

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ,
УСИЛЕННОЙ ПО СВОЕЙ ГРАНИЦЕ НАКЛАДКОЙ
БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ**

Агаян К.Л.

Ключевые слова: плоская волна, отражение, волновое поле, контактные напряжения, накладка.

**Propagation of Plane Waves in an Elastic Half-Plane Strengthened at its Boundary by a Stringer OF
Infinite Length
Aghayan K.L.**

Keywords: plane wave, reflection, wave field, contact stresses, stringer

The dynamic contact problem of the propagation of plane elastic waves incident from infinity onto the boundary of an elastic half-plane reinforced by an infinite plate of small thickness is studied. Questions related to the dynamic mutual influence of an elastic half-plane with an stringer attached to its boundary are studied. As a physical model for the stringer, a one-dimensional elastic continuum model is taken. The solution of the problem is constructed by direct application of the Fourier transform. Analytical expressions are obtained that represent the distribution of wave components in all parts of the half-plane.

**Առաձգական հարթ ալիքի տարածումը եզրում՝ անվերջ երկարության վերադիրով
ուժեղացված, առաձգական կիսահարթությունում
Աղայան Կ.Լ.**

Հիմնարարներ՝ հարթ ալիք, անդրադարձում, ալիքային դաշտ, կոնտակտային լարումներ, վերադիր

Դիտարկվում է անվերջությունից որոշակի անկյան տակ ընկնող լայնական հարթ ալիքի տարածման դինամիկ կոնտակտային խնդիրը, իր եղրագծով առաձգական անվերջ վերադիրով ուժեղացված, առաձգական կիսահարթության համար: Ուսումնասիրվում են առաձգական կիսահարթության և նրա եզրագծով ամրակցված առաձգական վերադիրի դինամիկ փոխազդեցության խնդիրը: Վերադիրի համար, որպես ֆիզիկական մոդել, ընդունվում է միաչափ առաձգական մարմնի վարկածը: Խնդրի փակ լուծումը կառուցվում է Ֆուրյեի ձևափոխության օգնությամբ: Ստացվել են անալիտիկ արտահայտություններ, բաղադրյալ կիսահարթության բոլոր տեղամասերում, ալիքային և կոնտակտային բաղադրիչների համար:

Исследуется динамическая контактная задача о распространении плоских упругих волн, падающих из бесконечности на границу упругой полуплоскости, усиленную бесконечной накладкой малой толщины. Изучаются вопросы, связанные с динамическим взаимовлиянием упругой полуплоскости с накладкой, сцепленной с ее границей. В качестве физической модели для накладки принимается модель одномерного упругого континуума. Решение задачи строится прямым применением преобразования Фурье. Получены аналитические выражения, представляющие распределение волновых составляющих во всех участках полуплоскости.

1. Введение

Исследования в области динамической теории упругости, связанные с процессами колебаний, дифракции и распространения различных типов волн в массивных телах с концентраторами напряжений, относятся к числу актуальных проблем динамики

контактного взаимодействия упругих тел. В частности, это относится и к задачам распространения и отражения упругих и поверхностных волн типа Релея, Лява и др. в упругой плоскости с концентраторами напряжений типа - штамп, трещина, стрингер (накладка, включение), полоса, балка и др.

По исследованию плоских контактных и смешанных задач в динамической постановке для плоскости, полуплоскости и полосы, усиленных упругими креплениями, в виде стрингеров имеется достаточно много работ. Из динамических контактных задач, наиболее близких к рассматриваемой здесь задаче, отметим работы [1-5] и цитированные в них работы. В этих работах, в постановке плоской деформации, рассматриваются стационарные динамические контактные задачи для упругих пространства, слоя и полупространства. Контактными, с массивными телами, элементами здесь, в основном, являются штампы и слои, при различных видах нагружения и граничных условиях.

Число динамических контактных задач для упругой плоскости или полуплоскости с упругими стрингерами немного. Из таких укажем работы [6-8], отмечая при этом, что [6] является первой работой в этом направлении и, как отмечает ее автор, она была поставлена академиком Н.Х. Арутюняном.

В [6] рассматриваются две динамические контактные задачи о передаче гармонически изменяющейся во времени сосредоточенной силы к полубесконечной упругой полуплоскости через приклеенную к ее границе, упругую бесконечную и полубесконечную накладку. Работа выполнена на высоком математическом уровне. Получено замкнутое решение в виде интегралах Фурье.

