \tag{1.4}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}),\ M_0 = \sqrt{2},\ M_{2\cos m.} \approx 33.85; \tag{1.5}$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) в предположении, что

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{pr.} \tag{1.6}$$

Здесь, M_0 и $M_{2\cos m.}$ – граничные значения числа Маха M, соответствующие интервалу допустимых значений сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]. Анализ устойчивости невозмущённого движения динамической системы "пластинка–поток" (1.1) – (1.4) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) – (1.4) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале скоростей потока газа (1.5) при условии (1.6).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.4) будем исследовать в случае достаточно удлинённых прямоугольных пластин [8]:

$$\gamma = ab^{-1} \le 0.193, \tag{1.7}$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b.

Замечание 1. В работе, с целью получения возможности аналитического исследования рассматриваемой задачи устойчивости системы «пластинка–поток», в дифференциальном уравнении (1.1) интенсивность распределённой массы пластинки $m\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ условно заменена интенсивностями $m_c\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ и $I_c\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}$, учитываемых в граничных условиях (1.2), соответственно, приложенных вдоль свободного края пластинки $x = 0$ сосредоточенных масс m_c и моментов поворота I_c [1, 2, 8].

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.4). Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости невозмущённого движения динамической системы (1.1) – (1.4) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y),\ \mu_n = \pi n b^{-1}, \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое движение системы (1.1) – (1.4) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\operatorname{Re}\lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\operatorname{Re}\lambda > 0$). Критическая скорость V_{cr} потока газа, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\operatorname{Re}\lambda = 0$) [1, 2].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток»:

$$r^4 - 2\cdot(1+\beta_x^2)\cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + 1 = 0\,, \tag{2.2}$$

где α_n^3 – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3}\ ; \tag{2.3}$$

β_x^2 – коэффициент напряжения, характеризующий консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2\cdot N_x\, D^{-1}\mu_n^{-2} = h\sigma_x D^{-1}\mu_n^{-2}\,, \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr.}\,; \tag{2.4}$$

$(\beta_x^2)_{pr}$ – значение коэффициента напряжения β_x^2, соответствующее $(\sigma_x)_{pr.}$.

Ясно, что

$$\alpha_н^3 \in (a_0^2\rho_0 M_0 D^{-1}\mu_n^{-3},\ a_0^2\rho_0 M_{2\cos m.} D^{-1}\mu_n^{-3})\,, \tag{2.5}$$

в силу условия (1.5) и обозначения (2.3).

Характеристическое уравнение (2.2) подробно исследовано в работе [9].

В соответствии с известным решением Феррари, уравнение (2.2) можно представить в виде произведения двух квадратных трёхчленов:

$$\left(r^2 + \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot r + q - \sqrt{q^2-1}\right)\left(r^2 - \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot r + q + \sqrt{q^2-1}\right) = 0\,, \tag{2.6}$$

где q – единственный действительный корень кубического уравнения

$$8\cdot(q+1+\beta_x^2)(q^2-1) - \alpha_n^6 = 0\,,\ q\in R \tag{2.7}$$

параметр, характеризующий скорость потока газа V в соответствии с обозначением (2.3).

Как показано в работе [9]

$$q \in \left(q_0,\ q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right),\ q_0 = \left(-(\beta_x^2+1) + 2\sqrt{(\beta_x^2+1)^2+3}\right)\Big/3 \text{ (табл. 1)} \tag{2.8}$$

для всех $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr}$.

Таблица 1.

β_x^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	2.0	5.0	10.0
q_0	1	1.010	1.027	1.065	1.097	1.309	2.163	3.757

При значениях (2.8) характеристическое уравнение (2.2) имеет два отрицательных $r_1 < 0$, $r_2 < 0$ и пару комплексно сопряжённых $r_{3,4}\in W$ корней, являющихся решением квадратных уравнений – приравнённых к нулю сомножителей уравнения (2.6) [9]:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1-\beta_x^2)}\,,\ r_1<0\,,\ r_2<0\,; \tag{2.9}$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1-\beta_x^2)}\ . \tag{2.10}$$

Тогда, в соответствии с выражениями (2.9) и (2.10), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда:

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4}C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y)\,. \qquad (2.11)$$

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.7), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток» [9]:

$$V(q)=2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}\pi^3 n^3\gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}\,,\ \gamma\in\left(0,0.193\right]. \qquad (2.12)$$

Эта формула позволяет по известному значению параметра $q=q\left(n,\gamma,\beta_x^2,\nu\right)$ определить приведённую скорость потока газа $V\left(q\right)\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$.

