

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МИКРОПОЛЯРНОГО
УПРУГОГО ТОНКОГО СТЕРЖНЯ С КРУГОВОЙ ОСЬЮ С
НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВРАЩЕНИЙ И
МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Саркисян С. О., Хачатрян М.В.

Ключевые слова: микрополярный, упругий, стержень, круговая ось, динамика, математическая модель, метод конечных элементов

Sargsyan S.H., Khachatryan M.V.

Mathematical model of dynamics of micropolar elastic thin beam with a circular axis with independent fields of displacements and rotations and the finite element method

Key words: micropolar, elastic, beam, circular axis, dynamics, mathematical model, finite element method

The mathematical model of dynamics of micropolar elastic thin beam with a circular axis with independent fields of displacements and rotations is constructed on the basis of the equations of dynamics of a plane stress state of micropolar theory of elasticity in the region of a circular sector and using previously developed hypotheses for micropolar thin bodies. Corresponding variational principle is established for the problems of natural frequencies of micropolar thin beam with a circular axis. Further, on the basis of this variational principle, a variant of application of the finite element method for construction numerical solutions for boundary problems of the corresponding mathematical model is developed, which can be used to determine the natural frequencies of micropolar beam with a circular axis. An example is considered, the results of which establish the fact that the micropolarity of the material increases the natural vibration frequencies of the beam compared to the classical case.

Սարգսյան Ս.Հ., Խաչատրյան Մ.Վ.

Տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով միկրոպոլյար առաձգական շրջանային առանցքով բարակ կոր ձողի դինամիկայի մաթեմատիկական մոդելը և վերջավոր տարրերի մեթոդը

Հիմնաբառեր: միկրոպոլյար, առաձգական ձող, շրջանային առանցք, դինամիկա, մաթեմատիկական մոդել, վերջավոր տարրերի մեթոդը

Հիմք ընդունելով միկրոպոլյար առաձգականության հարթ լարվածային վիճակի դինամիկայի հավասարումները շրջանային սեկտորի տիրույթում, կիրառելով նախկինում մշակված վարկածները միկրոպոլյար բարակ մարմինների համար, կառուցվում է տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով միկրոպոլյար առաձգական շրջանային առանցքով բարակ կոր ձողի դինամիկայի մաթեմատիկական մոդելը: Շրջանային առանցքով միկրոպոլյար բարակ կոր ձողի ազատ տատանումների համար հաստատվում է համապատասխան վարիացիոն սկզբունքը: Այնուհետև, վարիացիոն այս սկզբունքի կիրառման հիման վրա մշակվում է համապատասխան մաթեմատիկական մոդելի եզրային խնդիրների թվային լուծումների կառուցման վերջավոր տարրերի մեթոդի տարբերակ, որի օգտագործմամբ կարելի է որոշել շրջանային առանցքով միկրոպոլյար կոր ձողի սեփական տատանումների հաճախականությունները: Դիտարկվում է օրինակ, որի լուծման արդյունքում հաստատվում է այն հանգամանքը, որ ձողի միկրոպոլյարությունը բարձրացնում է սեփական տատանումների հաճախականությունները համեմատած դասական դեպքի հետ:

На основе уравнений динамики плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости в области кругового сектора, используя ранее разработанные гипотезы для микрополярных тонких тел, построена математическая модель динамики микрополярного с независимыми полями перемещений и вращений упругого тонкого стержня с круговой осью. Установлен соответствующий вариационный принцип для задач собственных колебаний микрополярного тонкого стержня с круговой осью. Далее, на основе этого вариационного принципа разработан вариант применения метода конечных элементов для построения численных решений граничных задач соответствующей математической модели, применением которого можно определить частоты собственных колебаний микрополярного стержня с круговой осью. Рассматривается пример, результаты которого устанавливают то обстоятельство, что микрополярность материала повышает частоты собственных колебаний стержня по сравнению с классическим случаем.

Введение. Упругие тонкие стержни с круговой осью имеют большие применения в приборостроении, машиностроении, строительной механике. Отметим, что в приложениях, в основном, распространены стержни с круговой осью в условиях плоской задачи. Теория и расчёт упругих стержней с круговой осью на основе классической теории упругости главным образом основана на следующих допущениях: 1) применима гипотеза плоского сечения [1], 2) стержень является нерастяжимым [1]. Разработана также теория изгиба упругого стержня с круговой осью с учётом продольной деформации оси и деформации сдвига [2,3]. В работах [2,3] разработаны варианты метода конечных элементов для решения задач упругого стержня с круговой осью в уточнённой постановке.