Предлагаемая здесь задача является родственной к задачам из [6]. В [6,7] рассматривается вопрос о передаче сосредоточенной силы от стрингера к границе полуплоскости, где стрингер играет роль демпфера, ослабляющего влияние сосредоточенной силы. В рассматриваемой здесь задаче, как в [8], исследуются вопросы, связанные с общим изменением волнового поля вследствие взаимовлияния стрингера с границей полуплоскости.

2. Постановка задачи.

Пусть упругая полуплоскость в декартовой системе координат Oxz занимает область $\Omega^- (-\infty < x < \infty, z < 0)$. Ось Oz направлена по внешней нормали к границе полуплоскости. По своей границе $z = 0$ полуплоскость с упругими характеристиками (λ, μ, ρ) усилена бесконечной накладкой достаточно малой постоянной толщины h_s с упругими параметрами E_s, ν_s, ρ_s . Полуплоскость и накладка находятся в условиях полного контакта. Относительно усиливающей накладки предполагается, что вследствие малости толщины h_s , жесткость на изгиб пренебрежимо мала. Тогда давлением накладки на полуплоскость можно пренебречь и считать, что под накладкой возникают только касательные контактные напряжения. Это позволяет, как и в работах [9,10], в качестве физической модели накладки принять модель одномерного упругого континуума.

В рамках плоско-деформированного состояния исследуем двумерное волновое движение в указанной составной полуплоскости, когда на ее границу, из бесконечности падает плоская поперечная SV волна, описываемая потенциалом

$$\begin{aligned}\Psi_\infty(x, z, t) &= \Psi_0(x, z)e^{-i\omega t} \quad x, z \in \Omega^- \\ \Psi_0(x, z) &= B_0 e^{i(\xi x + \eta z)}, \quad \xi = k_2 \cos \beta, \quad \eta = k_2 \sin \beta,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где $\Psi_0(x, z)$ - амплитуда, $\beta (0 < \beta < \pi/2)$ - угол падения поперечной волны, $k_2 = \omega / c_2$ - волновое число, $c_2 = \sqrt{\mu / \rho}$ - скорость распространения поперечной волны в полуплоскости, μ и ρ - модуль сдвига и плотность среды, ω - частота колебаний, t - время.

При этих предположениях, требуется определить распределение волновых компонентов дифрагированного поля в полуплоскости и контактных напряжений, возникающих под накладкой.

3. Решение задачи для полуплоскости с заданной нагрузкой на границе

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу плоской деформации для вышеуказанной упругой области Ω^- , когда на границе действуют заданные нагрузки, а из бесконечности на границу полуплоскости падает поперечная волна, задаваемая формулой (2.1).

Согласно сделанному выше предположению относительно отсутствия нормальной нагрузки, примем, что на границе упругой полуплоскости имеем условия:

$$\sigma_z^*(x, z, t) \Big|_{z=0} = 0, \quad \tau_{xz}^*(x, z, t) \Big|_{z=0} = \tau_0(x) e^{-i\omega t} \quad (-\infty < x < \infty)\tag{3.1}$$

Учитывая гармонический характер решения задачи и опуская в дальнейшем гармонический множитель $e^{-i\omega t}$, при помощи амплитуд волновых потенциалов $\Phi(x, z)$ и $\Psi(x, z)$ [11] решение этой задачи может быть сформулировано в виде следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned}\Delta \Phi(x, z) + k_1^2 \Phi(x, z) &= 0 \\ \Delta \Psi(x, z) + k_1^2 \Psi(x, z) &= 0\end{aligned} \quad (x, z) \in \Omega^-\tag{3.2}$$

где

$$\Psi(x, z) = \psi(x, z) - B_0 e^{i(\xi x + \eta z)},\tag{3.3}$$

при граничных условиях

$$\sigma_z(x, 0) = 0; \quad \tau_{xz}(x, 0) = \tau_0(x), \quad |x| < \infty\tag{3.4}$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа, $k_1 = \frac{\omega}{c_1} = \omega \sqrt{\rho / (\lambda + 2\mu)}$ - волновое

число, c_1 - скорость распространения продольных волн, λ, μ - параметры Ламе, ρ - плотность среды.

