

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К АНАЛИТИЧЕСКОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ
ЭКСТРУЗИИ ТРУБ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННЕГО ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

М.А. Маргарян

Ключевые слова: тонкостенная труба, экструзия, спеченный материал, пористость, аналитический метод, меридиональное и окружное напряжения.

One approach to the analytical solution of the problem of pipe extrusion in the presence of internal high pressure

M.A. Margaryan

Keywords: thin-walled pipe, extrusion, sintered material, porosity, analytical method, meridional and circumferential stresses.

Based on the assumption that external p_v and internal p_r pressures acting on the pipe are equal: the circumferential stress of the pipe is determined. Simplified plasticity condition is obtained and the stress-strain state of the pipe is investigated by the analytical method.

The problem of extrusion of pipes loaded with internal high pressure is firstly completely solved in the case of the presence of friction, and then by a fairly simplified method in the absence of friction. This is due to the fact that in the main case, in the denominator of the formula for determining the σ_m meridional stress, there is a coefficient, that takes into account friction, and in the case of $k = 0$ it is impossible to immediately determine the corresponding formula for the case in the absence of friction. To implement this process, the formula of the meridional stress was transformed to obtain an exponential function and its representation in the form of a series.

Dimensionless meridional, circumferential and average stresses are determined, depending on the degree of pipe deformation, which makes it possible to use the formulas of the deformation theory of plasticity of porous materials to study the process of compaction of the pipe material.

Numerical calculations are carried out in the MS EXCEL software environment for various coefficients of friction at 10% of the initial porosity of the material. To obtain a fully compacted material of a sintered pipe, the process of extrusion of the pipe with various dimensions is modeled in a corresponding conical die.

Ներքին բարձր ճնշումով բեռնավորված խողովակի արտամղման գործընթացի համալիր վերլուծական մեթոդով հետազոտման մի մոտեցման մասին
Մ.Ա. Մարգարյան

Հիմնաբառեր՝ բարակապատ խողովակ, արտամղում, եռակալված նյութ, ծակոտկենություն, վերլուծական մեթոդ, միջօրեական և շրջանային լարումներ:

Օգտագործելով խողովակի վրա ազդող արտաքին p_v և ներքին p_r ճնշումների հավասար լինելու ենթադրությունը որոշվում է խողովակի շրջանային լարումը, ստացվում է պարզեցված պլաստիկության պայման և վերլուծական մեթոդով հետազոտվում է դրա լարվածադեֆորմացիոն վիճակը:

Ներքին բարձր ճնշմամբ բեռնավորված խողովակի արտամղման խնդիրը սկզբում ամբողջապես լուծվել է շփման առկայության, իսկ այնուհետև, բավականին պարզ, շփման բացակայության դեպքերում, քանի որ հիմնական դեպքի σ_m միջօրեական լարման որոշման բանաձևի հայտարարում գտնվում է շփումը հաշվի առնող k գործակից և $k = 0$ դեպքում հնարավոր չէ անմիջապես ստանալ

շփման բացակայության դեպքի համապատասխան բանաձևը: Այդ գործընթացը իրականացնելու համար կատարվել է շփման առկայության դեպքի միջօրեական լարման σ_m բանաձևի ձևափոխմամբ էքսպոնենտային ֆունկցիայի ստացում և այն շարքի վերածում:

Որոշվել են խողովակի դեֆորմացման աստիճանից կախված միջօրեական, շրջանային և միջին լարումների չափագուրկ մեծությունները, դրանք հնարավորություն են տվել, օգտագործելով ծակոտկեն նյութերի պլաստիկության դեֆորմացիոն տեսության բանաձևերը ուսումնասիրել խողովակի նյութի խտացման գործընթացը:

Թվային հաշվարկները կատարվել են MS EXCEL ծրագրային միջավայրում տարբեր շփման գործակիցների և նյութի 10% սկզբնական ծակոտկենության դեպքերում: Ամբողջապես խտացված եռակալված խողովակի նյութի ստացման համար դրա տարբեր չափսերով նախապատրաստվածքի արտամղման գործընթացը մոդելավորվել է համապատասխան կոնական մամլամայրում:

Используя допущение равенства внешнего p_v и внутреннего p_r давлений, действующих на трубу, определяется окружное напряжение трубы, в результате чего получается упрощенное условие пластичности. Аналитическим методом исследуется напряженно-деформированное состояние (НДС) трубы.