В работе [4] изучена задача изгиба упругого стержня с круговой осью в постановке моментной теории упругости со стеснённым вращением на основе гипотезы плоского стержня.

В работе [5], на основе метода гипотез [6], построена прикладная модель статики микрополярного (с независимыми полями перемещений и вращений) упругого тонкого стержня с круговой осью и разработан вариант МКЭ для численного решения соответствующих краевых задач.

В данной работе, на основе метода гипотез [7], построена прикладная модель динамики микрополярного (с независимыми полями перемещений и вращений) упругого тонкого стержня с круговой осью, установлен соответствующий вариационный принцип (для задач о собственных колебаниях) и разработан вариант МКЭ для построения численных решений соответствующих краевых задач, с применением которого можно определить частоты собственных колебаний указанного стержня.

1. Постановка задачи. Рассмотрим кривой стержень (брус), имеющий вид части кругового кольца с поперечным сечением в виде узкого прямоугольника с размерами $2h \times 2h^*$ (Рис.1). Пусть верхняя ($r = r_2$) и нижняя ($r = r_1$) поверхности нагружены, а каждый торец ($\varphi = 0$ или $\varphi = \varphi_1$) либо нагружен, либо закреплён определённым образом. Будем предполагать, что толщина стержня в направлении перпендикулярно к плоскости чертежа ($2h^*$) настолько мала, что напряжённо-деформированное состояние в стержне можно принимать как плоское (плоское напряжённое состояние) в срединной плоскости этого тела. Пусть r_0 - радиус средней линии области срединной плоскости (т.е. оси стержня).

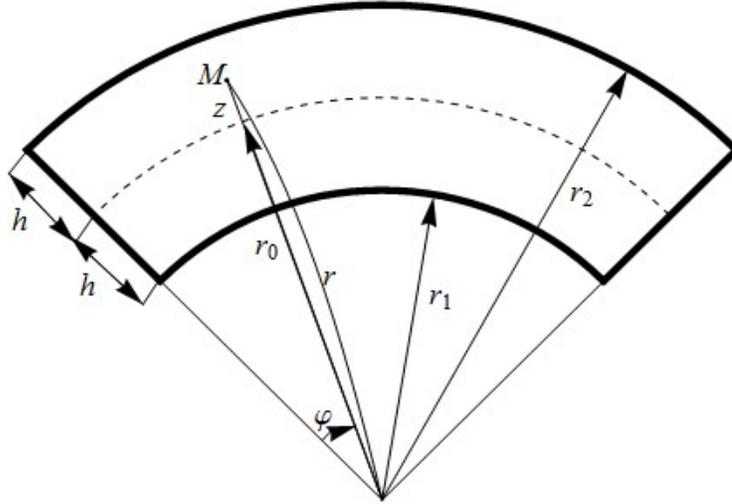


рис.1

В срединной плоскости стержня, в полярной системе координат (r, φ) ($r_1 \leq r \leq r_2$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$), имеют место уравнения обобщённого плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости [8]:

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{21} + \sigma_{12}) &= \rho \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varphi} &= \rho \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \mu_{13}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial r} + \frac{1}{r} \mu_{23} + \sigma_{12} - \sigma_{21} &= J \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Соотношения упругости:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}], & \gamma_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}], & \gamma_{12} &= \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{12} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{21}, \\ \gamma_{21} &= \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{21} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{12}, & \chi_{13} &= \frac{1}{B} \mu_{13}, & \chi_{23} &= \frac{1}{B} \mu_{23}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

либо в обратной форме

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\gamma_{11} + \nu \gamma_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\gamma_{22} + \nu \gamma_{11}),$$

$$\sigma_{12} = (\mu + \alpha)\gamma_{12} + (\mu - \alpha)\gamma_{21}, \quad \sigma_{21} = (\mu - \alpha)\gamma_{12} + (\mu + \alpha)\gamma_{21}, \quad (1.3)$$

$$\mu_{13} = B\chi_{13}, \quad \mu_{23} = B\chi_{23};$$

Геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \phi} + \frac{1}{r} V_2, & \gamma_{22} &= \frac{\partial V_2}{\partial r}, & \gamma_{12} &= \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \phi} - \frac{1}{r} V_1 - \omega_3, & \gamma_{21} &= \frac{\partial V_1}{\partial r} + \omega_3, \\ \chi_{13} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_3}{\partial \phi}, & \chi_{23} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial r}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь σ_{11} , σ_{21} , σ_{12} , σ_{21} - силовые (обычные) напряжения; μ_{13} , μ_{23} - моментные напряжения; γ_{11} , γ_{22} , γ_{12} , γ_{21} - деформации; χ_{13} , χ_{23} - изгибы-кручения; V_1 , V_2 - перемещения; ω_3 - свободный поворот; E , ν , α , B - упругие постоянные микрополярного материала $\left(\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right)$, ρ - плотность материала, J - мера инерции материала при вращении.