Применив к (3.2)-(3.4) преобразование Фурье с действительным переменным, придем к следующей системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\bar{\varphi}(\sigma, z)$ и $\bar{\Psi}(\sigma, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\varphi}(\sigma, z)}{dz^2} - \gamma_1(\sigma) \bar{\varphi}(\sigma, z) &= 0 \\ \frac{d^2 \bar{\Psi}(\sigma, z)}{dz^2} - \gamma_2(\sigma) \bar{\Psi}(\sigma, z) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dz^2} - \lambda^* \sigma^2 \bar{\varphi} - 2i\sigma \mu^* \frac{d\bar{\Psi}}{dz} \right) \Big|_{z=0} &= 2\pi B_0 \mu^* \xi \eta \delta(\sigma + \xi) \quad (|\sigma| < \infty) \\ \left(\frac{d^2 \bar{\Psi}}{dz^2} + \sigma^2 \bar{\Psi} + 2i\sigma \frac{d\bar{\varphi}}{dz} \right) \Big|_{z=0} &= 2\pi B_0 (\eta^2 - \xi^2) \delta(\sigma + \xi) - \frac{1}{\mu} \bar{\tau}_0(\sigma) \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$, $\mu^* = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}$, $\delta(x)$ - известная дельта функция Дирака,

$$\gamma_1(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_1^2}, \quad \gamma_2(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} \quad (3.7)$$

Общее решение (3.6), соответствующее физическим требованиям поставленной задачи, должно быть экспоненциально убывающим по z (неоднородные волны) либо уходящими от границы (однородные волны).

Такое решение записывается в виде

$$\bar{\varphi}(\sigma, z) = A_1(\sigma) e^{\gamma_1 z}, \quad \bar{\Psi}(\sigma, z) = B_1(\sigma) e^{\gamma_2 z} \quad (3.8)$$

где A_1, B_1 - неизвестные постоянные.

В (3.8) функции $\gamma_1(\sigma)$ и $\gamma_2(\sigma)$, задаваемые формулой (3.7), являются многозначными функциями. Точки $\sigma = \pm k_1$ и $\sigma = \pm k_2$ являются точками ветвления функций $\gamma_1(\alpha)$ и $\gamma_2(\alpha)$ в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$. Для обеспечения вышеуказанных требований принимается, что при $\sigma \rightarrow \pm\infty$ $\gamma_j(\sigma) \rightarrow |\sigma|$ ($j=1, 2$), $\gamma_j(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_j^2} = -i\sqrt{k_j^2 - \sigma^2}$, т.е. предполагается, что действительная ось обходит точки ветвления $\sigma = -k_1$ и $\sigma = -k_2$ сверху, а точки $\sigma = k_1$ и $\sigma = k_2$ - снизу [12].

Постоянные, входящие в (3.8), определяются из граничных условий (3.6) следующим образом:

$$A_1(\sigma) = 8\pi B_0 \frac{\xi \eta (\xi^2 - \eta^2)}{R(\xi)} \delta(\sigma + \xi) - i \frac{2\sigma \sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}{\mu R(\sigma)} \bar{\tau}_0(\sigma) \quad (3.9)$$

$$B_1(\sigma) = -2\pi B_0 \frac{(\xi^2 - \eta^2)^2 - 4\xi^2 \eta \sqrt{k_1^2 - \xi^2}}{R(\xi)} \delta(\sigma + \xi) - \frac{2\sigma^2 - k_2^2}{\mu R(\sigma)} \bar{\tau}_0(\sigma) \quad (3.10)$$

где $R(\sigma)$ – функция Релея:

$$R(\sigma) = (2\sigma^2 - k_2^2)^2 - 4\sigma^2 \sqrt{(\sigma^2 - k_1^2)(\sigma^2 - k_2^2)} \quad (3.11)$$

Подставляя значения A_1, B_1 из (3.9), (3.10) в (3.8), применяя обратное преобразование и учитывая (3.3), получим окончательные выражения волновых потенциалов $\Phi(x, z)$ и $\Psi(x, z)$, решающих поставленную задачу при заданных B_0 и $\tau_0(x)$.

$$\begin{aligned} \Phi(x, z) = & 4B_0 \frac{\xi \eta (\xi^2 - \eta^2)}{R(\xi)} e^{i(\xi x - \sqrt{k_1^2 - \xi^2} z)} - \\ & - \frac{i}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} \bar{\tau}_0(\sigma) e^{-i\sigma x + \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} z}}{R(\sigma)} d\sigma \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, z) = & B_0 e^{i(\xi x + \eta z)} - B_0 \frac{(\xi^2 - \eta^2)^2 - 4\eta \xi^2 \sqrt{k_1^2 - \xi^2}}{R(\xi)} e^{i(\xi x - \sqrt{k_2^2 - \xi^2} z)} - \\ & - \frac{1}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2\sigma^2 - k_2^2) \bar{\tau}_0(\sigma) e^{-i(\sigma x - \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} z)}}{R(\sigma)} d\sigma \end{aligned} \quad (3.13)$$

Не останавливаясь здесь на подробностях, отметим, что в (3.9) первым, а в (3.10) вторым слагаемым обусловлены отраженные волны, а следующими – поверхностные волны с волновым числом σ_R ($R(\sigma_R) = 0$).

