

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ КРУЧЕНИИ УПРУГОГО  
СЛОЯ ПОСРЕДСТВОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ШТАМПА.

Гаспарян А.В., Мхитарян С.М., Саакян А.В.

**Ключевые слова:** упругий слой, кручение, цилиндрический штамп, касательные контактные напряжения, интегральное уравнение.

**Գլանաձև դրոշմի միջոցով առաձգական շերտի առանցքահամաչափ ոլորման մասին  
կոնտակտային խնդիրը  
Գասպարյան Ա.Վ., Մխիթարյան Ս.Մ., Սահակյան Ա.Վ.**

**Բանալի բառեր.** առաձգական շերտ, ոլորում, գլանային դրոշմ, շոշոփող կոնտակտային լարումներ, ինտեգրալ հավասարում:

Դիտարկվում է ուժային մոմենտով ոլորվող կոշտ շրջանային գլանաձև դրոշմի և առաձգական շերտի միջև առանցքահամաչափ կոնտակտային խնդիրը: Համարվում է, որ դրոշմը հարակցված է շերտի վերին նիստին, իսկ շերտի ստորին նիստը ամրակցված է: Հանկելի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ այդ խնդրի լուծումը բերված է սիմետրիկ կորիզով Ֆրեդհոլմի առաջին սերի ինտեգրալ հավասարման լուծման: Ընդ որում կորիզը ներկայացված է Վեբեր-Սոնինի ինտեգրալի տեսքով կորիզի և ռեգուլյար կորիզի գումարով: Կատարված է շերտի բարձրության գնահատումը, որի հասանելիության դեպքում շերտը պրակտիկորեն դեֆորմացվում է որպես կիսատարածություն: Այդ ճանաչարհին Աբելի ինտեգրալ հավասարման պարզ մեթոդով նորից ստացվել է Ռեյսներ-Սագոցի խնդրի հայտնի լուծումը: Իսկ ելակետային Ֆրեդհոլմի առաջին սերի որոշիչ ինտեգրալ հավասարումը բերված է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սերի ինտեգրալ հավասարման: Միաժամանակ, ելակետային ինտեգրալ հավասարումը կոլոկացիայի մեթոդով՝ զուգակցված ինտեգրալների հաշվման Գաուսի տիպի քառակուսացման բանաձևերի հետ, բերված է գծային հանրահաշվական հավասարումների վերջավոր համակարգի: Վեբեր-Սոնինի ինտեգրալի հաշվման համար քառակուսացման բանաձևի ստացման ժամանակ օգտագործվել են Չեբիշևի և Գեգենբաուերի օրթոգոնալ բազմանդամների հատկությունները: Առաձգական և երկրաչափական բնութագրիչ պարամետրերի փոփոխման բավականաչափ լայն տիրույթներում կատարված է քննարկվող խնդրի թվային վերլուծություն: Արդյունքում բացահայտվել է հիմնական ֆիզիկական մեծությունների՝ դրոշմի տակ կոնտակտային լարումների և դրոշմի պտտման անկյան փոփոխության օրինաչափությունները:

**Contact Problem on Axis-symmetric Torsion of an Elastic Layer through a Cylindrical Stamp  
Gasparyan A.V., Mkhitaryan S.M., Sahakyan A.V.**

**Key words:** elastic layer, torsion, cylindrical punch, tangential contact stresses, integral equation.

The paper studies the axis-symmetric contact problem between an elastic layer and a rigid cylindrical circular stamp under torque. The stamp adheres to the upper boundary of the layer whereas the lower boundary of the layer is rigidly fastened. With the application of Hankel integral transform solving the problem reduces to solving the first kind Fredholm integral equation (IE) with symmetrical kernel, represented as a sum of its principal part, Weber-Sonin integral, and the regular kernel. It is estimated that once its height attains a certain level, the layer actually deforms as a semi-space. In the process, through Abel IE method, the solution of the well-known Reissner-Sagoci problem is obtained once again and the original first kind Fredholm IE is reduced to the second

kind Fredholm IE. Concurrently, using the collocation method combined with Gauss type quadrature formulas for integral estimation, the original IE reduces to a finite system of linear algebraic equations. To obtain this quadrature formula, properties of Gegenbauer and Chebyshev orthogonal polynomials are used. In the enough wide range of change of characteristic elastic and geometrical parameters of the problem numerical analysis is performed and patterns of changes of tangential contact stresses under the stamp as well as the angle of twist of the stamp are identified.

Рассматривается осесимметрическая контактная задача между скручиваемым моментом жестким круговым цилиндрическим штампом и упругим слоем. Считается, что штамп сцеплен с упругим слоем на его верхней грани, а нижняя грань слоя жестко закреплена. При помощи интегрального преобразования Ханкеля решение этой задачи сведено к решению ИУ Фредгольма первого рода с симметрическим ядром, представимым суммой ядер в виде интеграла Вебера-Сони́на и регулярного ядра. Произведена оценка высоты слоя, по достижению которой слой практически деформируется как упругое полупространство. На этом пути простым методом ИУ Абеля вновь получено известное решение задачи Рейсснера-Саго́ци. А исходное определяющее ИУ Фредгольма первого рода сведено к ИУ Фредгольма второго рода. Одновременно это исходное ИУ методом коллокаций в сочетании с использованием квадратурных формул типа Гаусса для вычисления интегралов сведено к конечной СЛАУ. При получении этой квадратурной формулы, для вычисления интеграла Вебера-Сони́на, использованы свойства ортогональных многочленов Гегенбауэра и Чебышева. В довольно широком диапазоне изменения характерных упругих и геометрических параметров обсуждаемой задачи проведен численный анализ. В результате выявлены закономерности изменения основных физических величин – касательных контактных напряжений под штампом и угол поворота штампа.

**1. Введение.** Контактные задачи о кручении упругих тел представляют собой обширную область раздела контактных и смешанных задач механики деформируемого твердого тела. Кручение, будучи одним из важных видов деформации многих машиностроительных, авиационных, строительных и других инженерных конструкций и их деталей, стало предметом многочисленных исследований. На основании результатов этих исследований формировалось и развивалось направление расчета конструкций на прочность при кручении. Теория кручения упругих тел излагается в учебниках и монографиях, из которых здесь укажем на монографии [1-4], посвященные всестороннему исследованию проблемы кручения. А основные достижения теории контактных задач кручения упругих тел, полученные до 1976г., отражены в коллективной монографии [5].

В статье [6] путем введения системы сплюснутых сфероидальных координат построено решение контактной задачи об осесимметричном кручении упругого полупространства посредством сцепленного с ним кругового жесткого цилиндрического штампа. Решение этой задачи Рейсснера и Саго́ци, методом дуальных интегральных уравнений построено в [7]. В работах [8,9] методом дуальных интегральных уравнений решена контактная задача о кручении упругого слоя жестким круглым штампом. Здесь решение задачи в конечном итоге сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, решаемого приближенно. В [9] рассмотрена еще одна задача о кручении слоя при смешанных граничных условиях.

В последние десятилетия контактные задачи о кручении упругих тел развивались и обобщались новыми постановками и привлечением новых физических моделей, связанных с новыми материалами, в частности, с появлением функционально-градиентными материалами. В этом направлении укажем на работы [10-14].