Задача экструзии труб, нагруженных внутренним высоким давлением, сначала полностью решается при условии наличия трения, а потом достаточно упрощенным методом - при отсутствии трения. Это обусловлено тем, что в основном случае в знаменателе формулы для определения меридионального напряжения σ_m находится коэффициент k , учитывающий трение, и в случае $k = 0$, т.е. при отсутствии трения, невозможно непосредственно определить соответствующую формулу. Для осуществления этого процесса проведено преобразование формулы меридионального напряжения σ_m при условии наличия трения для получения экспоненциальной функции и представления ее в виде ряда.

Определены безразмерные меридиональные, окружные и средние напряжения в зависимости от степени деформирования трубы, что позволило с использованием уравнений деформационной теории пластичности пористых материалов (ДТПМ) при различных коэффициентах трения изучить процесс уплотнения ее материала.

Численные расчеты проводились в программной среде MS EXCEL для различных коэффициентов трения при 10% начальной пористости материала. Для получения полностью уплотненного материала спеченной трубы проведено моделирование процесса экструзии заготовки заданных размеров в соответствующей конической матрице.

Введение. Вопросам пластического деформирования труб в конических матрицах посвящено множество исследований [1-4] и др. Работы [1-3] посвящены исследованию процессов волочения, обжатия, протяжки и раздачи тонкостенных цилиндрических труб из сплошных материалов в случае отсутствия и наличия контактного трения и упрочнения, а работа [4] - процессу формования труб из сплошных и спеченных материалов, эксплуатируемых в условиях внутреннего давления p_r . При этом используются уравнения течения пористых материалов. В работе [5] проведено моделирование процесса экструзии пористых стержней в программной среде ABAQUS. Получены зоны распределения компонентов НДС и проведен их анализ. Выявлены некоторые особенности уплотнения материала трубы. В частности, установлено, что в направлении поперечных сечений пористость распределяется неравномерно, при этом большей частью уплотняются поверхностные слои. Несмотря на это, задачи экструзии спеченных труб и стержней изучены недостаточно, что связано прежде всего с их многопараметровостью, сложностью уравнений равновесия и условиями пластичности с учетом текущей пористости материала. Следовательно, работы в этом направлении актуальны.

Целью работы является аналитическое исследование напряженно-деформированного состояния процесса прессования в конической матрице тонкостенных спеченных труб, эксплуатируемых в условиях внутреннего давления.

Решение задачи упрощенным аналитическим методом. Для решения задачи воспользуемся системой уравнений (1) и (2), а также условием пластичности Мизеса (3), выражаемым главными напряжениями σ_1 , σ_2 и σ_3 , что является более точным для пластических материалов с учетом достаточно сложного объемного напряженного состояния:

$$\frac{d}{dr}(\sigma_m r) - \sigma_\theta + \frac{2p_m}{\sin 2\alpha} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta} = -\frac{p_v - p_r}{h} - \frac{p_v + p_r}{2\rho_\theta}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_T, \quad (3)$$

Здесь σ_m и σ_θ - меридиональные и окружные напряжения; p_v - давление матрицы на трубу в нормальном направлении; p_m - давление матрицы на трубу в меридиональном направлении; p_r - внутреннее давление на трубу; h - толщина трубы; ρ_θ - радиус кривизны сечения трубы конической поверхностью, перпендикулярной линии меридиана (образующая конуса $\rho_\theta = r/\cos\alpha$); r - текущий радиус окружности в перпендикулярном сечении по оси трубы (рис.1); α - угол между осью трубы и меридианом; σ_T - предел текучести материала.