Отметим также, что при использовании формул (3.9)-(3.11) следует иметь в виду известное соотношение Снеллиуса $-k_1 \cos \beta = k_2 \cos \vartheta$, из которого определяется угол ϑ отраженной продольной волны.

Определим выражение образа Фурье горизонтальных перемещений граничных точек полуплоскости $\bar{U}_x(\sigma, 0)$, которое будет необходимо для удовлетворения контактных условий и получения определяющего уравнения контактной задачи.

Применив к известному соотношению между компонентами перемещения и волновыми потенциалами [11], для трансформанты Фурье будем иметь:

$$\overline{U}_x(\sigma, z) = -i\sigma\overline{\varphi}(\sigma, z) - \frac{d\overline{\psi}(\sigma, z)}{dz} \quad (3.14)$$

Теперь, с учетом (3.8)-(3.10) получим:

$$\overline{U}_x(\sigma, 0) = 2\pi i B_0 \eta H(\xi, \eta) \delta(\sigma + \xi) - \frac{k_2^2 \sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}{\mu R(\sigma)} \overline{\tau}_0(\sigma), \quad (3.15)$$

где

$$H(\xi, \eta) = \frac{(\xi^2 - \eta^2)(3\xi^2 + \eta^2) + 4\xi^2 \eta \sqrt{k_1^2 - \xi^2}}{R(\xi)} - 1 \quad (3.16)$$

В частном случае, из (3.12) и (3.13), полагая в них внешнюю нагрузку как сосредоточенную силу $\tau(x) = p_0(\zeta) \delta(x - \zeta)$, можно получить аналитические выражения волновых потенциалов как функции влияния для рассматриваемой задачи. Они имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi(x, z, \zeta) = & B_0 \frac{4\xi\eta(\xi^2 - \eta^2)}{R(\xi)} e^{i(\xi x - \sqrt{k_1^2 - \xi^2} z)} + \\ & + \text{sign}(\zeta - x) \frac{p_0(\zeta)}{\mu} \frac{\sigma_R \sqrt{\sigma_R^2 - k_2^2} e^{\sqrt{\sigma_R^2 - k_2^2} z} e^{i\sigma_R |x - \zeta|}}{R'(\sigma_R)} + \\ & + \frac{p_0(\zeta)}{\pi\mu} \text{sign}(\zeta - x) \int_0^{k_2} \frac{t \sqrt{k_2^2 - t^2} \cos(\sqrt{k_2^2 - t^2} z) e^{-it|x - \zeta|}}{R(t)} dt + \\ & + \frac{p_0(\zeta)}{\pi\mu} \text{sign}(\zeta - x) \int_0^\infty \frac{t \sqrt{k_2^2 + t^2} \cos(\sqrt{k_2^2 + t^2} z) e^{-t|x - \zeta|}}{R(it)} dt \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, z) = & B_0 e^{i(\xi x + \eta z)} - B_0 \frac{(\xi^2 - \eta^2)^2 - 4\xi^2 \eta \sqrt{k_1^2 - \xi^2}}{R(\xi)} e^{i(\xi x + \sqrt{k_2^2 - \xi^2} z)} - \\ & + \frac{ip_0(\zeta)}{\mu} \frac{(2\sigma_R^2 - k_2^2) e^{\sqrt{\sigma_R^2 - k_2^2} z} e^{i\sigma_R |x - \zeta|}}{R'(\sigma_R)} + \\ & + \frac{ip_0(\zeta)}{\pi\mu} \int_0^{k_2} \frac{(2t^2 + k_2^2) \sin(\sqrt{k_2^2 - t^2} z) e^{it|x - \zeta|}}{R(t)} dt + \\ & + \frac{ip_0(\zeta)}{\pi\mu} \int_0^\infty \frac{(2t^2 + k_2^2) \sin(\sqrt{k_2^2 + t^2} z) e^{-t|x - \zeta|}}{R(it)} dt \end{aligned} \quad (3.18)$$

В полученных выражениях, в (3.18) начиная со второго слагаемого, первое слагаемое описывает отраженную волну, второе слагаемое – поверхностную волну Релея, а два последних слагаемых представляют объемные волны. Из (3.17) и (3.18) можно заметить, что поверхностная волна распространяется от точки приложения сосредоточенной тангенциальной силы в противоположные стороны со скоростью волн Релея.