К контактным задачам кручения и, вообще, к контактным и смешанным задачам можно применить более эффективные современные численно-аналитические и аналитические методы, разработанные в последние десятилетия. С этой целью в настоящей статье в постановке, несколько отличной от [8,9], вновь рассматривается

контактная задача об осесимметрическом кручении однородного изотропного слоя, когда его нижняя грань жестко закреплена, а сцепленный с ним по верхней грани слоя абсолютно жесткий круговой цилиндрический штамп скручивается моментом. Решение этой задачи методом интегрального преобразования Ханкеля сведено к решению интегрального уравнения (ИУ) Фредгольма первого рода с симметрическим ядром, представимым суммой ядра в виде интеграла Вебера-Сонина и регулярного ядра. Для сравнительного анализа результатов по основным механическим характеристикам поставленной задачи и выявления степени эффективности применяемых математических методов решения определяющего ИУ обсуждаемой задачи, здесь построение этого решения будет осуществлено следующими методами:

а) представление неизвестного касательного контактного напряжения формулой с явно выделенной особенностью на граничной контактной окружности и его непрерывной частью, получение определяющего ИУ Фредгольма второго рода для определения непрерывной части;

б) метод коллокаций в сочетании с методом квадратурных формул;

с) метод ортогональных многочленов Якоби;

д) метод сингулярных интегральных уравнений.

В настоящей статье решение определяющего ИУ будет построено методами а) и б), а впоследствии – методами с) и д). Но численная реализация полученных здесь определяющих ИУ и аналитических формул будет, пока, осуществляться методом б) и, частично, методом с). Для основных характеристик задачи получены явные аналитические формулы и в частных случаях проведен их сравнительный численный анализ. При этом для вычисления интеграла Вебера-Сонина с необходимой точностью получена квадратурная формула с использованием многочленов Гегенбауэра.

**2. Постановка задачи и вывод основных уравнений.** Пусть отнесенный к цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  с полюсом в начале координат  $O$  декартовой системы координат  $Oxyz$ , упругий однородный изотропный слой  $\Omega = \{0 \leq r < \infty; -\pi < \varphi \leq \pi; 0 \leq z \leq H\}$  высоты  $H$  и модуля сдвига  $G$  по грани  $z = 0$  жестко закреплена (Рис.1).

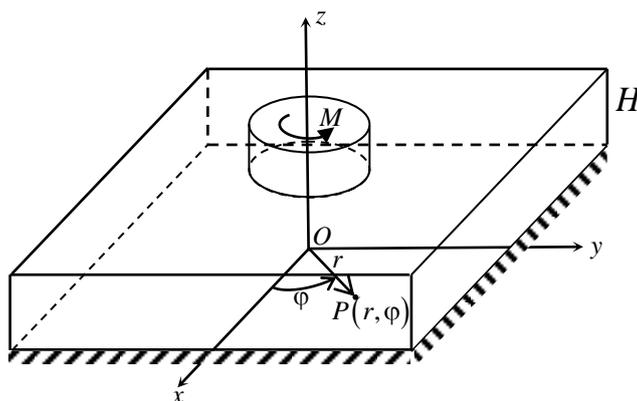


Рис.1 Схематическое представление задачи

Пусть, далее, на своей верхней грани  $z = H$  слой сцеплен с абсолютно жестким круговым цилиндрическим штампом радиуса  $a$ , к которому приложен скручивающий вокруг оси  $Oz$  против часовой стрелки момент величины  $M$ . Требуется определить касательные контактные напряжения под штампом:

$$\tau_{z\varphi} \Big|_{z=H-0} = \tau(r) \quad (0 \leq r < a)$$

и угол закручивания, или поворота штампа,  $\gamma$ .

Выведем основные уравнения поставленной задачи. Так как имеет место осевая симметрия, то

$$u_r = u_r(r, z) = 0, \quad u_z = u_z(r, z) = 0, \quad u_\varphi = u_\varphi(r, z) \neq 0 \quad ((r, \varphi, z) \in \Omega)$$

где  $u_r, u_z, u_\varphi$  - радиальные, вертикальные и окружные перемещения точек слоя.

Отсюда вытекает, что [10] (стр. 232-233; ф.-лы (22.4) и (22.7)) компоненты деформации имеют вид

$$e = e_r = e_\varphi = e_z = e_{rz} = 0; \quad e_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}; \quad e_{z\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial z},$$

$$2\omega_r = -\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}; \quad 2\omega_\varphi = 0; \quad 2\omega_z = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}$$

а закон Гука - вид

$$\tau_{r\varphi} = Ge_{r\varphi} = G \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right); \quad \tau_{rz} = 0; \quad \tau_{z\varphi} = Ge_{z\varphi} = G \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad (2.1)$$

где  $\tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{z\varphi}$  - компоненты касательных напряжений. В данном случае дифференциальные уравнения равновесия сводятся к одному-единственному уравнению

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\varphi} = 0. \quad (2.2)$$

Теперь подставляя (2.1) в (2.2), приходим к следующему дифференциальному уравнению для  $u_\varphi(r, z)$

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} - \frac{u_\varphi}{r^2} = 0 \quad ((r, \varphi, z) \in \Omega).$$

Далее решение описанной выше контактной задачи сведем к решению ИУ. С этой целью предварительно построим решение следующей вспомогательной смешанной граничной задачи:

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} - \frac{u_\varphi}{r^2} = 0 \quad (0 < r < \infty; 0 < z < H)$$

$$u_{\varphi}(r, z)|_{z=+0} = 0 \quad \tau_{z\varphi}|_{z=H-0} = G \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial z} \Big|_{z=H-0} = \tau(r) \quad (0 < r < \infty) \quad (2.3)$$

$$\tau(r) = 0 \quad 0 < a < \infty; \quad \tau_{r\varphi}^2 + \tau_{z\varphi}^2 \rightarrow 0 \quad r^2 + z^2 \rightarrow \infty;$$

где  $\tau(r)$  считается известной функцией.

Запишем также моментное условие равновесия штампа

$$\int_0^a \tau(r) r^2 dr = \frac{M}{2\pi}, \quad (2.4)$$

подразумевая под  $\tau(r)$  распределение искомых касательных контактных напряжений, причем  $\tau(r) \equiv 0$  при  $r \in (a, \infty)$ .

Решение граничной задачи (2.3)-(2.4) построим методом интегрального преобразования Ханкеля, для чего введем в рассмотрение трансформанты Ханкеля

$$\{\bar{u}_{\varphi}(\lambda, z); \bar{\tau}(\lambda)\} = \int_0^{\infty} \{u_{\varphi}(r, z); \tau(r)\} J_1(\lambda r) r dr,$$

где  $J_1(x)$  - бесселева функция первого рода, а  $\lambda$  ( $0 < \lambda < \infty$ ) - спектральный параметр Ханкеля. Приняв во внимание известную формулу из [7] (стр. 79, (2.32)), двумерную смешанную граничную задачу (2.3) преобразуем в трансформантах Ханкеля к следующей граничной задаче:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{u}_{\varphi}}{dz^2} - \lambda^2 \bar{u}_{\varphi} = 0 & (0 < z < H) \\ \bar{u}_{\varphi}(\lambda, z)|_{z=+0} = 0 & G \frac{\partial \bar{u}_{\varphi}}{\partial z} \Big|_{z=H-0} = \bar{\tau}(\lambda). \end{cases}$$