Будем считать, что на лицевых линиях $r = r_1$, $r = r_2$ заданы внешние усилия и моменты:

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= q_1^-, \quad \sigma_{22} = q_2^-; \quad \mu_{23} = m^-, \quad \text{на } r = r_1, \\ \sigma_{21} &= q_1^+, \quad \sigma_{22} = q_2^+; \quad \mu_{23} = m^+, \quad \text{на } r = r_2, \end{aligned} \quad (1.5)$$

а на крайних сечениях области ($\phi = 0$, $\phi = \phi_1$) имеет место один из следующих вариантов граничных условий:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sigma_{11} &= \sigma'_{11}, \quad \sigma_{12} = \sigma'_{12}, \quad \mu_{13} = \mu'_{13}, \quad \text{при } \phi = 0; \\ \sigma_{11} &= \sigma''_{11}, \quad \sigma_{12} = \sigma''_{12}, \quad \mu_{13} = \mu''_{13}, \quad \text{при } \phi = \phi_1, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } V_1 &= V'_1, \quad V_2 = V'_2, \quad \omega_3 = \omega'_3, \quad \text{при } \phi = 0; \\ V_1 &= V''_1, \quad V_2 = V''_2, \quad \omega_3 = \omega''_3, \quad \text{при } \phi = \phi_1, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \sigma_{11} &= \sigma'_{11}, \quad V_2 = V'_2, \quad \mu_{13} = \mu'_{13}, \quad \text{при } \phi = 0; \\ \sigma_{11} &= \sigma''_{11}, \quad V_2 = V''_2, \quad \mu_{13} = \mu''_{13}, \quad \text{при } \phi = \phi_1. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Плотность потенциальной энергии деформации W микрополярного упругого изотропного тела при плоском напряжённом состоянии выражается следующей формулой:

$$\begin{aligned}
W = & \frac{E}{2(1-\nu^2)} \gamma_{11}^2 + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \gamma_{11}\gamma_{22} + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \gamma_{22}^2 + \frac{1}{2}(\mu + \alpha) \gamma_{12}^2 + \\
& + (\mu - \alpha) \gamma_{12}\gamma_{21} + \frac{1}{2}(\mu + \alpha) \gamma_{21}^2 + \frac{1}{2}B\chi_{13}^2 + \frac{1}{2}B\chi_{23}^2.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Если рассматривать собственные колебания для задачи плоского напряжённого состояния микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений, тогда для следующего функционала получим принцип минимума [8]:

$$\tilde{U} = \int_0^{r_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(W + \rho \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} V_1 + \rho \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} V_2 + J \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2} \omega_3 \right) r d\varphi dr. \tag{1.10}$$

2. Исходные гипотезы. Построение прикладной модели динамического изгиба микрополярного упругого стержня с круговой осью с независимыми полями перемещений и вращений.

Сформулируем допущения (гипотезы) [7], используемые при построении прикладной модели динамики микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью:

1. В качестве исходной кинематической гипотезы для перемещений, примем гипотезу прямой линии - это означает, что линейный элемент первоначально перпендикулярный к средней линии срединной плоскости стержня до деформации, после деформации остаётся прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной средней линии, а поворачивается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Кроме того, для свободного поворота ω_3 будем считать, что эта функция по координате z - постоянная. Вследствие указанных допущений будем иметь следующий линейный закон изменения перемещений и свободного поворота по толщине срединной плоскости стержня с круговой осью:

$$V_1 = u(\varphi, t) + z\psi(\varphi, t), \quad V_2 = w(\varphi, t), \quad \omega_3 = \Omega_3(\varphi, t), \tag{2.1}$$

где $u(\varphi, t)$ и $w(\varphi, t)$ - перемещения точек средней линии в направлениях по ее касательной и по нормали (т.е. $w(\varphi, t)$ - это прогиб стержня); $\psi(\varphi, t)$ - угол поворота первоначально нормального элемента; $\Omega_3(\varphi, t)$ - свободный поворот этого элемента.