4. Решение контактной задачи для бесконечной накладки

Рассмотрим движение накладки, отделяя ее от края полуплоскости. Обозначим через $\tau_s(x)$ амплитуду неизвестных тангенциальных контактных напряжений, возникающих на линии контакта накладки с границей полуплоскости. Применив принцип Даламбера к бесконечно малому элементу накладки, с учетом принятой выше модели одноосного напряженного состояния для него и закона Гука, для амплитуды горизонтальных перемещений $U_s(x)$ получим дифференциальное уравнение [8,10]

$$\frac{d^2 U_s(x)}{dx^2} + q^2 U_s(x) - A_s \tau_s(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (4.1)$$

$$q = \frac{\omega}{c_s}, \quad c_s^2 = \frac{E_s}{\rho_s(1-\nu_s^2)}, \quad A_s = \frac{1-\nu_s^2}{E_s h_s}$$

Здесь q - волновое число, c_s - скорость распространения волн в стрингере (стержне), E_s, ν_s, ρ_s - модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала стрингера.

Применив к (4.1) преобразование Фурье, получим

$$\bar{U}_s(\sigma) = \frac{A_s}{q^2 - \sigma^2} \bar{\tau}_s(\sigma) \quad (4.2)$$

Теперь заметим, что на линии соединения бесконечной накладки с границей полуплоскости должно выполняться условие сцепления, которое в трансформантах Фурье имеет вид:

$$\bar{U}_s(\sigma) = \bar{U}_x(\sigma, 0) \quad (-\infty < \sigma < \infty) \quad (4.3)$$

Из условия (4.3), с учетом выражений (3.15) и (4.2), для $\bar{\tau}_s(\sigma)$ получим:

$$\bar{\tau}_s(\sigma) = 2\pi i B_0 A(\xi, \eta) \delta(\sigma + \xi) \quad (4.4)$$

где

$$A(\xi, \eta) = \eta H(\xi, \eta) \frac{\mu R(\xi)(q^2 - \xi^2)}{\mu A_s R(\xi) - i k_2^2 (q^2 - \xi^2) \sqrt{k_2^2 - \xi^2}} \quad (4.5)$$

а $H(\xi, \eta)$ и $R(\xi)$ даются формулами (3.16) и (3.11).

Таким образом, выражение (4.4) дает решение контактной задачи, когда к границе полуплоскости приклеена бесконечная накладка.

Подставляя выражение $\bar{\tau}_s(\sigma)$ из (4.4) в (3.12) и (3.13), получим выражения амплитуд $\varphi(x, z)$ и $\psi(x, z)$:

$$\varphi(x, z, \zeta) = \frac{B_0}{R(\xi)} \left[4\xi\eta(\xi^2 - \eta^2) - \frac{A(\xi, \eta)\xi}{\mu} \sqrt{k_2^2 - \xi^2} \right] e^{i(\xi x - \sqrt{k_1^2 - \xi^2} z)} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, z) = B_0 e^{i(\xi x + \eta z)} - \frac{B_0}{R(\xi)} \left[(\xi^2 - \eta^2)^2 - 4\xi^2\eta \sqrt{k_1^2 - \xi^2} + \right. \\ \left. + \frac{A(\xi, \eta)(2\xi^2 - k_2^2)}{\mu} \right] e^{i(\xi x - \sqrt{k_2^2 - \xi^2} z)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Последние формулы дают решение задачи в замкнутом виде.

В частности, для определения контактных касательных напряжений, возникающих под накладкой, будем иметь формулу

$$\tau_s(x) = B_0 A(\xi, \eta) e^{-i\xi x} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (4.8)$$

а из (3.15) получим:

$$U_x(x, 0) = B_0 i \eta H(\xi, \eta) \frac{\mu A_s R(\xi)}{\mu A_s R(\xi) - i k_2^2 (q^2 - \xi^2) \sqrt{k_2^2 - \xi^2}} e^{i\xi x}$$