Решение этой граничной задачи представляется формулой

$$\bar{u}_{\varphi}(\lambda, z) = \frac{1}{\lambda G} \frac{\text{sh}(\lambda z)}{\text{ch}(\lambda H)} \bar{\tau}(\lambda) \quad (0 \leq z \leq H),$$

откуда

$$\bar{u}_{\varphi}(\lambda, H) = \frac{1}{\lambda G} \text{th}(\lambda H) \bar{\tau}(\lambda) \quad (0 < \lambda < \infty).$$

Теперь, по формуле обратного преобразования Ханкеля находим

$$u_{\varphi}(r, H) = \frac{1}{G} \int_0^{\infty} K(r, \rho) \tau(\rho) \rho d\rho \quad (0 \leq r < \infty). \quad (2.5)$$

$$K(r, \rho) = \int_0^{\infty} J_1(\lambda r) J_1(\lambda \rho) \operatorname{th}(\lambda H) d\lambda$$

Выделим главную часть ядра  $K(r, \rho)$ ,

$$\begin{aligned} K(r, \rho) &= \int_0^{\infty} J_1(\lambda r) J_1(\lambda \rho) d\lambda + \int_0^{\infty} J_1(\lambda r) J_1(\lambda \rho) [\operatorname{th}(\lambda H) - 1] d\lambda = \\ &= \int_0^{\infty} J_1(\lambda r) J_1(\lambda \rho) d\lambda - \int_0^{\infty} J_1(\lambda r) J_1(\lambda \rho) \frac{e^{-\lambda H}}{\operatorname{ch}(\lambda H)} d\lambda. \end{aligned}$$

В результате

$$K(r, \rho) = W_1(r, \rho) - L(r, \rho) \quad (0 < r, \rho < \infty). \quad (2.6)$$

$$W_1(r, \rho) = \int_0^{\infty} J_1(\lambda r) J_1(\lambda \rho) d\lambda; \quad L(r, \rho) = \int_0^{\infty} J_1(\lambda r) J_1(\lambda \rho) \frac{e^{-\lambda H}}{\operatorname{ch}(\lambda H)} d\lambda,$$

где  $W_1(r, \rho)$  - известный интеграл Вебера-Сонина. Очевидно, что подынтегральное выражение регулярного ядра  $L(r, \rho)$  при  $\lambda = 0$  обращается в ноль, а при  $\lambda \rightarrow \infty$  убывает, по крайней мере, с экспоненциальной скоростью  $e^{-2\lambda H}$ , что обеспечивает быструю сходимость этого интеграла.

Далее, исходя из (2.5), реализуем условие контакта штампа с упругим слоем  $u_\varphi = \gamma r$  ( $0 \leq r \leq a$ ), где  $\gamma$  угол закручивания или поворота штампа. В результате, для определения искомой функции  $\tau(r)$  получим следующее определяющее ИУ Фредгольма первого рода

$$\frac{1}{G} \int_0^a K(r, \rho) \tau(\rho) \rho d\rho = \gamma r \quad (0 < r < a), \quad (2.7)$$

Введем безразмерные величины

$$x = r/a; \quad s = \rho/a; \quad H_0 = H/a; \quad \tau_0(r) = \tau(ax)/G; \quad M_0 = M/2\pi G a^3.$$

Тогда ИУ (2.7) примет вид

$$\int_0^1 K_0(x, s) \tau_0(s) s ds = \gamma x \quad (0 < x < 1), \quad (2.8)$$

а условие (2.4) - вид

$$\int_0^1 \tau_0(s) s^2 ds = M_0. \quad (2.9)$$

При этом, согласно (2.6), будем иметь

$$K_0(x, s) = L_0(x, s) - N_0(x, s) \quad (2.10)$$

$$L_0(x, s) = \int_0^\infty J_1(\alpha x) J_1(\alpha s) d\alpha, \quad N_0(x, s) = \int_0^\infty J_1(\alpha x) J_1(\alpha s) \frac{e^{-\alpha H_0}}{\operatorname{ch}(\alpha H_0)} d\alpha.$$

Таким образом, решение обсуждаемой контактной задачи свелось к решению ИУ (2.8) при условии (2.9).

Теперь оценим величину регулярного ядра  $N_0(x, s)$  из (2.10). Воспользуемся формулой [11] (стр. 966, ф.-ла 8.411.1,  $n = 1$ ).

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\theta - x \sin \theta) d\theta \quad (0 < x < \infty),$$

откуда сразу вытекает, что  $|J_n(x)| \leq 1$ . Следовательно,

$$|N_0(x, s)| \leq \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha H_0}}{\operatorname{ch}(\alpha H_0)} d\alpha \quad (0 < x, s < \infty).$$

Этот интеграл легко берется подстановкой  $t = e^{-\alpha H_0}$  и после элементарных преобразований дает

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha H_0}}{\operatorname{ch}(\alpha H_0)} d\alpha = \frac{\ln 2}{H_0}.$$

Пусть  $\varepsilon$  - сколь угодно малое положительное число. Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$|N_0(x, s)| \leq \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha H_0}}{\operatorname{ch}(\alpha H_0)} d\alpha = \frac{\ln 2}{H_0} < \varepsilon.$$

Отсюда непосредственно следует, что при  $H_0 > \frac{\ln 2}{\varepsilon}$  с большой точностью можно пренебречь ядром  $N_0(x, s)$ , т.е. упругий слой можно заменить нижним упругим полупространством. А если потребовать выполнение условия

$$\frac{e^{-\alpha H_0}}{\operatorname{ch}(\alpha H_0)} < \varepsilon,$$

то обнаружим, что верхний предел для интеграла  $N_0(x, s)$  из (2.10) практически можно заменить конечным числом

$$-\frac{\ln \varepsilon_0}{H_0}; \quad \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon}}.$$

Теперь ядра  $L_0(x, s)$  и  $N_0(x, s)$  преобразуем дальше. Воспользовавшись выражением из [11] (стр. 706, ф.-ла 6.574.), для интеграл Вебера-Сонина будем иметь

$$L_0(x, s) = \int_0^{\infty} J_1(\alpha x) J_1(\alpha s) d\alpha = \begin{cases} \frac{s\Gamma(3/2)}{x^2\Gamma(2)\Gamma(1/2)} F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{s^2}{x^2}\right) & (s < x) \\ \frac{x\Gamma(3/2)}{s^2\Gamma(2)\Gamma(1/2)} F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{x^2}{s^2}\right) & (x < s) \end{cases},$$

где  $F(a, b, c, x)$  - гипергеометрическая функция Гаусса.

Далее, примем во внимание формулу аналитического продолжения этой функции [11] (стр. 1057, ф.-ла 9.134.2). Окончательно получим

$$L_0(x, s) = \frac{xs}{2(x^2 + s^2)^{3/2}} F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2, \frac{4x^2s^2}{(x^2 + s^2)^2}\right) \quad (0 < x, s < \infty) \quad (2.11)$$

Так как в этом случае  $a + b - c = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} - 2 = 0$ , то гипергеометрический ряд сходится для всех  $x, s > 0$ , кроме случая  $x = s$ . При помощи асимптотических формул для  $J_1(\alpha x)$  и  $J_1(\alpha s)$  легко заметить, что при  $x = s$  интеграл Вебера-Сонина  $L_0(x, s)$  и, следовательно, гипергеометрический ряд (2.11) имеют логарифмическую особенность.