В силу условия (1.5), из выражения (2.12) следует, что

$$V\left(q\right)\in\left(V\left(q_0\right),\,a_0\,M_{2cos\,m.}\right)\subseteq\left(a_0M_0,\,a_0\,M_{2cos\,m.}\right),\ \text{когда}\ V\left(q_0\right)\geq a_0M_0\,; \qquad (2.13)$$

и

$$V\left(q\right)\in\left(a_0M_0,\,a_0\,M_{2cos\,m.}\right),\ \text{когда}\ V\left(q_0\right)< a_0M_0\,. \qquad (2.14)$$

Согласно формуле цилиндрической жёсткости $D=\dfrac{E\cdot(2h)^3}{12\cdot(1-\nu^2)}$ соотношения (2.13) и (2.14) для приведённой скорости $V\left(q,n,\gamma,\beta_x^2,\nu\right)\cdot D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ запишутся, соответственно, в виде:

$$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)\in(V(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)\,,$$

$$a_0M_{2\cos m}\Psi)\subseteq(a_0M_0,a_0M_{2\cos m.})\Psi\,; \qquad (2.15)$$

$$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)\in(a_0M_0,\ a_0M_{2\cos m})\Psi\,, \qquad (2.16)$$

где

$$\Psi=12(1-\nu^2)a_0\rho_0E^{-1}(2ha^{-1})^{-3}\,,\ M_0=\sqrt{2}\,,\ M_{2\cos m.}\approx 33.85\,. \qquad (2.17)$$

Подставляя значения относительной толщины пластинки $2ha^{-1}\in\left[0.006,\,0.015\right]$ в выражения (2.15) – (2.17), получаем $d\left(2ha^{-1},\nu\right)=(a_0M_0,\ a_0M_{2\cos m})\Psi$ – соответствующие интервалы допустимых значений приведённой скорости $VD^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ потока, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5), приведённые в таблице 2 для стальных пластинок.

Таблица 2.

V / $2ha^{-1}$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.81, 1311.78)	(52.03, 1245.27)	(50.52, 1208.98)	(47.70, 1141.58)	(41.63, 996.35)
0.010	(11.84, 283.45)	(11.24, 269.09)	(10.91, 261.25)	(10.30, 246.70)	(8.99, 215.32)
0.012	(6.85, 164.01)	(6.50, 155.72)	(6.32, 151.20)	(5.96, 142.69)	(5.20, 124.60)
0.015	(3.51, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23, 77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

3. Достаточные признаки потери устойчивости невозмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4). Перейдем к описанию дисперсионных уравнений – достаточных признаков потери устойчивости возмущённого движения системы (1.1) – (1.4).

3.1. Растянутые удлинённые пластинки $\left(\gamma \in \left(0, 0.193\right]\right)$**.** Подставляя общее решение (2.11) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.9) и (2.10), в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель, описывается соотношением, представляющим биквадратное уравнение относительно собственного значения λ:

$$\chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + \left(\chi_n A_1 + \delta_n A_2\right)\lambda^2 + A_3 = 0 \ , \qquad (3.1)$$

где

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}, \ \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1}, \ \delta_n > 0, \ \chi_n > 0, \qquad (3.2)$$

приведённые значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки;

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2) = \quad (3.3)$$

$$= \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\left(1 - \exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot \pi n\gamma\right) B_1 B_2 -$$

$$-2B_2\left(q+1+\beta_x^2+\sqrt{q^2-1}\right)\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma) sh(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2) -$$

$$-2B_1\left(q+1+\beta_x^2-\sqrt{q^2-1}\right)\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma) ch(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2) \ ;$$