Положив в (3.15) $\bar{\tau}_0(\sigma) \equiv 0$, получим перемещения $U_x^{(0)}(x, 0)$ точек границы полуплоскости со свободной границей. Нетрудно проверить, что между перемещениями граничных точек полуплоскости с накладкой и без нее имеет место следующее соотношение:

$$U_x^{(0)}(x, 0) = U_x(x, 0) \left[1 - \frac{i k_2^2 (q^2 - \xi^2) \sqrt{k_2^2 - \xi^2}}{\mu A_s R(\xi)} \right] \quad (4.7)$$

Отметим некоторые качественные выводы из полученных результатов, вытекающие непосредственно из решения:

- волновое поле в рассматриваемой полуплоскости представляется в виде периодического колебательного движения;
- из (3.17) и (3.18) непосредственно следует, что если граница полуплоскости нагружена касательными нагрузками, то появляются поверхностные волны Релея;
- в случае бесконечной накладки, несмотря на присутствие контактных напряжений (4.6), нетрудно проверить, что потенциалы (3.12) и (3.13) не индуцируют поверхностные волны;

- при $q = \xi$, т.е. при совпадении волнового числа накладки с проекцией волнового числа падающей волны на ось Ox , контактные напряжения не возникают.

5. Численный анализ.

Проведем численное сравнение амплитуд горизонтальных перемещений граничных точек полуплоскости и амплитуд отраженных волн для двух случаев: а) когда полуплоскость усилена бесконечной накладкой и б) когда ее граница свободна от напряжений. Вычислены отношения соответствующих величин в зависимости от угла падения падающей волны при различных значениях упругих характеристик полуплоскости и накладки.

На приведенных рисунках представлены графики зависимости отношения амплитуд горизонтальных перемещений граничных точек полуплоскости с накладкой к амплитудам перемещений без накладки (4.7):

$$\varepsilon_U = \left| \frac{U_x(x, 0)}{U_x^{(0)}(x, 0)} \right|,$$

а также отношения амплитуд отраженных продольных ε_φ и поперечных ε_ψ волн:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{|A_{\varphi S}(x, 0)|}{|A_{\varphi 0}(x, 0)|} = \left| 1 - \frac{A(\xi, \eta) \sqrt{k_2^2 - \xi^2}}{4\mu\eta(\xi^2 - \eta^2)} \right|$$

$$\varepsilon_\psi = \frac{|A_{\psi S}(x, 0)|}{|A_{\psi 0}(x, 0)|} = \left| 1 + \frac{A(\xi, \eta)(2\xi^2 - k_2^2)}{\mu \left[(\xi^2 - \eta^2)^2 - 4\xi^2\eta\sqrt{k_1^2 - \xi^2} \right]} \right|$$

от угла падения поперечной волны.

В качестве изменяемых параметров принимаются: коэффициент Пуассона полуплоскости ν , отношение скорости упругих волн в стрингере $c_S = \sqrt{E_S / \rho_S (1 - \nu_S^2)}$ к c_2 , обозначенного $\theta_S = c_S^2 / c_2^2$, и комбинированного параметра $A_* = E_S h_S q / (\mu (1 - \nu_S^2) \sqrt{\theta_S})$.

На Рис.1 представлены кривые зависимости ε_U от угла падения β , когда $\theta_S = 0.5$, $A_* = 0.8$, а коэффициент Пуассона принимает значения $\nu = 0.16; 0.24; 0.43$

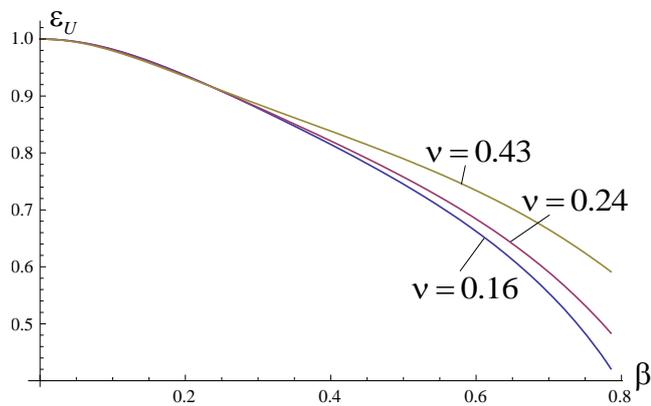


Рис.1 Зависимость ε_U от угла β при различных значениях коэффициента ν .