Перейдя к ядру  $N_0(x, s)$ , в интеграле от переменной  $\alpha$  перейдем к переменной  $\alpha = -\ln \tau / H_0$  ( $0 < \tau < 1$ ). В результате

$$N_0(x, s) = \frac{2}{H_0} \int_0^1 J_1\left(-\frac{\ln \tau}{H_0} x\right) J_1\left(-\frac{\ln \tau}{H_0} s\right) \frac{\tau d\tau}{(1 + \tau^2)}. \quad (2.12)$$

Из (2.10) и (2.12) вытекает, что ядро  $N_0(x, s)$  можно бесконечное число раз по  $x$  и  $s$  продифференцировать под знаком интеграла.

**3. Решение определяющего ИУ (2.8)-(2.10).** Это ИУ сначала относительно непрерывной части искомой функции сведем к ИУ Фредгольма второго рода. С этой целью воспользуемся известным представлением [12,13]

$$L_0(x, s) = \int_0^{\infty} J_1(\alpha x) J_1(\alpha s) d\alpha = \frac{2}{\pi} \frac{1}{xs} \int_0^{\min(x,s)} \frac{t^2 dt}{\sqrt{(x^2 - t^2)(s^2 - t^2)}}$$

и ИУ (2.8) запишем в форме

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 \tau_0(s) ds \int_0^{\min(x,s)} \frac{t^2 dt}{\sqrt{(x^2 - t^2)(s^2 - t^2)}} = f(x) \quad (0 < x < 1)$$

$$f(x) = \gamma x^2 + x \int_0^1 N_0(x, s) \tau_0(s) ds. \quad (3.1)$$

Далее, ИУ (3.1) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^x \tau_0(s) ds \int_0^s \frac{t^2 dt}{\sqrt{(x^2 - t^2)(s^2 - t^2)}} + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_x^1 \tau_0(s) ds \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{(x^2 - t^2)(s^2 - t^2)}} = f(x) \quad (0 < x < 1) \end{aligned}$$

В первом повторном интеграле поменяем порядок интегрирования. После элементарных преобразований получим

$$\frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{T_0(t) t^2 dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = f(x) \quad (0 < x < 1), \quad T_0(t) = \int_t^1 \frac{\tau_0(s) ds}{\sqrt{s^2 - t^2}} \quad (3.2)$$

Далее, нам понадобятся формулы обращения ИУ Абеля:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{g(t) t^2 dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = h(x) & \quad g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{th(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} \\ \frac{2}{\pi} \int_x^1 \frac{g(t) dt}{\sqrt{t^2 - x^2}} = h(x) & \quad g(x) = -\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{th(t) dt}{\sqrt{t^2 - x^2}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Теперь ИУ Абеля (3.2) обращаем по первой паре (3.3). После простых преобразований будем иметь

$$xT_0(x) = \int_0^x \frac{f'(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} \quad (0 < x < 1),$$

и, следовательно, приняв во внимание вторую формулу (3.2), придем к следующему ИУ Абеля:

$$\int_x^1 \frac{\tau_0(s) ds}{\sqrt{(s^2 - x^2)}} = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{f'(t) dt}{\sqrt{(x^2 - t^2)}} \quad (0 < x < 1).$$

Это уравнение вновь обращаем, но по второй паре формул (3.3). После элементарных преобразований получим

$$\tau_0(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \left[ \int_0^x f'(t) dt \int_x^1 \frac{ds}{\sqrt{(s^2 - x^2)(s^2 - t^2)}} + \int_x^1 f'(t) dt \int_t^1 \frac{ds}{\sqrt{(s^2 - x^2)(s^2 - t^2)}} \right]$$

Далее, используя выражение интеграла из [11] (стр. 260, ф.-ла 3.152.11), можем записать

$$\tau_0(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^1 M_0(x,t) f'(t) dt \quad (0 < x < 1) \quad (3.4)$$

$$M_0(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{x} F\left(\arcsin(k_0(x,t)), \frac{t}{x}\right) & (t < x) \\ \frac{1}{t} F\left(\arcsin(k_0(t,x)), \frac{x}{t}\right) & (x < t) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \int_0^{k_0(x,t)} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(x^2-t^2u^2)}} & (t < x) \\ \int_0^{k_0(t,x)} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(t^2-t^2xu^2)}} & (x < t) \end{cases},$$

$$k_0(x,t) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-t^2}} \quad k_0(t,x) = \sqrt{\frac{1-t^2}{1-x^2}} \quad (0 < x, t < 1),$$

где  $F(q,k)$  - неполный эллиптический интеграл первого рода модуля  $k$  ( $0 < k < 1$ ) [11].

После внесения в (3.4) производной под знак интеграла, ИУ (3.4) преобразуется в следующее ИУ

$$\tau_0(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 Q_0(x,s) \tau_0(s) ds = -g(x) \quad (0 < x < 1)$$

$$Q_0(x,s) = \int_0^1 \frac{\partial M_0(x,t)}{\partial x} \left[ N_0(t,s) + t \frac{\partial N_0(t,s)}{\partial t} \right] dt \quad (3.5)$$

$$g(x) = \frac{4\gamma}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial M_0(x,t)}{\partial x} t dt$$

Теперь искомые касательные контактные напряжения представим в виде

$$\tau(r) = \frac{\varphi(r)}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad (0 < r < a),$$

где  $\varphi(r)$  - гильдеровская функция на отрезке  $[0, a]$ . Тогда после перехода к безразмерным величинам, будем иметь

$$\tau_0(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \varphi_0(x) = \frac{\varphi(ax)}{aG} \quad (0 < x < 1) \quad (3.6)$$

Далее, (3.6) подставим в (3.5) и примем во внимание, что согласно (3.4) и (2.12)

$$\frac{\partial M_0(x, t)}{\partial x} = \begin{cases} -x \int_0^{k_0(x, t)} \frac{du}{(x^2 - t^2 u^2) \sqrt{(1-u^2)(x^2 - t^2 u^2)}} - \frac{x\sqrt{1-t^2}}{(x^2 - t^2)\sqrt{1-x^2}} & (t < x) \\ x \int_0^{k_0(t, x)} \frac{u^2 du}{(t^2 - x^2 u^2) \sqrt{(1-u^2)(t^2 - x^2 u^2)}} + \frac{x\sqrt{1-t^2}}{(t^2 - x^2)\sqrt{1-x^2}} & (x < t) \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial N_0(t, s)}{\partial t} = \frac{1}{H_0^2} \int_0^1 \left[ J_2\left(-\frac{\ln u}{H_0} t\right) - J_0\left(-\frac{\ln u}{H_0} t\right) \right] J_1\left(-\frac{\ln u}{H_0} s\right) \frac{u \ln u du}{(1+u^2)}. \quad (3.8)$$