$$A_1 = A_1(q, n, \gamma, \beta_x^2) = \quad (3.4)$$

$$= 2(q+1+\beta_x^2)\Big[(q-\sqrt{q^2-1})+(q+\sqrt{q^2-1})\exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma\Big]B_1B_2+$$
$$+2B_2\Big[\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}\cdot\Big(q+1+\beta_x^2+\sqrt{(q^2-1}\Big)sh(\pi n\gamma B_1)+$$
$$+2B_1((2q-1)(q+1)+q\beta_x^2)\,ch(\pi n\gamma B_1)\Big]\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)+$$
$$+2\Big[B_1\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}\Big(q+1+\beta_x^2-\sqrt{q^2-1}\Big)ch(\pi n\gamma B_1)+$$
$$+(q+1+\beta_x^2)(q-1+q\beta_x^2)sh(\pi n\gamma B_1)\Big]\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)\,;$$
$$A_2 = A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2) = \quad (3.5)$$
$$= 2(q+1+\beta_x^2)\Big(1+\exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)\Big)B_1B_2-$$
$$-4(q+1+\beta_x^2)B_1B_2ch(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)+$$
$$+2(3(q^2-1)-2\beta_x^2-\beta_x^4)sh(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)\,;$$
$$A_3 = A_3(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2) = \quad (3.6)$$
$$= \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\Big\{\Big(q+1-\sqrt{q^2-1}\Big)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2+$$
$$+2\beta_x^2\Big(q-\sqrt{q^2-1}\Big)\Big\}B_1B_2-\sqrt{2\big(q+1+\beta_x^2\big)}\Big\{\Big(q+1+\sqrt{q^2-1}\Big)^2-2(q+1)\nu-$$
$$-(1-\nu)^2+2\beta_x^2\Big(q+\sqrt{q^2-1}\Big)\Big\}B_1B_2\ \exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma+$$
$$+\ 2B_2\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)\Big\{\Big[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1}-$$
$$-(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)+(2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1}+2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2-$$
$$-2((2q-1)(\mathrm{q}+1)-q\sqrt{q^2-1}+q\beta_x^2)\nu+\ (\mathrm{q}+1+\beta_x^2+\sqrt{q^2-1})\,\nu^2\Big]sh(\pi n\gamma B_1)+$$
$$+2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}(q+1+\beta_x^2)\,B_1ch\big(\pi n\gamma B_1\big)\Big\}\cdot\cos(\pi n\gamma B_2)+$$
$$+2\exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma)\Big\{-B_1\Big[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1}+$$
$$+(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)-(2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1}+2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2+$$
$$+\ 2((2q-1)(\mathrm{q}+1)+q\sqrt{q^2-1}+q\beta_x^2)\nu-(\mathrm{q}+1+\beta_x^2-\sqrt{q^2-1})\,\nu^2\Big]ch(\pi n\gamma B_1)-$$
$$-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)\big(q^2-1\big)}\,(3(q^2-1)-2\beta_x^2-\beta_x^4)\cdot sh\big(\pi n\gamma B_1\big)\Big\}\sin\big(\pi n\gamma B_2\big);$$
$$B_1 = \sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1-\beta_x^2)},\ \ B_2 = \sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1-\beta_x^2)}.\quad (3.7)$$

Легко показать, что при допустимых значениях параметра $q = q(V)$ (2.8) и коэффициента напряжения $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr}$.

$B_1 = B_1(q, \beta_x^2) > 0$, $B_2 = B_2(q, \beta_x^2) > 0$, (3.8) откуда следует справедливость неравенств

$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2) > 0$, $A_2 = A_2(q, n, \gamma, \beta_x^2) > 0$, $n \geq 1$, $\gamma \in (0, 0.193]$. (3.9)

Вводя обозначение

$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1} = I_c (\pi n \gamma)^2 \cdot (m_c a^2)^{-1}$, (3.10)

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.9), перепишется в виде

$\lambda^4 + (k_n A_1 + A_2)\chi_n^{-1} A_0^{-1} \lambda^2 + \chi_n^{-1} \delta_n^{-1} A_0^{-1} A_3 = 0$, $\delta_n > 0$, $\chi_n > 0$, $k_n > 0$. (3.11)

В соответствии с обозначением (1.7), значению $\gamma = 0$ соответствует бесконечно удлинённая пластинка – предельный случай исходной задачи устойчивости удлинённых прямоугольных пластинок.

3.2. Растянутая бесконечно удлинённая панель ($\gamma = 0$). Дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности растянутой бесконечно удлинённой пластинки может быть получено из (1.1) путём предельного перехода $b \to \infty$. Тогда, вводя величину $\xi = x a^{-1}$, уравнения исходной задачи (1.1) – (1.4) запишутся в виде:

$$D \frac{\partial^4 w_1}{\partial \xi^4} - (N_x a^2) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} + (a_0 \rho_0 a^3 V) \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0, \; w_1 = w_1(\xi, t); \quad (3.12)$$

$$D \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = (I_c a) \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi \cdot \partial t^2}; \; D \frac{\partial^3 w_1}{\partial \xi^3} - (N_x a^2) \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = -(m_c a^3) \frac{\partial w_1}{\partial t^2}, \; \xi = 0; \quad (3.13)$$

$$w_1 = 0, \; \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = 0, \; \xi = 1. \quad (3.14)$$

Решение уравнения (3.12) будем искать в форме

$$w_1(\xi, t) = C e^{(r\xi + \lambda t)}. \quad (3.15)$$

Подставляя решение (3.15) в дифференциальное уравнение (3.12), получаем характеристическое уравнение в виде

$$r^4 - 2\beta_\xi^2 r^2 + s_1^3 r = 0, \quad \beta_\xi^2 = 2h\sigma_x a^2 D^{-1}, \quad s_1^3 = V D^{-1} (a_0 \rho_0 a^3). \quad (3.16)$$

Корни r_k характеристического уравнения (3.16) определяются выражениями [9]

$$r_1 = -\sqrt{2(q_\xi + \beta_\xi^2)}, \; r_2 = 0, \; r_{3,4} = \sqrt{0.5(q_\xi + \beta_\xi^2)} \pm i \sqrt{0.5(3q_\xi - \beta_\xi^2)}; \quad (3.17)$$

$$r_1 < 0, \; r_{3,4} \in W \text{ при всех } q_\xi \in \left((q_\xi)_0, q_\xi(a_0 M_{2\cos m}) \right), \; (q_\xi)_0 > \frac{\beta_\xi^2}{3}. \quad (3.18)$$

Здесь q_ξ – единственный действительный корень кубического уравнения [17]

$$8q_\xi^2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)-s_1^6=0. \tag{3.19}$$

Отсюда, в соответствии с обозначением (3.16), получаем формулу

$$VD^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)=2\sqrt{2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}\cdot q_\xi, \tag{3.20}$$

связывающую скорость потока газа V с остальными параметрами системы.