Ввиду сложности задачи предположим, что давления p_v и p_r , действующие на трубу, равны, т.е. $p_v = p_r$. В этом случае из (2) получим

$$\sigma_\theta = -p_v = -p_r. \quad (4)$$

В случае прессования тонкостенной трубы главные напряжения примут вид

$$\sigma_1 = \sigma_m < 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_\theta = -p_v = -p_r < 0. \quad (5)$$

Исходя из этого, условие пластичности (3) примет следующий вид:

$$\sigma_\theta = \sigma_m - \sigma_T. \quad (6)$$

Решая уравнения равновесия (1) и (2), наряду с условием пластичности (6), получим формулы для определения компонентов НДС трубы в случае прессования в конической матрице.

Решение задачи при условии наличия трения ($f \neq 0$), т.е. в уравнении (1):
 $p_m = f p_v$.

В случае прессования тонкостенной трубы система уравнений примет вид

$$\begin{cases} r \frac{d\sigma_m}{dr} + \sigma_m - \sigma_\theta(1+k) = 0, \\ \sigma_\theta = \sigma_m - \sigma_T \end{cases} \quad (7)$$

где $k=2f/\sin 2\varphi$; φ - угол конусности матрицы.

Подставив значение σ_θ из условия пластичности (7) в уравнение равновесия, получим

$$r \frac{d\sigma_m}{dr} + \sigma_m - (1+k)(\sigma_m - \sigma_T) = 0. \quad (8)$$

Постепенно преобразуя уравнение (8):

$$r \frac{d\sigma_m}{dr} + \sigma_m - \sigma_m(1+k) + \sigma_T(1+k) = 0, r \frac{d\sigma_m}{dr} - \sigma_m k + \sigma_T(1+k) = 0,$$

$$d\sigma_m = (\sigma_m k - \sigma_T(1+k)) \frac{dr}{r},$$

$$\frac{d(\sigma_m k - \sigma_T(1+k))}{\sigma_m k - \sigma_T(1+k)} = k \frac{dr}{r} \quad (9)$$

и интегрируя (9), получим

$$\ln[\sigma_m k - (1+k)\sigma_T] = k \ln r + \ln C. \quad (10)$$

Для определения постоянной интегрирования C используем граничное условие случая прессования трубы, когда она выходит из матрицы ($r = r_1$) (рис. 1):

$$\text{при } r = r_1 \quad - \quad \sigma_m = 0 \quad (11)$$

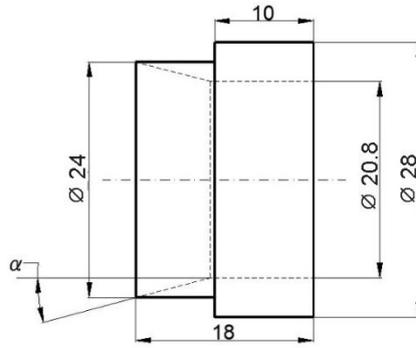


Рис. 1. Вид и размеры матрицы (мм)

В результате получим

$$\ln[-(1+k)\sigma_T] = \ln C r_1^k,$$

откуда сначала определяем константу C :

$$C = \frac{-(1+k)\sigma_T}{r_1^k}.$$

Подставив ее в уравнение (10), получим

$$\ln[\sigma_m k - (1+k)\sigma_T] = k \ln r + \ln \frac{-(1+k)\sigma_T}{r_1^k}. \quad (12)$$

Преобразуя (12), получим формулу для определения меридионального напряжения σ_m :

$$\ln[\sigma_m k - (1+k)\sigma_T] = \ln(-(1+k)\sigma_T) \left(\frac{r}{r_1}\right)^k, \quad \sigma_m k - (1+k)\sigma_T = -(1+k)\sigma_T \left(\frac{r}{r_1}\right)^k,$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_T(1+k)}{k} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^k\right]. \quad (13)$$

Решение задачи при отсутствии трения ($f = 0$). Заметим, что при условии отсутствия трения ($k = 0$) невозможно непосредственно из общей формулы (13) при наличии трения определить величину меридионального напряжения σ_m , так как коэффициент k находится в знаменателе σ_m .