Здесь была использована формула  $J_1'(x) = [J_0(x) - J_2(x)]/2$ . Приняв во внимание (3.6) - (3.8) и опустив промежуточные выкладки, ИУ (3.5) преобразуем к виду

$$\Phi_0(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 R_0(x, s) \Phi_0(s) \frac{s ds}{\sqrt{1-s^2}} = -g_0(x) \quad (0 < x < 1) \quad (3.9)$$

$$R_0(x, s) = \frac{xs}{H_0} \int_0^1 \frac{R_1(s, t) \sqrt{1-t^2} dt}{t^2 - x^2} - \frac{xs\sqrt{1-x^2}}{H_0} \times \\ \times \left[ \int_0^x R_1(s, t) R_2(t, x) dt - \int_x^1 R_1(s, t) R_3(t, x) dt \right] = Q_0(x, s) s \sqrt{1-x^2}$$

$$R_1(s, t) = 2 \int_0^1 J_1\left(-\frac{\ln u}{H_0} t\right) J_1\left(-\frac{\ln u}{H_0} s\right) \frac{udu}{1+u^2} + \\ + \frac{t}{H_0} \int_0^1 \left[ J_2\left(-\frac{\ln u}{H_0} t\right) - J_0\left(-\frac{\ln u}{H_0} t\right) \right] J_1\left(-\frac{\ln u}{H_0} s\right) \frac{u \ln u du}{1+u^2}$$

$$R_2(t, x) = \int_0^{k_0(x, t)} \frac{du}{(x^2 - t^2 u^2) \sqrt{(1-u^2)(x^2 - t^2 u^2)}} \quad (t < x)$$

$$R_3(t, x) = \int_0^{k_0(t, x)} \frac{u^2 du}{(t^2 - x^2 u^2) \sqrt{(1-u^2)(t^2 - x^2 u^2)}} \quad (x < t)$$

$$g_0(x) = \sqrt{1-x^2} g(x) = -\frac{4\gamma}{\pi} x \left\{ F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1-x^2\right) + \sqrt{1-x^2} \left[ \int_0^x R_2(t, x) t dt - \int_x^1 R_3(t, x) t dt \right] \right\} = -\gamma h_0(x)$$

Наконец, полагая в (3.9)  $\varphi_0(x) = \gamma \psi_0(x)$  ( $0 < x < 1$ ), определяющее ИУ Фредгольма второго рода рассматриваемой задачи представим в виде

$$\psi_0(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 R_0(x, s) \psi_0(s) \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = h_0(x) \quad (0 < x < 1), \quad (3.10)$$

а условие (2.9) – в виде

$$\gamma \int_0^1 \frac{\psi_0(s) s^2 ds}{\sqrt{1-s^2}} = M_0. \quad (3.11)$$

Далее, интегралы с переменными пределами интегрирования, входящие в

$$h_0(x) = \frac{4}{\pi} x \left\{ F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1-x^2\right) + \sqrt{1-x^2} \left[ \int_0^x R_2(t, x) t dt - \int_x^1 R_3(t, x) t dt \right] \right\}$$

преобразуем в интегралы с постоянными пределами, удобные для численной реализации. А именно,

1)

$$\int_0^x R_1(s, t) R_2(t, x) dt - \int_x^1 R_1(s, t) R_3(t, x) dt = \quad (3.12)$$

$$(t = x\tau) \quad (t = x + (1-x)\tau)$$

$$= x \int_0^1 R_1(x\tau, s) R_2(x\tau, x) d\tau - (1-x) \int_0^1 R_1(x + (1-x)\tau, s) R_3(x + (1-x)\tau, x) d\tau$$

2)

$$R_2(t, x) = \int_0^{k_0(x,t)} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(x^2 - t^2 u^2)}^{3/2}} = \quad (u = k_0(x, t)\tau) \quad (3.13)$$

$$= (1-t^2)^{3/2} \sqrt{1-x^2} \int_0^1 \frac{d\tau}{\left[ x^2(1-t^2) - t^2(1-x^2)\tau^2 \right]^{3/2} \sqrt{1-t^2 - (1-x^2)\tau^2}} \quad (t < x)$$

3)

$$\begin{aligned}
R_3(t, x) &= \int_0^{k_0(t, x)} \frac{u^2 du}{(t^2 - x^2 u^2)^{3/2} \sqrt{1 - u^2}} = \quad (u = k_0(t, x)\tau) \\
&= \frac{\sqrt{1 - x^2}}{(1 - t^2)^{-3/2}} \int_0^1 \frac{\tau^2 d\tau}{\left[ t^2(1 - x^2) - x^2(1 - t^2)\tau^2 \right]^{3/2} \sqrt{1 - x^2 - (1 - t^2)\tau^2}} \quad (x < t)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad \int_0^x R_2(t, x) t dt - \int_x^1 R_3(t, x) t dt = \\
(t = x\tau) \quad (t = x + (1 - x)\tau)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$= x^2 \int_0^1 R_2(x\tau, x) \tau d\tau - (1 - x) \int_0^1 R_3(x + (1 - x)\tau, x) [x + (1 - x)\tau] d\tau$$

Теперь в определяющем ИУ (3.10) - (3.11) перейдем на стандартный интервал  $(-1, 1)$ , продолжая входящие в них функции четным образом на интервал  $(-1, 0)$ . В результате определяющее ИУ (3.10) преобразуется в ИУ

$$\Psi_0(|x|) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 R_0(|x|, |s|) \Psi_0(|s|) \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}} = h_0(|x|) \quad (-1 < x < 1), \tag{3.16}$$

а условие (3.11) – в условие

$$\gamma \int_{-1}^1 \frac{\Psi_0(|s|) s^2 ds}{\sqrt{1 - s^2}} = 2M_0 \tag{3.17}$$

Здесь, согласно (3.9) и (3.12)-(3.15), имеем

$$\begin{aligned}
R_0(|x|, |s|) &= |s| \sqrt{1 - x^2} Q_0(|x|, |s|) = \frac{|s| \operatorname{sign} x}{2H_0} \int_{-1}^1 \frac{R_1(|s|, |t|) \sqrt{1 - t^2} dt}{t - x} - \\
&- \frac{|x||s|}{H_0} \sqrt{1 - x^2} \left[ |x| \int_0^1 R_1(|x|\tau, |s|) R_2(|x|\tau, |x|) d\tau - \right.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
&\left. - (1 - |x|) \int_0^1 R_1(|x| + (1 - |x|)\tau, |s|) R_3(|x| + (1 - |x|)\tau, |x|) d\tau \right] \\
R_1(|s|, |t|) &= 2 \int_0^1 J_1\left(-\frac{\ln u}{H_0} |t|\right) J_1\left(-\frac{\ln u}{H_0} |s|\right) \frac{udu}{1 + u^2} + \\
&+ \frac{|t|}{H_0} \int_0^1 \left[ J_2\left(-\frac{\ln u}{H_0} |t|\right) - J_0\left(-\frac{\ln u}{H_0} |t|\right) \right] J_1\left(-\frac{\ln u}{H_0} |s|\right) \frac{u \ln u du}{1 + u^2}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$h_0(|x|) = \frac{4}{\pi}|x| \left\{ F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1-x^2\right) + x^2 \sqrt{1-x^2} \left[ \int_0^1 R_2(|x|\tau, |x|) \tau d\tau - \right. \right. \\ \left. \left. - (1-|x|) \int_0^1 R_3(|x|+(1-|x|)\tau, |x|) [ |x|+(1-|x|)\tau, |x| ] d\tau \right] \right\}, \quad (3.20)$$

а функции  $R_2(t, x)$  и  $R_3(t, x)$  даются, соответственно, формулами (3.13) и (3.14).

Решение определяющего ИУ (3.16) при условии (3.17) сведем к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). С этой целью следуя общему методу [14], в качестве узловых точек для вычисления интеграла в

$$(3.16) \text{ выберем точки } x_m = \cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2M}\right) \quad (m = \overline{1, M}), \text{ где } M - \text{любое нату-}$$

ральное число, являющиеся корнями многочлена Чебышева первого рода  $T_M(s)$ .