Кинематические гипотезы (2.1) в целом, как в работах [6,7], назовём обобщёнными кинематическими гипотезами Тимошенко на случай микрополярного тонкого стержня (в данном случае, для стержня с круговой осью).

2. Гипотеза о тонкостенности стержня, при которой примем следующие приближённые равенства:

$$1 + \frac{h}{r_0} \approx 1, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0 + z} = \frac{1}{r_0 \left(1 + \frac{z}{r_0}\right)} \approx \frac{1}{r_0}. \quad (2.2)$$

3. Предположения о малости в первом уравнении закона Гука ((1.2)₁) нормального напряжения σ_{22} , относительно нормального напряжения σ_{11} .

4. При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для касательного напряжения σ_{21} примем

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^0(\varphi, t). \quad (2.3)$$

После определения указанных выше величин, формулу для σ_{21} уточним следующим образом. Интегрируем по z второе из (1.1) ((1.1)₂) уравнение движения и, при определении постоянной интегрирования (вернее функции от φ), будем требовать равенство нулю интеграла от $-h$ до h от полученного выражения. После указанного интегрирования, полученное окончательное выражение прибавим к формуле (2.3).

В соответствии с принятым законом распределения перемещений и поворота (2.1), подставляя их в формулы (1.3), находим деформации и изгибы-кручения:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r_0} w \right) + z \frac{1}{r_0} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \gamma_{12} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{1}{r_0} u - \Omega_3, \\ \gamma_{21} &= \psi + \Omega_3, \quad \chi_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \varphi}, \quad \chi_{23} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Примем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r_0} w, \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{1}{r_0} u - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \\ \mathbf{K}_{11} &= \frac{1}{r_0} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad k_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

тогда для деформаций, изгибов - кручений получим

$$\gamma_{11} = \Gamma_{11} + z\mathbf{K}_{11}, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \gamma_{12} = \Gamma_{12}, \quad \gamma_{21} = \Gamma_{21}, \quad \chi_{13} = k_{13}, \quad \chi_{23} = 0. \quad (2.6)$$

Здесь Γ_{11} - представляет собой продольную относительную деформацию средней линии; \mathbf{K}_{11} - изменение кривизны средней линии (от силовых напряжений); Γ_{12} , Γ_{21} - сдвиговые деформации; k_{13} - изменение кривизны средней линии (от моментных напряжений).

Используя гипотезу 3) и формулу (2.6)₁, из формулы (1.2)₁ для напряжений σ_{11} будем иметь

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0(\varphi, t) + z \sigma_{11}^1(\varphi, t), \quad (2.7)$$

где

$$\sigma_{11}^0(\varphi, t) = E\Gamma_{11}, \quad \sigma_{11}^1(\varphi, t) = EK_{11}. \quad (2.8)$$

Для определения силового напряжения σ_{12} используем формулы (1.2)₃, (2.4)₃, (2.4)₄, получим:

$$\sigma_{12} = (\mu + \alpha)\Gamma_{12} + (\mu - \alpha)\Gamma_{21}. \quad (2.9)$$

Принимая во внимание формулы (2.7) для σ_{11} и (2.9) для σ_{12} , рассмотрим второе уравнение движения (1.1)₂, которое интегрируем по z ($r = r_0 + z$), с учётом условия тонкостенности области (2.2) и граничных условий из (1.5) для σ_{22} , окончательно получим:

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2}(q_2^+ + q_2^-) - \frac{h^2}{2} \frac{1}{r_0} \sigma_{11}^1 + z \left(\frac{1}{r_0} \sigma_{11}^0 - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial \varphi} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{r_0} \sigma_{11}^1 \frac{z^2}{2}. \quad (2.10)$$

Для моментного напряжения μ_{13} , на основании формулы (1.2)₅ и с учётом из (2.6) формулы для χ_{13} , будем иметь:

$$\mu_{13} = Bk_{13}. \quad (2.11)$$

Значение для моментного напряжения μ_{23} получим из третьего уравнения движения (1.1)₃ интегрированием по z с учётом формул (2.11), (2.9) и (2.3):

$$\mu_{23} = \frac{1}{2}(m^+ + m^-) - z \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial \mu_{13}^0}{\partial \varphi} + \sigma_{12}^0 - \sigma_{21}^0 - J \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \right). \quad (2.12)$$