Согласно вышеизложенному общее решение (3.15) дифференциального уравнения (3.12) запишется в виде

$$w_1(\xi,\, t)=\sum_{k=1}^{4}C_k\exp\left(r_k\,\xi+\lambda\,t\right), \tag{3.21}$$

C_k – произвольные постоянные; r_k – корни характеристического уравнения (3.16), определяемые выражениями (3.17).

Подставляя обшее решение (3.21) в граничные условия (3.13) и (3.14), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_k. Приравненный нулю определитель этой системы – характеристический определитель будет описываться в виде биквадратного уравнением, подобному (3.1):

$$\chi_\xi\cdot\delta_\xi\cdot\tilde{A}_0\lambda^4+\left(\chi_\xi\cdot\tilde{A}_1+\delta_\xi\cdot\tilde{A}_2\right)\lambda^2+\tilde{A}_3=0; \tag{3.22}$$

$$\delta_\xi=m_cD^{-1}a^3,\ \chi_\xi=I_cD^{-1}a,\ \delta_\xi>0,\ \chi_\xi>0\ – \tag{3.23}$$

приведённые значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края $x=0$ бесконечно удлинённой пластинки;

$$\tilde{A}_0=\tilde{A}_0(q_\xi,\beta_\xi^2)=2\sqrt{2\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\cdot \tag{3.24}$$

$$\left(\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)sh\sqrt{2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}-\left(2q_\xi+\beta_\xi^2\right)sh\sqrt{0.5\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}\cos\sqrt{0,5\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\right)-$$

$$-2\beta_\xi^2\sqrt{2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}\cdot ch\sqrt{0.5\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}\cdot\sin\sqrt{0.5\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)};$$

$$\tilde{A}_1=\tilde{A}_1(q_\xi,\beta_\xi^2)=4q_\xi\sqrt{\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\cdot$$

$$\left(\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)e^{-\sqrt{2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}}+\left(2q_\xi+\beta_\xi^2\right)e^{\sqrt{0.5\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}}\cos\sqrt{0.5\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\right)+$$

$$+4q_\xi\beta_\xi^2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)e^{\sqrt{0.5\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}}\sin\sqrt{0.5\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)};$$

$$\tilde{A}_2=\tilde{A}_2(q_\xi,\beta_\xi^2)=4\sqrt{\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)^3\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\cdot$$

$$\cdot\left(ch\sqrt{2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}-ch\sqrt{0.5\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}\cos\sqrt{0,5\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\right)+$$

$$+\ 4\left(3q_\xi^2-\beta_\xi^4\right)sh\sqrt{0.5\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}\cdot\sin\sqrt{0,5\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\ ;$$

$$\tilde{A}_3=\tilde{A}_3(q_\xi,\beta_\xi^2)=4\cdot q_\xi\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)^2\cdot\sqrt{2\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\cdot$$

$$\left(-e^{-\sqrt{2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}}+e^{\sqrt{0.5\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}}\cos\sqrt{0.5\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\right)-$$

$$-\ 4\cdot q_\xi\left(3q_\xi^2-\beta_\xi^4\right)\sqrt{2\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}\cdot e^{\sqrt{0.5\left(q_\xi+\beta_\xi^2\right)}}\sin\sqrt{0,5\left(3q_\xi-\beta_\xi^2\right)}\,.$$

Легко показать, что $\tilde{A}_0=\tilde{A}_0(q_\xi,\beta_\xi^2)>0$ и $\tilde{A}_2=\tilde{A}_2(q_\xi,\beta_\xi^2)>0$ при всех допустимых значениях q_ξ и β_ξ^2. А тогда, дисперсионное уравнение (3.22) можно переписать в виде, подобному (3.11):

$$\lambda^4+(k_\xi\,\tilde{A}_1+\tilde{A}_2)\chi_\xi^{-1}\tilde{A}_0^{-1}\lambda^2+\chi_\xi^{-1}\delta_\xi^{-1}\tilde{A}_0^{-1}\tilde{A}_3=0\,,\,k_\xi=\chi_\xi\delta_\xi^{-1}=I_c\left(m_ca^2\right)^{-1}>0\,.\tag{3.25}$$

Следует заметить, что в отсутствии обтекания невозмущённое состояние равновесия растянутой как удлинённой прямоугольной пластинки, так и бесконечно удлинённой, является устойчивым при всех $\beta_x^2\neq0$ и $\beta_\xi^2\neq0$ соответственно [9].