На Рис.2 представлены кривые зависимости ε_U от угла падения β , когда $\nu = 0.24$, $A_* = 0.5$, а параметр θ_s принимает значения $\theta_s = 0.4; 0.8; 1.5$

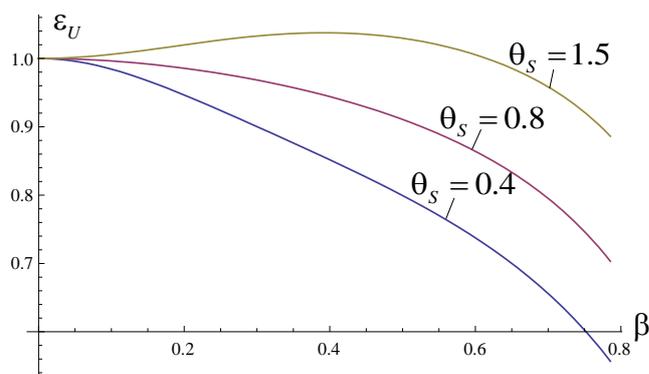


Рис.2 Зависимость ε_U от угла падения β при различных значениях параметра θ_s .

На Рис.3 представлены кривые зависимости ε_U от угла падения β , когда $\nu = 0.24$; $\theta_s = 0.8$, а комбинированный параметр принимает значения $A_* = 0.5; 1.0; 1.5$

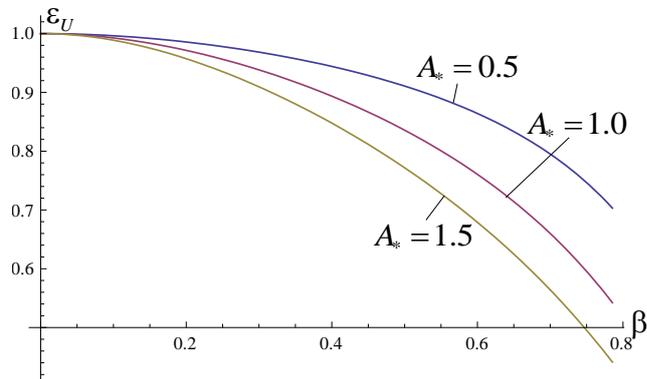


Рис.3 Зависимость ε_U от угла падения β при различных значениях параметра A_* .

Из графиков на Рис.1-Рис.3 замечаем, что при $\theta_S < 1$ наличие упругой накладки на границе полуплоскости приводит к уменьшению амплитуды перемещения граничных точек полуплоскости. Если же $\theta_S > 1$, то при малых углах падения наблюдается увеличение этой амплитуды. Изменение параметров ν и A_* приводит преимущественно к количественному изменению, причем влияние коэффициента Пуассона не очень существенно и более заметно при бо́льших значениях угла β .

На Рис. 4 представлены кривые зависимости ε_φ и ε_ψ от угла падения β , когда $\nu = 0.24$, $A_* = 0.5$, а параметр θ_S принимает значения $\theta_S = 0.4; 0.8; 1.5$.

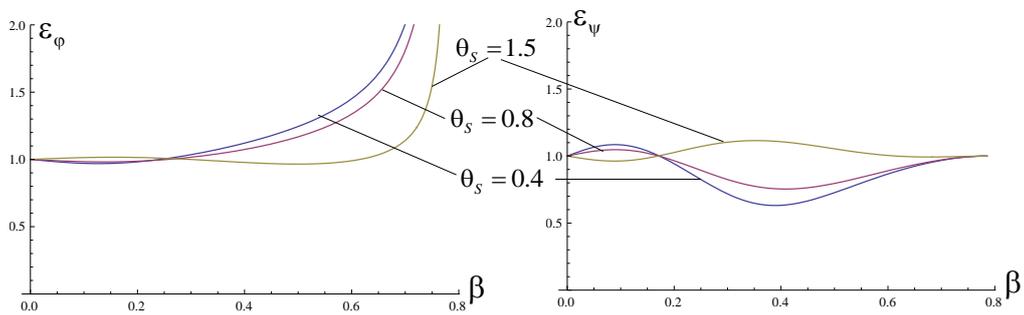


Рис.4 Зависимость ε_φ и ε_ψ от угла β при различных значениях параметра θ_S .