Тогда по квадратурной формуле Гаусса ИУ (3.16) сведем к следующей СЛАУ:

$$X_m + \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M R_0(|x_m|, |s_n|) X_n = a_m \quad (m = \overline{1, M}) \quad (3.21)$$

$$X_m = \psi_0(|x_m|); \quad a_m = h_0(|x_m|) \quad (m, n = \overline{1, M})$$

$$x_m = \cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2M}\right); \quad s_n = \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2M}\right),$$

а условие (3.17) – к соотношению

$$\frac{\pi\gamma}{M} = \sum_{n=1}^M X_n s_n^2 = 2M_0 \quad (3.22)$$

Элементы матрицы и правой части СЛАУ (3.21) составляются в соответствии с (3.18)-(3.20). при этом, первый интеграл с ядром Коши из (3.18) легко вычисляется по квадратурной формуле

$$\int_{-1}^1 \frac{R_1(|s_n|, |t|) \sqrt{1-t^2} dt}{t - x_m} = \frac{\pi}{2(M+1)} \sum_{p=1}^M R_1(|s_n|, |t_p|) \sin^2\left(\frac{\pi p}{M+1}\right) \frac{1}{t_p - x_m},$$

где  $t_p = \cos(\pi p / (M+1))$  ( $p = \overline{1, M}$ ) - корни многочленов Чебышева второго рода

$U_M(t)$ .

Отметим, что после решения СЛАУ (3.21) по (3.22) устанавливается зависимость между углом поворота штампа  $\gamma$  и безразмерным моментом  $M_0$ , приложенному к нему.

Решение исходного определяющего ИУ (2.8)-(2.10) построим также методом коллокаций в сочетании с применением квадратурных формул. С этой целью решение ИУ (2.8) вновь представим, как и выше, в виде

$$\tau_0(x) = \gamma \psi_0(x) / \sqrt{1-x^2} \quad (0 < x < 1) \quad (3.23)$$

Для применения квадратурных формул необходимо уравнение (2.8) свести к интервалу  $(-1, 1)$ . Учитывая нечетность ядра  $K_0(x, s)$  по обоим переменным, как и нечетность правой части уравнения, уравнение (2.8) можно будет записать на интервале  $(-1, 1)$ , если принять неизвестную функцию  $\psi_0(x)$  четной функцией. Исходя из того, что к левой части уравнения нельзя будет применить известные квадратурные формулы типа Гаусса из-за наличия в ядре  $L_0(x, s)$  логарифмической особенности, оставим уравнение (2.8) в исходном виде, но функцию  $\psi_0(x)$  будем считать четной функцией на интервале  $(-1, 1)$ . Уравнение (2.8) запишем в виде

$$\int_0^1 [sL_0(x, s) - sN_0(x, s)] \frac{\psi_0(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = x \quad (0 < x < 1) \quad (3.24)$$

Искомую функцию  $\psi_0(x)$  будем искать в виде:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Z_i T_n(x)}{(x - \xi_i) U_{n-1}(\xi_i)}, \quad \left( \xi_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n} \right)$$

при условии  $Z_i = Z_{n-i+1}$ , обеспечивающим четность этой функции.

Для упрощения дальнейших записей порядок аппроксимации  $n$  будем считать четным числом  $n = 2k$  ( $k \in N$ ).

Для регулярного ядра  $N_0(x, s)$  можем воспользоваться обычной квадратурной формулой. Действительно, учитывая четность  $sN_0(x, s)$  и  $\psi_0(x)$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_0^1 sN_0(x, s) \tau_0(s) ds &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 sN_0(x, s) \tau_0(s) ds = \frac{\pi}{4k} \sum_{i=1}^{2k} Z_i N_0[x, \xi_i] \xi_i = \\ &= \frac{\pi}{4k} \left[ \sum_{i=1}^k Z_i N_0[x, \xi_i] \xi_i + \sum_{i=1}^k Z_i N_0[x, -\xi_i] (-\xi_i) \right] = \frac{\pi}{2k} \sum_{i=1}^k Z_i N_0[x, \xi_i] \xi_i \end{aligned} \quad (3.25)$$

Учитывая, что  $Z_i = Z_{n-i+1}$  и  $n = 2k$  ( $k \in N$ ), функцию  $\psi_0(x)$  представим в виде:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{2k} \frac{Z_i T_{2k}(x)}{(x - \xi_i) U_{2k-1}(\xi_i)} = \frac{x}{k} \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{Z_i T_{2k}(x)}{(x^2 - \xi_i^2) U_{2k-1}(\xi_i)} \right\}$$

Подставив это представление в первый интеграл, будем иметь:

$$\int_0^1 L_0(x, s) s \frac{s}{k\sqrt{1-s^2}} \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{Z_i T_{2k}(s)}{(s^2 - \xi_i^2) U_{2k-1}(\xi_i)} \right\} ds =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{Z_i}{U_{2k-1}(\xi_i)} \int_0^1 L_0(x, s) \frac{s^2 T_{2k}(s)}{(s^2 - \xi_i^2) \sqrt{1-s^2}} ds$$

Для вычисления интеграла

$$\int_0^1 L_0(x, s) \frac{s^2 T_{2k}(s)}{(s^2 - \xi_i^2) \sqrt{1-s^2}} ds \quad (3.26)$$

используем спектральное соотношение [19,20]

$$\int_0^1 L_0(x, s) C_{2m}^{3/2}(\sqrt{1-s^2}) \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}} ds =$$

$$= \frac{\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(m+2)\Gamma(m+1)} x C_{2m}^{3/2}(\sqrt{1-x^2}) \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (0 < x < 1) \quad (3.27)$$

где  $C_n^\lambda(x)$  - многочлены Гегенбауэра.

Поскольку  $\frac{T_{2k}(s)}{s^2 - \xi_i^2}$  при произвольном натуральном  $k$  является многочленом

относительно  $s^2$ , то этот многочлен можно представить посредством многочленов Гегенбауэра четного порядка. Учитывая специфику многочленов Гегенбауэра в выражении (3.26), рассматриваемый многочлен представим в виде:

$$\frac{T_{2k}(s)}{(s^2 - \xi_i^2)} = \sum_{j=1}^k c_j^{(i)} C_{2(j-1)}^{3/2}(\sqrt{1-s^2})$$

Для определения  $c_j^{(i)}$  необходимо приравнять последнее равенство в произвольных, отличных друг от друга,  $k$  точках. Выбрав, например, точки  $s_p = \frac{p-1}{k}$

( $p = 1, k$ ), получим систему

$$\frac{T_{2k}(s_p)}{(s_p^2 - \xi_i^2)} = \sum_{j=1}^k c_j^{(i)} C_{2(j-1)}^{3/2}(\sqrt{1-s_p^2}) \quad (p = 1, k)$$

Определение коэффициентов  $c_k^{(i)}$  целесообразно провести численно.