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.4) сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристических определителей (3.11) и (3.25), определяющих собственные движения системы в пространстве «существенных» параметров, соответственно, $\Im=\left\{q(V),n,\gamma,\nu,\beta_x^2,k_n\right\}$ и $\Im_\xi=\left\{q_\xi(V),\beta_\xi^2,k_\xi\right\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическое поведение возмущённого движения. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Введём в рассмотрение в пространстве параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\Im_0$ и области неустойчивости: $\Im_1,\Im_2$ и $\Im_3$. В области $\Im_0$ все корни λ_k уравнения (3.11) находятся в левой части комплексной плоскости $(\mathrm{Re}\,\lambda_k<0)$; в областях $\Im_1,\Im_2$ и $\Im_3$, соответственно, либо среди корней λ_k имеется один положительный корень, либо имеются два положительных корня, либо имеется пара комплексно сопряжённых корней с положительной вещественной частью [7, 8].

Область устойчивости $\Im_0\in\Im$ будет определяться соотношениями:

$$k_nA_1+A_2>0\,,\ A_3>0\,,\ \Delta>0\,;\tag{4.1}$$

а области неустойчивости $\Im_l$, $l=\overline{1,3}$ – соотношениями:

$\Im_1$: $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 < 0$, $\Delta > 0$ и $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 < 0$, $\Delta > 0$; (4.2)

$\Im_2$: $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, $\Delta > 0$; (4.3)

$\Im_3$: $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, $\Delta < 0$ и $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, $\Delta < 0$. (4.4)

Здесь Δ – дискриминант биквадратного уравнения (3.11):

$$\Delta = \Delta(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4k_n A_0 A_3 . \quad (4.5)$$

Очевидно, что в области устойчивости $\Im_0$ уравнение (3.11) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$: прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния.

В области $\Im_1$ характеристический определитель (3.11) имеет два действительных корня $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ и два чисто мнимых $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$ (из двух собственных движений пластинки, соответствующих собственным значениям λ_1 и λ_2, одно затухает, а другое неограниченно отклоняется по экспоненциальному закону). В силу этого, прогибы пластинки будут возрастать во времени по экспоненциальному закону: в области $\Im_1$ имеет место эйлерова дивергенция панели.

В области $\Im_2$ уравнение (3.11) имеет четыре действительных корня $\lambda_k \in R$ – два отрицательных ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) и два положительных ($\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$): из четырёх собственных движений пластинки два затухают, а остальные два неограниченно отклоняются по экспоненциальному закону. Следовательно, система в области $\Im_2$, также, как и в области $\Im_1$, является статически неустойчивой: имеет место не эйлерова дивергенция панели, более ярко выраженная.

В области $\Im_3$, определяемой условиями (4.4), характеристическое уравнение (3.11) имеет, по крайней мере, два комплексно сопряжённых корня с положительной вещественной частью. Следовательно, невозмущённое состояние равновесия системы теряет динамическую устойчивость: имеет место панельный флаттер. Пластинка совершает флаттерные колебания. – автоколебания.

Границами области устойчивости $\Im_0$ системы в пространстве её параметров $\Im$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ являются гиперповерхности [8]:

$$A_3 = 0; \quad (4.6)$$

$$\Delta = 0. \quad (4.7)$$

Характеристическое уравнение (3.11) на гиперповерхности (4.6) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2, а на гиперповерхности (4.7) – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

На границе (4.6) области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ система «пластинка-поток» при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ теряет статическую устойчивость в виде дивергенции панели. Критические скорости дивергенции панели $\left\{V_{cr.div.}^{(1)}, V_{cr.div.}^{(2)}\right\}$, определяемые подстановкой, соответственно, первого $q_{cr.div}^{(1)}$ и третьего $q_{cr.div}^{(3)}$ корней уравнения (4.6) в формулу (2.12), разграничивают области $\Im_0$ и $\Im_1$. При скоростях $V \geq V_{cr.div.}$ потока газа происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера невозмущённого движения системы от устойчивости к статической неустойчивости в виде дивергенции панели. Это приводит к соответствующему изменению динамического поведения растянутой прямоугольной пластинки в потоке газа: в пластинке возникают дополнительные напряжения, приводящие к изменению её плоской формы равновесия: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания». Так как монотонное «выпучивание» пластинки не имеет колебательного характера, то может рассматриваться как квазистатический процесс – дивергенция.

Заметим, что уравнение (4.6) тождественно дисперсионному уравнению, полученному в работе [9] при исследовании задачи устойчивости обтекаемой растянутой панели в статической постановке по методу Эйлера.

Критические скорости не эйлеровой дивергенции $\left\{V_{1,2}\right\}$ разграничивают области $\Im_1$ и $\Im_2$: при скоростях потока газа $V \geq V_{1,2}$ происходит “мягкий” переход из области эйлеровой дивергенции $\Im_1$ в область не эйлеровой дивергенции $\Im_2$.