На Рис.5 представлены кривые зависимости ε_φ и ε_ψ от угла падения β , когда $\nu = 0.24$; $\theta_S = 0.8$, а комбинированный параметр принимает значения $A_* = 0.5; 1.0; 1.5$

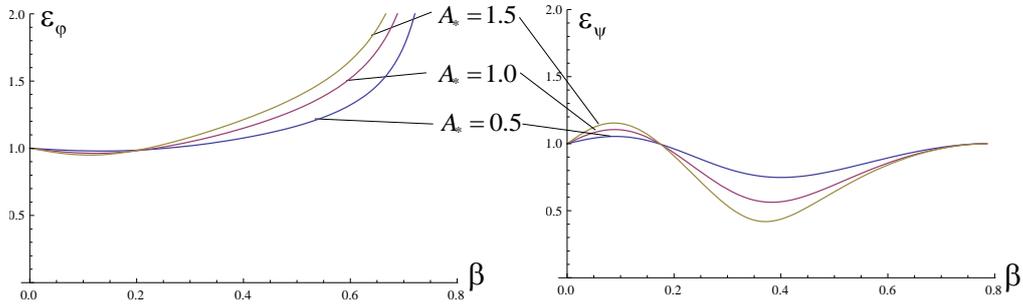


Рис.5 Зависимость ε_φ и ε_ψ от угла β при различных значениях параметра A_*

Зависимости ε_φ и ε_ψ от угла β при различных значениях коэффициента Пуассона ν здесь не приводятся, поскольку его влияние на эти величины значительно меньше, чем на ε_U . Как видим и здесь более существенное влияние оказывает параметр θ_S .

7. Заключение.

Исследуются вопросы, связанные с распространением плоских упругих волн, падающих под некоторым углом из бесконечности на границу упругой полуплоскости, усиленной стрингером бесконечной длины. Получено замкнутое решение задачи в виде аналитических выражений для волновых полей в полуплоскости и накладке, а также для контактных напряжений под стрингером. Построена функция влияния, которая позволяет непосредственно выписать определяющее интегральное уравнение для упругой полуплоскости, усиленной стрингерами конечной или полубесконечной длины, на границу которой из бесконечности падает плоская поперечная волна.

Показано, что в случае бесконечной накладки, как и в случае свободной от напряжений границы полуплоскости, поверхностные волны типа Релея не индуцируются. Кроме того, при совпадении волнового числа накладки q с проекцией волнового числа падающей волны на ось Ox ξ , контактные напряжения не возникают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бородачев Н.М. Колебания штампа, лежащего на упругом полупространстве, под действием горизонтальной гармонической силы. Изв. Вузов. Строительство и архитектура. 1963, № 9.
2. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах. //В сб.: Проблемы механики деформируемого твердого тела. Ереван, Изд. НАН Армении 1997, с. 79-96.
3. Белубекян М.В. Волны типа Релея в системе тонкий слой-полупространство. //Изв. НАН Армении., 2005. Т.58, №2. С. 9-15.
4. Агаян К.Л. Багдасарян Р.А. Распространение упругих волн в полупространстве стонким упругим усиливающим слоем.//Тр. VII межд. конф. «Проблемы

- динамики взаимодействия деформируемых сред», 19-23 сентября, 2011, Горис-Степанакерт, с. 18-25.
5. Амирджанян А.А., Белубекян М.В., Геворгян Г.З., Дарбинян А.З. Распространение поверхностных волн в составной полуплоскости при условиях Навье на линии стыка. // Изв. НАН Армении., 2021, №4, с. 29-40.
 6. Григорян Э.Х. О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими накладками. // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. №5.
 7. Григорян Э.Х. О динамической контактной задаче для полуплоскости, усиленной упругой накладкой конечной длины. // ПММ, т.38, 1974, с. 321-330.
 8. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. Изв. НАН РА, Механика, т 56, №4, 2003, с. 3-17.
 9. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. Ing. Arch 3, 123-129 (1932).
 10. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т.32, вып. 4.
 11. Новацкий В. Теория упругости. М. Мир.: 1975. 872с.
 12. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М. Мир. 1962, 294 с.
 13. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук, думка, 1981. 284с.
 14. Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство. // Изв. НАН Армении, Механика, т. 60, №3, 2007, с. 23-37.
 15. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Гулян К.Г. Дифракция сдвиговой плоской волны в составном упругом пространстве сполубесконечной трещиной параллельной линии неоднородности. // МТТ, 2013, №2, с. 106-113.
 16. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн. Докл. НАН РА. 2010, №3, с 261-271.
 17. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. Наук 1965, с. 328.

Сведения об авторе:

Агаян Каро Леренцович – проф., д.ф.м.н., в.н.с., Институт механики НАН РА, тел. +37491 485566

E-mail: karo.aghayan@gmail.com

Поступила в редакцию 03.08.2022