Для определения силового напряжения σ_{21} , за основу будем принимать гипотезу 4), тогда с использованием первого уравнения движения (1.1)₁, а также формулы (2.3), окончательно получим:

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^0(\varphi, t) + \frac{h^2}{6} \frac{1}{r_0} \frac{\partial \sigma_{11}^1}{\partial \varphi} - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \frac{h^2}{6} - z \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial \varphi} + \frac{1}{r_0} \sigma_{12}^0 - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) -$$

$$-\frac{z^2}{2} \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varphi} - \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right). \quad (2.13)$$

С целью приведения двумерной задачи микрополярной теории упругости к одномерной, что уже выполнено для перемещений и поворота, деформаций и изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, в прикладной теории микрополярного упругого стержня с круговой осью, вместо компонент силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики - усилия: N , Q_1 , Q_2 и моменты: M_{11} , L_{13} , которые выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} N &= \int_{-h}^h \sigma_{11} dz, & Q_1 &= \int_{-h}^h \sigma_{12} dz, & Q_2 &= \int_{-h}^h \sigma_{21} dz, \\ M_{11} &= \int_{-h}^h \sigma_{11} z dz, & L_{13} &= \int_{-h}^h \mu_{13} dz. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь, N - нормальное усилие, Q_1 , Q_2 - перерезывающие усилия, M_{11} - изгибающий момент от силовых напряжений, L_{13} - изгибающий момент от моментных напряжений.

Принимая за основу формулы для σ_{21} ((2.13)), σ_{22} ((2.10)) и μ_{23} ((2.12)), удовлетворяя граничным условиям (1.5), с учётом формул (2.14), приходим к системе уравнений движения прикладной модели микрополярного упругого стержня с круговой осью:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0} N - \frac{1}{r_0} \frac{\partial Q_1}{\partial \varphi} &= (q_2^+ - q_2^-) - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{r_0} Q_1 + \frac{1}{r_0} \frac{\partial N}{\partial \varphi} &= -(q_1^+ - q_1^-) + 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ Q_2 - \frac{1}{r_0} \frac{\partial M_{11}}{\partial \varphi} &= h(q_1^+ + q_1^-) - \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \\ Q_2 - Q_1 - \frac{1}{r_0} \frac{\partial L_{13}}{\partial \varphi} &= (m^+ - m^-) - 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Далее при помощи формул для σ_{11} ((2.7)), σ_{12} ((2.9)), σ_{21} ((2.13)), μ_{13} ((2.11)) получим соотношения упругости для указанной модели:

$$\begin{aligned}
N &= 2Eh\Gamma_{11}, \\
Q_1 &= 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{12} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{21}, \\
Q_2 &= 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{21} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{12}, \\
M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3}K_{11}, \quad \dots
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Присоединим к уравнениям движения (2.15) и соотношениям упругости (2.16) ещё и геометрические уравнения (2.5):

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= \frac{1}{r_0} \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} w, \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u - \Omega_3, \\
\Gamma_{21} &= \psi + \Omega_3, \quad K_{11} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad k_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \varphi}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Уравнения движения (2.15), соотношения упругости (2.16) и геометрические соотношения (2.17) представляют собой основные уравнения прикладной модели микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью. К этой системе уравнений следует присоединить граничные условия:

I. Условия силового и моментного характера (например, для края $\varphi = 0$):

$$\begin{aligned}
N|_{\varphi=0} = N' &= \int_{-h}^h \sigma'_{11} dz, & M_{11}|_{\varphi=0} = M'_{11} &= \int_{-h}^h \sigma'_{11} z dz; \\
Q_1|_{\varphi=0} = Q'_1 &= \int_{-h}^h \sigma'_{12} dz, & L_{13}|_{\varphi=0} = L'_{13} &= \int_{-h}^h \mu'_{13} dz;
\end{aligned} \tag{2.18}$$

В частности, из этих условий получим условия свободного края:

$$N|_{\varphi=0} = 0, \quad Q_1|_{\varphi=0} = 0, \quad M_{11}|_{\varphi=0} = 0, \quad L_{13}|_{\varphi=0} = 0. \tag{2.19}$$

II. Условия, когда на краях заданы перемещения и поворот (например, для края $\varphi = 0$):

$$\begin{aligned}
u|_{\varphi=0} = u' &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h V'_1 dz, & \psi|_{\varphi=0} = \psi' &= \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h V'_1 z dz; \\
w|_{\varphi=0} = w' &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h V'_2 dz, & \Omega_3|_{\varphi=0} = \Omega'_3 &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \omega'_3 dz;
\end{aligned} \tag{2.20}$$