На границе (4.7) области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, а также, на границе (4.7) области не эйлеровой дивергентной неустойчивости $\Im_2$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, система при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl}$ теряет динамическую устойчивость в виде панельного флаттера. Критические скорости панельного флаттера $\left\{V_{cr.fl.}^{(1)}\right\}$, определяемые подстановкой первого корня $q_{cr.fl.}^{(1)}$ уравнения (4.7) в формулу (2.12), разграничивают области $\Im_0$ и $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, или области $\Im_2$ и $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, в зависимости от значений параметров системы $n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n$. В обоих случаях при значениях скоростей потока газа $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к флаттерным колебаниям. Однако, в первом случае начинает совершать флаттерные колебания относительно равновесного состояния плоская по форме пластинка, а во втором случае – «выпученная» (изогнутая) по форме пластинка. Тем самым, переходы ($\Im_0 \to \Im_3$) и ($\Im_2 \to \Im_3$) определяют «опасные границы» областей $\Im_0$ и $\Im_2$ [1, 7, 8].

Следует отметить, что критические скорости дивергенции панели $V_{cr.div.}$ и панельного флаттера $V_{cr.fl.}$ определяются по формуле (2.12) с достаточной точностью.

В случае бесконечно удлиненной пластинки $(\gamma = 0)$ разбиение пространства параметров $\Im_{\xi} = \{q_{\xi}(V), \beta_{\xi}^2, k_{\xi}\}$ на область устойчивости $\Im_0$ и области неустойчивости: $\Im_1, \Im_2$ и $\Im_3$ производится аналогичным способом. Критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера определяются с достаточной точностью подстановкой в формулу (3.20) соответствующих значений параметра q_{ξ} – решений уравнений $\tilde{A}_3(q_{\xi}, \beta_{\xi}^2) = 0$ и $\Delta_{\xi}\left(q_{\xi}, \beta_{\xi}^2, k_{\xi}\right) = 0$ соответственно. Здесь Δ_{ξ} – дискриминант биквадратного уравнения (3.25).

5. **Численные результаты**. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n)\} \in \Im$ и $\{q(\beta_{\xi}^2, k_{\xi})\} \in \Im_{\xi}$, параметризованных надлежащим образом в пространствах $\Im$ и $\Im_{\xi}$ соответственно.

Численные расчеты показали, что в случае удлинённых прямоугольных пластинок ($\gamma \in (0,\ 0.193]$) критические скорости $V_{cr.div}^{(1)}$, $V_{cr.div}^{(2)}$, $V_{1,2}$ и $V_{cr.fl.}$ являются возрастающими функциями от числа полуволн n: их наименьшему значению соответствует $n = 1$. При этом, критические скорости $V_{cr.div}^{(1)}$ и $V_{cr.div}^{(2)}$ являются слабо убывающими функциями от коэффициента Пуассона ν, в отличие от критических скоростей $V_{1,2}$ и $V_{cr.fl.}$, являющихся слабо возрастающими функциями от коэффициента Пуассона ν.

В таблицах 3 – 9 представлены численные результаты решения исходной задачи устойчивости системы «пластинка–поток» в случае удлинённых прямоугольных пластинок для значений $\gamma = 0.01; 0.1$ при $n = 1$, $\nu = 0.3$ и для бесконечно удлинённой пластинки $\gamma = 0$, характеризующие наиболее представительные случаи зависимости приведённых критических скоростей дивергенции и флаттера от «существенных» параметров системы.

Следует отметить, что качественные характеристики поведения возмущённого движения системы можно считать примерно одинаковыми для всех $\gamma \in [0,\ 0.193]$, в отличие от его количественных характеристик, существенно зависящих от параметра γ.

Для наглядной иллюстрации динамики состояния системы «пластинка – поток» в пространстве параметров $\Im$ составлены цепочки переходов из области $\Im_l \subset \Im$ в область $\Im_k \subset \Im$.

Следует отметить существенную зависимость форм представления цепочек от относительной толщины $2ha^{-1}$ и материала пластинок, основанную на сопоставлении значений соответствующих критических скоростей с данными таблицы 2.

В частности, цепочки переходов исходной системы для стальных пластинок относительной толщины $\left(2ha^{-1}\right)\in\left[0.006, 0.015\right]$ при всех $\gamma\in\left[0,\ 0.193\right]$ – одинаковы и имеют следующее представление:

$$\left(\Im_0\right)\xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}}\Im_1\xrightarrow{V_0}\Im_0\xrightarrow{V_{cr.fl}^{(1)}}\Im_3\xrightarrow{V_0^*}\Im_0\xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}}\Im_1 \qquad (5.1)$$

при $k_1\in\left(0, 0.1\right)$ и $k_\xi\in\left(0, 0.3\right)$;

$$\left(\Im_0\right)\xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}}\Im_1\xrightarrow{V_{1,2}}\Im_2\xrightarrow{V_{cr.fl}^{(1)}}\Im_3\xrightarrow{V_0^*}\Im_0\xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}}\Im_1 \qquad (5.2)$$

при $k_1\geq 0.1$ и $k_\xi\geq 0.3$;

где, в соответствии с (3.10) и (3.25), $k_1=I_c\pi^2\gamma^2\left(m_c a^2\right)^{-1}$ и $k_\xi=I_c\cdot\left(m_c a^2\right)^{-1}$.