Следовательно, для решения задачи при $k = 0$ необходимо использовать систему уравнений (7). Тогда имеем

$$r \frac{d\sigma_m}{dr} + \sigma_T = 0. \quad (14)$$

Преобразуя (14), получим

$$d\bar{\sigma}_m = -\frac{dr}{r}, \quad (15)$$

где $\bar{\sigma}_m$ – безразмерное меридиональное напряжение:

$$\bar{\sigma}_m = \frac{\sigma_m}{\sigma_T}. \quad (16)$$

Интегрируя (15):

$$\bar{\sigma}_m = -\ln r + \ln C \quad (17)$$

и используя граничное условие (11), получим

$$C = r_1. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), получим формулу для определения $\bar{\sigma}_m$:

$$\bar{\sigma}_m = \ln\left(\frac{r_1}{r}\right). \quad (19)$$

Таким образом, для полного решения задачи получаем следующие формулы для определения безразмерного меридионального напряжения $\bar{\sigma}_m$ при условии отсутствия и наличия трения:

$$\begin{cases} k = 0 & \bar{\sigma}_m = \ln\left(\frac{r_1}{r}\right), \\ k \neq 0 & \bar{\sigma}_m = \frac{(1+k)}{k} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^k\right]. \end{cases} \quad (20)$$

Покажем, что преобразованием второй формулы системы (20) для меридионального напряжения σ_m в случае $k \neq 0$ также возможно определить первую формулу системы (20) при $k=0$. Для этого воспользуемся методом [6].

Сначала выражение $\left(\frac{r}{r_1}\right)^k$ второй формулы системы (20) приведем к следующему виду: $\left(\frac{r_1}{r}\right)^{-k}$. Вводя обозначение

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^{-k} = a \quad (21)$$

и логарифмируя его, находим

$$-k \ln\left(\frac{r_1}{r}\right) = \ln a \quad (22)$$

Потом, найдя из (22) значение

$$a = \exp\left(-k \ln\left(\frac{r_1}{r}\right)\right) \quad (23)$$

и подставляя его в (21), получим

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^{-k} = e^{-k \ln\left(\frac{r_1}{r}\right)}. \quad (24)$$

Далее, разлагая $e^{-k \ln(\frac{r_1}{r})}$ в ряд [7] и используя два первых его члена по формуле $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!}$, будем иметь

$$e^{-k \ln(\frac{r_1}{r})} = 1 - k \ln\left(\frac{r_1}{r}\right).$$

Следовательно, формула (24) примет следующий вид:

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^{-k} = 1 - k \ln\left(\frac{r_1}{r}\right). \quad (25)$$

Подставив (25) во вторую формулу (20), находим

$$\bar{\sigma}_m = \frac{(1+k)}{k} \left[k \ln\left(\frac{r_1}{r}\right) \right].$$

Окончательно из этой формулы при $k = 0$ получим первую формулу системы (20).

Отметим, что для определения изменения пористости материала при экструзии печенной трубы в [5,6] применяют инженерный аналитический сопряженный метод, согласно которому используются полученные выше данные и следующая формула ДТППМ [4]:

$$v = 1 - (1 - v_0) \exp\left(-\frac{9v_0^m \sigma_0 \varepsilon_{eq0}}{(1-v_0)^{3n} \sigma_{eq0}}\right), \quad (26)$$

где v и v_0 – текущая и начальная пористости материала; $\sigma_{eq0} = \sigma_T$ и $\varepsilon_{eq0} = \bar{\varepsilon}_i = 1,155|\bar{\varepsilon}_\theta|$ – соответственно упрощенные величины эквивалентных напряжений и деформаций; $\bar{\varepsilon}_\theta = \ln(r/r_0)$ – окружная логарифмическая деформация [4]; r_0 – начальный радиус трубы (рис.1); $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ – среднее напряжение; m и n – параметры пористости.