После определения  $c_j^{(i)}$  для интеграла (3.26) будем иметь

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 L_0(x, s) \frac{s^2 T_{2k}(s)}{\sqrt{1-s^2}(s^2 - \xi_i^2)} ds = \int_0^1 L_0(x, s) \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}} \sum_{j=1}^k c_j^{(i)} C_{2(j-1)}^{3/2}(\sqrt{1-s^2}) ds = \\
& = \sum_{j=1}^k c_j^{(i)} \int_0^1 L_0(x, s) \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}} C_{2(j-1)}^{3/2}(\sqrt{1-s^2}) ds = \\
& = \sum_{j=1}^k c_j^{(i)} \frac{\Gamma\left(j + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(j - \frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(j+1)\Gamma(j)} x C_{2(j-1)}^{3/2}(\sqrt{1-x^2})
\end{aligned}$$

В результате, для первого интеграла в уравнении (3.24) получим квадратурную формулу

$$\int_0^1 s L_0(x, s) \frac{\Psi_0(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{Z_i}{U_{2k-1}(\xi_i)} P_i(x) \quad (3.28)$$

где

$$P_i(x) = \sum_{j=1}^k c_j^{(i)} \frac{\Gamma\left(j + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(j - \frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(j+1)\Gamma(j)} x C_{2(j-1)}^{3/2}(\sqrt{1-x^2})$$

Используя квадратурные формулы (3.25) и (3.28) и выбирая в качестве точек коллокации корни  $y_j$  многочлена Чебышева второго рода  $U_{2k}(x)$ , решение интегрального уравнения (3.24), окончательно, сведется к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Z_i \left[ \frac{P_i(y_j)}{U_{2k-1}(\xi_i)} - \frac{\pi}{2} N_0[y_j, \xi_i] \xi_i \right] = y_j \quad (j = \overline{1, k}) \quad (3.29)$$

где

$$\xi_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{4k}\right) \quad (i = \overline{1, k}), \quad y_j = \cos\left(\frac{\pi j}{2k+1}\right) \quad (j = \overline{1, k}),$$

$$P_i(x) = \sum_{j=1}^k c_j^{(i)} \frac{\Gamma\left(j + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(j - \frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(j+1)\Gamma(j)} x C_{2(j-1)}^{3/2}(\sqrt{1-x^2}),$$

а  $c_j^{(i)}$  определяются из системы

$$\frac{T_{2k}(s_p)}{(s_p^2 - \xi_i^2)} = \sum_{j=1}^k c_j^{(i)} C_{2(j-1)}^{3/2}(\sqrt{1-s_p^2}) ; \quad s_p = \frac{p-1}{k} \quad (p = \overline{1, k})$$

Угол закручивания  $\gamma$  определится из условия (2.9), которое после дискретизации принимает вид:

$$\gamma \frac{\pi}{2k} \sum_{i=1}^k Z_i \xi_i^2 = M_0 \quad (3.30)$$

и, тем самым, устанавливается связь между углом поворота штампа  $\gamma$  и приложенным к штампу безразмерным моментом  $M_0$ .

Теперь в ИУ (2.8) с ядром (2.10) совершим предельный переход  $H_0 \rightarrow \infty$ . В результате придем к определяющему ИУ задачи Рейсснера и Сагоци о кручении упругого полупространства посредством сцепленного с ним жесткого цилиндрического штампа:

$$\int_0^1 L_0(x, s) \tau_0(s) s ds = \gamma x \quad (0 < x < 1)$$

Полагая здесь  $\tau_0(x) = \gamma \omega_0(x)$  ( $0 < x < 1$ ) и используя приведенное выше представление интеграла Вебера-Сонина, придем к аналогичному с (3.1) ИУ:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 \omega_0(s) ds \int_0^{\min(x,s)} \frac{t^2 dt}{\sqrt{(x^2 - t^2)(s^2 - t^2)}} = x^2 \quad (0 < x < 1).$$

Далее, поступив совершенно аналогично сделанному выше, придем к двум последовательно решаемым ИУ Абеля:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{s^2 \Omega_0(s) ds}{\sqrt{x^2 - s^2}} = x^2 \quad (0 < x < 1) \quad (3.31)$$

$$\Omega_0(s) = \int_s^1 \frac{\omega_0(t) dt}{\sqrt{t^2 - s^2}} \quad (0 < s < 1). \quad (3.32)$$

Теперь по формуле обращения Абеля (первая пара (3.3)) из (3.31) находим

$$\begin{aligned} s^2 \Omega_0(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{u^3 du}{\sqrt{s^2 - u^2}} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{u^2 du^2}{\sqrt{s^2 - u^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[ s^2 \int_0^s \frac{du^2}{\sqrt{s^2 - u^2}} - \int_0^s \sqrt{s^2 - u^2} du^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[ s^2 \int_0^\xi \frac{d\eta}{\sqrt{\xi - \eta}} - \int_0^\xi \sqrt{\xi - \eta} d\eta \right] = 2s^2. \\ &\quad \xi = s^2 \quad \eta = u^2 \end{aligned}$$

Следовательно,  $\Omega_0(s) = 2$ , и ИУ (3.32) примет вид

$$\int_s^1 \frac{\omega_0(t) dt}{\sqrt{t^2 - s^2}} = 2 \quad (0 < s < 1)$$

Отсюда, опять по формуле обращения Абеля (вторая пара (3.3)), легко находим

$$\omega_0(x) = \frac{4x}{\pi\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < x < 1). \quad (3.33)$$

Наконец, подставляя (3.33) в (3.17), приходим к следующей зависимости между  $\gamma$  и  $M_0$ :

$$8\gamma = 3\pi M_0. \quad (3.34)$$

**4. Числовые результаты.** Вычислим относительный угол поворота штампа  $\gamma_* = \gamma/M_0$ , который при больших значениях толщины слоя  $H_0$ , согласно (3.34), должен стремиться к значению  $3\pi/8$ . В таблице 1 приведены значения  $\gamma_*$  для различных значений  $H_0$ , рассчитанных по формуле (3.30) при различных порядках аппроксимации  $n = 2k$ . По строчкам можно судить о скорости сходимости метода коллокаций, описанного выше, а по столбцам – о толщине слоя, при которой слой можно заменить полупространством.

Таблица 1. Значения  $\gamma_*$ .

|                | $k = 3$                                  | $k = 5$ | $k = 6$ | $k = 8$ | $k = 10$ | $k = 12$ |
|----------------|--|---------|---------|---------|----------|----------|
| $H_0 = 0.1$    | 0.32836                                  | 0.3393  | 0.33628 | 0.33666 | 0.33673  | 0.33673  |
| $H_0 = 1$      | 1.11089                                  | 1.10992 | 1.10985 | 1.10981 | 1.1098   | 1.10979  |
| $H_0 = 10$     | 1.17903                                  | 1.17811 | 1.17805 | 1.178   | 1.17799  | 1.17799  |
| $H_0 = 100$    | 1.17914                                  | 1.17823 | 1.17812 | 1.17812 | 1.17811  | 1.1781   |
| $H_0 = \infty$ | Точное значение $3\pi/8 = 1.178097\dots$ |         |         |         |          |          |

Отметим, что порядок относительной разницы между соседними столбцами изменяется от  $10^{-2}$  до  $10^{-5}$  в первой строчке и от  $10^{-3}$  до  $10^{-6}$  в остальных строчках. Очевидно, что для графического представления результатов вполне достаточно провести расчеты при  $k = 6$ .

Для наглядности и более точной, чем по таблице 1, оценки зависимости угла поворота  $\gamma_*$  от толщины слоя  $H_0$  на Рис. 2 приведен график этой зависимости, а также пунктиром показана линия точного значения этого угла для случая полупространства.