Из представлений (5.1) и (5.2) видны следующие две особенности в поведении невозмущённого движения системы «пластинка–поток».

1) Символом $\left(\Im_0\right)$ обозначено состояние системы вблизи $a_0\sqrt{2}$, указывающее на двоякое поведение невозмущённого движения. При значениях $\beta_x^2<\left(\beta_x^2\right)_{\min}$ и $\beta_\xi^2<\left(\beta_\xi^2\right)_{\min}$, соответственно, для $\gamma\in\left(0, 0.193\right]$ и $\gamma=0$, невозмущённое движение системы неустойчиво вблизи $a_0\sqrt{2}$: имеет место эйлерова дивергенция. Начиная с значений $\left(\beta_x^2\right)_{\min}=\beta_x^2\left(\gamma,\ 2ha^{-1}\right)$ и $\left(\beta_\xi^2\right)_{\min}=\beta_\xi^2\left(2ha^{-1}\right)$ (табл. 3) невозмущённое движение системы становится устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$. Граничные значения $\left(\beta_x^2\right)_{\min}$ и $\left(\beta_\xi^2\right)_{\min}$ определяются из сопоставления значений $\left\{V_{cr.div.}^{(1)}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)\right\}$ с данными табл. 2. В соответствии с численными результатами зависимость $\left(\beta_x^2\right)_{\min}$ от коэффициента Пуассона исчезающе мала.

2) При малых значениях $k_1\in\left(0, 0.1\right)$ и $k_\xi\in\left(0, 0.3\right)$ имеет место переход $\Im_0\to\Im_3$, а при $k_1\geq 0.1$ и $k_\xi\geq 0.3$ – переход $\Im_2\to\Im_3$. При этом,

$$V_0\left(\gamma,\nu,\beta_x^2\right)=V_{1,2}\left(\gamma,\nu,\beta_x^2\right) \text{ при } \gamma\in\left(0, 0.193\right], \nu \text{ и } \beta_x^2\leq\left(\beta_x^2\right)_{pr.}; \qquad (5.3)$$

$$V_0\left(\beta_\xi^2\right)=V_{1,2}\left(\beta_\xi^2\right) \text{ при } \gamma=0 \text{ и всех } \beta_\xi^2\leq\left(\beta_\xi^2\right)_{pr.}. \qquad (5.4)$$

Таблица 3.

$2ha^{-1}$	0.006	0.01	0.012	0.015
$\left(\beta_x^2\right)_{\min}, \gamma = 0.1$	89.26	23.64	14.06	7.12
$\left(\beta_x^2\right)_{\min}, \gamma = 0.01$	8935.00	2380.00	1423.00	768.00
$\left(\beta_\xi^2\right)_{\min}, \gamma = 0$	8.95	2.395	1.452	0.78

Соответственно, при $k_1 \in (0, 0.1)$ и $k_\xi \in (0, 0.3)$ при скоростях потока $V \geq V_{cr.fl.}^{(1)}$ начинает совершать флаттерные колебания плоская пластинка, а при $k_1 \geq 0.1$ и $k_\xi \geq 0.3$ – «выпученная» (изогнутая) пластинка.

Таблица 4.

β_x^2 / $\gamma = 0.1$	0	1	5	10	30	50
$V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $k_1 \in (0, 0.1)$; $V_2 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $k_1 \geq 0.1$	76.893	78.544	83.468	89.588	114.012	138.565
$V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	–	–	–	4.499	14.031	25.041
$V_{cr.div}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	484.045	486.444	493.491	502.724	541.779	578.780

Таблица 5. Значения $V_{cr.fl.}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.1$.

β_x^2 / k_1	0	1.0	5.0	10.0	30.0	50.0
0.1	92.615	93.635	97.477	102.328	122.263	143.165
1.0	133.953	135.237	139.599	145.084	167.131	189.120
5.0	148.972	150.151	154.906	160.830	184.596	208.795
10.0	152.545	153.940	158.735	164.822	189.008	213.589

Таблица 6.

β_x^2 / $\gamma = 0.01$	0	100	500	1000	3000	5000
$V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $k_1 \in (0, 0.1)$; $V_2 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $k_1 \geq 0.1$	75.764	76.975	81.899	87.997	112.242	136.543
$V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	–	–	–	4.164	13.892	44.270
$V_{cr.div}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	484.898	486.844	494.430	504.312	543.439	581.761

Приведённые критические скорости $V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ и $V_{1,2} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma \in (0, 0.193]$ и $\gamma = 0$ определяются подстановкой второго корня $q = q_2$ уравнений $A_3\left(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2\right) = 0$ и $\tilde{A}_3\left(q_\xi, \beta_\xi^2\right) = 0$ соответственно, в формулы (2.12) и (3.20).