Результаты исследования. Численные расчеты проводились в программной среде MS EXCEL при условии отсутствия трения ($f = 0$) и с коэффициентом трения $f = 0,15$. Начальная пористость материала принята 10%, угол конусности матрицы - $\varphi = 15^\circ$. При этом процесс экструзии заготовки моделировался в соответствующей конической матрице. Определены безразмерные значения меридиональных, окружных и средних напряжений в зависимости от степени деформации трубы, а также значения изменения пористости материала по формулам ДТППМ. На основании полученных данных НДС были составлены таблицы 1, 2 и построены графики (рис. 2).

Полученные данные показывают, что полное уплотнение материала происходит при интенсивности деформации $\bar{\varepsilon}_i = 0,165$. Сопоставление этих результатов с данными работы [6], полученными в тех же условиях без внутреннего давления, показывает, что остаток пористости в материале трубы составляет 4,8%, т.е. процесс прессования тонкостенной трубы, нагруженной внутренним высоким давлением, с точки зрения значения уплотнения материала, является высокоэффективным.

Табл.1. Данные компонентов НДС и пористости материала при отсутствии трения: $f = 0$ ($k = 0$)

$r, \text{мм}$	$-\varepsilon_\theta$	$\bar{\varepsilon}_i$	r_1/r	$-\bar{\sigma}_m$	$-\bar{\sigma}_\theta$	$-\bar{\sigma}_0$	ν
12.0	0	0	0.867	0.143	1.143	0.810	0.100
11.8	0.017	0.019	0.881	0.126	1.126	0.793	0.087
11.6	0.034	0.039	0.897	0.109	1.109	0.776	0.073
11.4	0.051	0.059	0.912	0.092	1.092	0.758	0.060
11.2	0.069	0.080	0.929	0.074	1.074	0.741	0.047
11.0	0.087	0.100	0.945	0.056	1.056	0.723	0.034
10.8	0.105	0.122	0.963	0.038	1.038	0.704	0.021
10.6	0.124	0.143	0.981	0.019	1.019	0.686	0.010
10.5	0.134	0.154	0.990	0.010	1.010	0.676	0.004
10.4	0.143	0.165	1.000	0	1.000	0.667	-0.002

Табл.2. Данные компонентов НДС и пористости материала при наличии трения: $f = 0,15$ ($k = 0,6$)

$r, \text{мм}$	$-\varepsilon_\theta$	$\bar{\varepsilon}_i$	r_1/r	$-\bar{\sigma}_m$	$-\bar{\sigma}_\theta$	$-\bar{\sigma}_0$	ν
12.0	0	0	0.867	0.239	1.239	0.906	0.100
11.8	0.017	0.019	0.881	0.210	1.210	0.877	0.085
11.6	0.034	0.039	0.897	0.181	1.181	0.847	0.071
11.4	0.051	0.059	0.912	0.151	1.151	0.818	0.057
11.2	0.069	0.080	0.929	0.121	1.121	0.788	0.043
11.0	0.087	0.100	0.945	0.091	1.091	0.758	0.031
10.8	0.105	0.122	0.963	0.061	1.061	0.728	0.019
10.6	0.124	0.143	0.981	0.031	1.031	0.697	0.008
10.5	0.134	0.154	0.990	0.015	1.015	0.682	0.003
10.4	0.143	0.165	1.000	0	1.000	0.667	-0.002