Как показывает этот график кривая  $\gamma_*$  при больших  $H_0$  асимптотически приближается к прямой  $\gamma_* = 3\pi/8$ , соответствующей задаче Рейснера-Сагоци. Так и должно было быть.

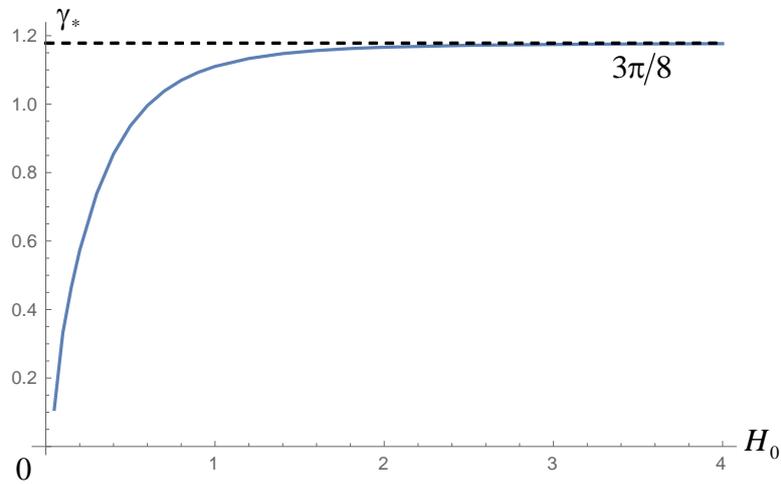


Рис. 2 Зависимость угла поворота  $\gamma_*$  от толщины слоя  $H_0$

На Рис. 3 представлены кривые распределения безразмерных контактных напряжений, отнесенных к углу поворота штампа,  $\tau_0(x)/\gamma$  для различных значений относительной толщины слоя  $H_0$ .

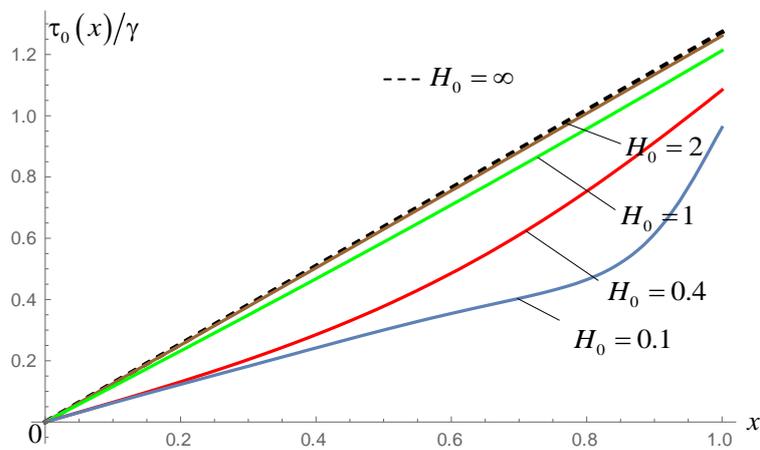


Рис.3 Распределение контактных напряжений под штампом

**4. Заключение.** Изложенные в статье аналитические и численно-аналитические методы решения определяющих ИУ обсуждаемой контактной задачи при осесимметричном кручении упругого слоя посредством жесткого кругового цилиндрического штампа, показали их достаточно высокую эффективность и точность. Они позволили

численным анализом выявить закономерности изменения основных механических величин. Этому способствовала и полученная здесь квадратурная формула типа Гаусса с привлечением многочленов Гегенбауэра и Чебышева. Приведенные в статье результаты служат основой для диверсификации, в дальнейшем, методов исследования контактных задач упругих тел и смежных граничных задач механики сплошной среды.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ляв А.Е. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935.
2. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М: Наука, 1966. 708 с.
4. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970, 940с.
5. Развитие теории контактных задач в СССР. Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976, 493с.
6. Reissner E., Sagoci H. Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space.// *I.J. Appl. Phys.*, 1944, v. 15, #9.
7. Снеддон М. Преобразование Фурье. М.: И.Л., 1955, 668с.
8. Florens A.L. Two contact problems for an Elastic Layer.// *Quart. J., Mech. And Appl. Math.*, 1961, v. 14, #4.
9. Кир Л.М. Кручение жесткого пуансона в контакте с упругим слоем при произвольном законе контактного трения.// *Прикладная механика. Труды амер. о-ва инж.-мех., серия E*, 1964, N 3.
10. Rahman M. The Reissner-Sagoci problem for a half-space under buried torsional forces // *Int. J. Solids Struct.*, 2000. vol. 37, no. 8. pp. 1119-1132. doi: 10.1016/S0020-7683(98)00277-7.
11. Liu, Tie-Jun Reissner-Sagoci problem for functionally graded materials with arbitrary spatial variation of material properties. // *Mechanics Research Communications*. -2009, -v. 36, N3, pp. 322-329.
12. Su J., Ke L.L., Wang Y.S.: Axisymmetric frictionless contact of a functionally graded piezoelectric layered half-space under a conducting punch.// *Int. J. Solids Struct.* 90, 45–59(2016) doi:10.1016/j.ijsolstr. 2016.04.011
13. Chen P.J., Chen S.H., Peng J. Sliding contact between a cylindrical punch and a graded half-plane with an arbitrary gradient direction. // *J. Appl. Mech.*, 82 (2015), pp. 1-9.
14. Sergei S. Volkov, Andrey Vasiliev, Sergey Aizikovich, Evgeniy Sadyrin Contact problem on indentation of an elastic half-plane with an inhomogeneous coating by a flat punch in the presence of tangential stresses on a surface.// May 2018, AIP Conference Proceedings 1959(1):070037, DOI:10.1063/1.5034712.
15. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958, 372с.
16. Градштейн И.С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
17. Ахизер Н.И. и Щербина В.А. Об обращении некоторых сингулярных интегралов.// *Записки матем. отд. физ.-мат. ф.-та Харьковского ун.-та и Харьковского матем. общества*, 1957, т. 25, сер. 4, 191-198.

18. Мхитарян С.М. О формулах Н.И.Ахиезера и В.А.Щербины обращения некоторых сингулярных интегралов.// Матем. Исследования, Кишинев, 1968, т. 3, вып. 1(7), 61-70.
19. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев-Одесса, «Вища школа», 1982, 168с.
20. Мхитарян С.М. О спектральных соотношениях для интегральных операторов в виде интеграла Вебера-Сонина и их приложениях к контактными задачам.// ПММ, 1984, т. 48, вып. 1, 105-113.

**Сведения об авторах:**

**Мхитарян Сурен Манукович**, член-корр. НАН РА, профессор, зав. отделом, Институт механики НАН, зав. кафедрой, Национальный университет архитектуры и строительства Армении, E-mail: [smkhitaryan39@rambler.ru](mailto:smkhitaryan39@rambler.ru) .

**Гаспарян Ануш Вараздатовна**, к.ф.м.н., старший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, E-mail: [anushgasp@gmail.com](mailto:anushgasp@gmail.com)

**Саакян Аветик Вараздатович**, д.ф.м.н., ведущий научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, E-mail: [avetik.sahakyan@sci.am](mailto:avetik.sahakyan@sci.am)

Поступила в редакцию 02.09.2022