Таблица 7. Значения $V_{cr.fl.}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0.01$.

β_x^2 / k_1	0	100	500	1000	3000	5000
0.1	151.314	152.712	157.499	163.581	187.999	211.855
1.0	157.820	159.080	164.095	170.310	195.528	220.798
5.0	159.504	160.765	165.798	172.117	197.425	222.962
10.0	159.905	161.168	166.204	172.529	197.944	223.685

Таблица 8.

β_ξ^2 / $\gamma = 0$	0	0.1	0.5	1	2	3
$V_0 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $k_\xi \in (0, 0.3)$; $V_2 D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, $k_\xi \geq 0.3$	76.367	77.109	82.084	88.403	100.768	113.477
$V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	–	–	–	4.252	8.916	14.189
$V_{cr.div}^{(2)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$	485.828	487.321	495.429	505.530	524.849.	545.244.

Таблица 9. Значения $V_{cr.fl.}^{(1)} D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $\gamma = 0$.

β_ξ^2 / k_ξ	0	0.1	0.5	1	2	3
0.1	89.443	91.236	100.584	112.671	142.407	–
0.3	76.367	77.045	81.954	88.270	101.329	114.942
0.5	79.700	80.712	84.970	90.552	101.610	113.184
1.0	91.462	92.318	96.152	101.132	111.019	121.161
5.0	122.756	124.012	128.080	133.262	143.980	154.294
10.0	132.574	133.850	138.501	143.981	149.635	166.238

При скоростях потока $V \geq V_0$ при $k_1 \in (0, 0.1)$ (табл. 4 и 6) и при $k_\xi \in (0, 0.3)$ (табл.8) происходит переход из области эйлеровой дивергенции $\Im_1$ в область устойчивости $\Im_0$. Соответственно, при скоростях потока $V \geq V_{1,2}$, где $V_0 = V_{1,2}$, при $k_1 \geq 0.1$ (табл. 4 и 6) и при $k_\xi \geq 0.3$ (табл.8) происходит переход из области эйлеровой дивергенции $\Im_1$ в область не эйлеровой дивергенции $\Im_{1,2}$.

При дальнейшем увеличении скорости потока газа: при скоростях $V \geq V_{cr.fl.}^{(1)}$.происходит переход системы к автоколебаниям. В первом случае, при $k_1 \in (0, 0.1)$ (табл. 5 и 7) и при $k_\xi \in (0, 0.3)$ (табл.9) система из состояния покоя (плоская пластинка) переходит к автоколебаниям – к флаттерным колебаниям, а во втором случае, при $k_1 \geq 0.1$ (табл. 5 и 7) и при $k_\xi \geq 0.3$ (табл.9) – «выпученная» (изогнутая) пластинка начинает совершать флаттерные колебания.

Приведённые критические скорости дивергенции и флаттера (табл. 4–9) являются возрастающими функциями от коэффициента напряжения, соответственно, β_x^2 и β_ξ^2.

Тем самым, первоначальное напряжённое состояние, обусловленное растягивающими усилиями, направленными по потоку газа, оказывает стабилизирующее действие на невозмущённое движение системы: приводит к повышению устойчивости системы.

6. Основные результаты и заключение. В работе получено аналитическое решение задачи динамической устойчивости невозмущённого состояния равновесия растянутой упругой, как достаточно удлинённой прямоугольной пластинки, так и бесконечно удлинённой пластинки с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край, в предположении, что пластинка первоначально растянута по направлению потока газа.

Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка–поток» на область устойчивости и на области неустойчивости – области эйлеровой и не эйлеровой дивергенции панели и панельного флаттера.

Получена формула зависимости скорости потока газа от «существенных» параметров системы «пластинка–поток», позволяющая определить критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера.

Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Найдены «безопасные» и «опасные» границы области устойчивости. Найдено наименьшее значение коэффициента напряжения, начиная с которого невозмущённое движение системы становится устойчивым вблизи значения $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей.

Установлено, что при больших значениях интенсивности приложенных инерционных моментов поворота потеря устойчивости наступает при меньшей скорости потока, но это не эйлерова потеря устойчивости, а переход системы от покоя к движению – к автоколебаниям.

Показано, что критические скорости дивергенции и флаттера являются возрастающими функциями от коэффициента напряжения растягивающих сил. Тем самым, растягивающие силы, направленные по потоку газа, приводят к повышению устойчивости системы «пластинка–поток».

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем..– М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968.
5. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
6. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
7. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
8. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
9. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции растянутой панели при набегании сверхзвукового потока газа на ее свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 2, с.37–58.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890

E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 22.07.2022