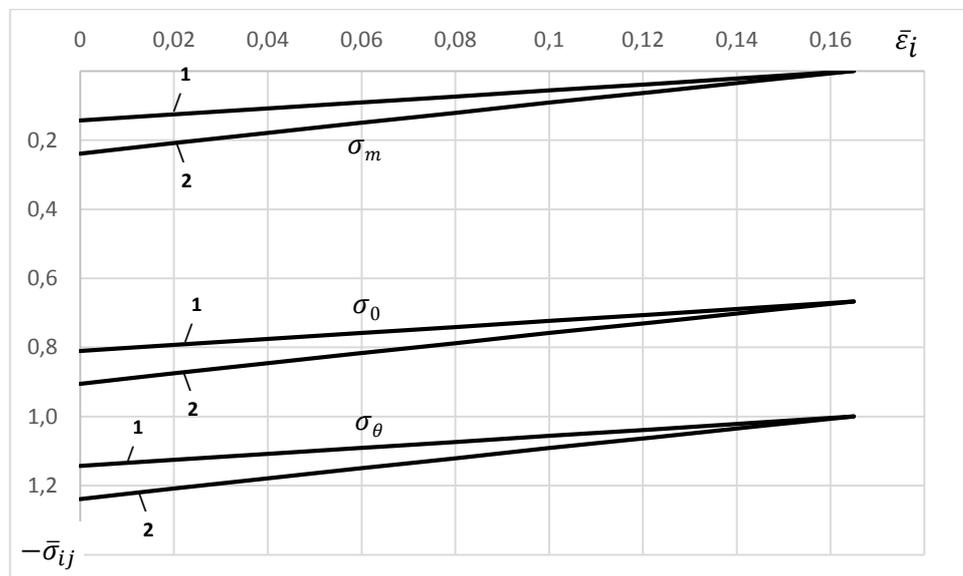


Рис.2. Данные безразмерных величин компонентов НДС в зависимости от значений интенсивности деформаций, где 1 – без учета трения ($f = 0$), 2 – с учетом трения ($f = 0.15$)

Заключение

1. Учитывая допущение равенства внешних p_v и внутренних p_r давлений, решена задача определения компонентов НДС процесса прессования тонкостенной трубы, эксплуатируемой в условиях внутреннего давления, что позволяет определить окружное напряжение и получить упрощенное условие пластичности. При этом, задача сначала полностью решается с учетом трения, а затем достаточно упрощенным методом – без учета трения, так как в формуле для определения меридионального напряжения σ_m имеется коэффициент трения k , и невозможно непосредственно из общей формулы при наличии трения ($k \neq 0$) определить величины меридионального напряжения σ_m , так как коэффициент k находится в знаменателе σ_m .

2. Показано, что получить формулу при условии отсутствия трения из основной формулы определения меридионального σ_m напряжения возможно путем преобразования формулы меридионального напряжения σ_m в случае учета трения, для получения экспоненциальной функции и представления ее в виде ряда.

3. Численные расчеты проводились в программной среде MS EXCEL при условии отсутствия трения ($f = 0$) и при значении коэффициента трения $f = 0.15$. Начальная пористость материала принята равной 10%, угол конусности матрицы - 15°. Определены безразмерные значения меридиональных, окружных и средних напряжений в зависимости от степени деформации трубы, а также значения изменения

пористости материала по формулам ДТППМ. Данные представлены в виде графиков и таблиц. Полное уплотнение материала происходит при интенсивности деформации $\varepsilon_i = 0,165$. При этом моделирование процесса экструзии заготовки осуществлялось в соответствующей конической матрице.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Малинин Н.Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. - М.: Машиностроение, 1975.- 399 с.
2. **Сторожев М.В., Попов Е.А.** Теория обработки металлов давлением. - М.: Машиностроение, 1977.- 423 с.
3. **Джонсон У., Меллор П.Б.** Теория пластичности для инженеров. - М.: Машиностроение, 1979.- 567 с.
4. **Петросян Г.Л.** Пластическое деформирование порошковых материалов. - М.: Metallurgy, 1988.- 153 с.
5. **Маргарян М.А.** Компьютерное моделирование процесса прессования круглого спеченного образца в конических матрицах // Известия НАН РА. Механика. - 2020. - Т. 73, №3. - С. 44-53.
6. **Бабаян А.А.** Исследование процесса прессования спеченной тонкостенной трубы в конической матрице упрощенным методом // Межв. сб. "Наукови Нотаки".- ЛУЦК, ЛНТУ, 2019.- Вып. N68. - С. 6-11.
7. **Двайт Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1983. - 176 с.

Сведения об авторе:

Маргарян Мигран Арнакович – аспирант Национального политехнического университета Армении, Институт механико-машиностроения, транспортных систем и дизайна. Тел.: (+374 94) 10 74 36; E-mail: marg.mihran@gmail.com

Поступила в редакцию 03.07.2022