В частности, из этих условий получим условия полной заделки края

$$u|_{\varphi=0} = 0, \quad w|_{\varphi=0} = 0, \quad \psi|_{\varphi=0} = 0, \quad \Omega_3|_{\varphi=0} = 0. \tag{2.21}$$

III. Условия типа шарнирного опирания (например, для края $\varphi = 0$):

$$\begin{aligned} N|_{\varphi=0} = N' &= \int_{-h}^h \sigma'_{11} dz, & M_{11}|_{\varphi=0} = M' &= \int_{-h}^h \sigma'_{11} z dz; \\ w|_{\varphi=0} = w' &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h V'_2 dz, & L_{13}|_{\varphi=0} = L'_{13} &= \int_{-h}^h \mu'_{13} dz; \end{aligned} \quad (2.22)$$

Это, когда шарнирный край загружен моментами. В однородном случае будем иметь следующие граничные условия:

$$N|_{\varphi=0} = 0, \quad w|_{\varphi=0} = 0, \quad M_{11}|_{\varphi=0} = 0, \quad L_{13}|_{\varphi=0} = 0. \quad (2.23)$$

Математическая модель динамики микрополярного упругого стержня с круговой осью выражается системой уравнений (2.15)-(2.17) и граничными условиями (2.18) (либо - (2.20), либо - (2.22)).

Линейная плотность потенциальной энергии деформации прикладной модели изгибной деформации микрополярных упругих стержней с круговой осью с независимыми полями перемещений и вращений: $W_0 = \int_{-h}^h W dz$ (используя формулы (1.9), (2.6), (2.14)), будет выражаться так

$$\begin{aligned} W_0 &= Eh\Gamma_{11}^2 + \frac{Eh^3}{3} K_{11}^2 + (\mu + \alpha)h\Gamma_{12}^2 + (\mu + \alpha)h\Gamma_{21}^2 + \\ &+ 2(\mu - \alpha)h\Gamma_{12}\Gamma_{21} + (\gamma + \varepsilon)hk_{13}^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

В случае собственных колебаний микрополярных стержней с круговой осью для следующего функционала получим принцип минимума:

$$\tilde{U}_0 = \int_0^{\varphi_1} (W_0 + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u + \frac{\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \psi + Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \Omega_3) r_0 d\varphi. \quad (2.25)$$

3. Разработка варианта метода конечных элементов для решения граничных задач собственных колебаний микрополярных стержней с круговой осью с независимыми полями перемещений и вращений.

В решении задач механики деформируемого твёрдого тела и строительной механики, большое значение приобрели численные методы, основанные на вариационных принципах. Среди них особое место занимает МКЭ, благодаря универсальности и программной реализации [9,10].

В области микрополярной теории упругости МКЭ развит в работах [11-13]. В работе [14] разработан вариант метода МКЭ для расчёта задачи изгиба микрополярных упругих тонких пластин, а в работах [5,15]- для расчёта статических задач микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью.

Для динамической задачи микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью (при изучении собственных колебаний) выберем для прогиба \bar{w} , осевого

перемещения - \bar{u} , полного поворота ψ нормального элемента и для свободного поворота нормального элемента Ω_3 разложения в виде:

$$\begin{aligned}\bar{w}(\bar{s}, \tau) &= (\alpha_1 + \alpha_2 \bar{s} + \alpha_3 \bar{s}^2 + \alpha_4 \bar{s}^3) \cdot \sin \bar{\omega} \tau, \\ \bar{u}(\bar{s}, \tau) &= (\alpha_5 + \alpha_6 \bar{s} + \alpha_7 \bar{s}^2 + \alpha_8 \bar{s}^3) \cdot \sin \bar{\omega} \tau, \\ \psi(\bar{s}, \tau) &= (\alpha_9 + \alpha_{10} \bar{s} + \alpha_{11} \bar{s}^2 + \alpha_{12} \bar{s}^3) \cdot \sin \bar{\omega} \tau, \\ \Omega_3(\bar{s}, \tau) &= (\alpha_{13} + \alpha_{14} \bar{s} + \alpha_{15} \bar{s}^2 + \alpha_{16} \bar{s}^3) \cdot \sin \bar{\omega} \tau,\end{aligned}\tag{3.1}$$

где $\bar{\omega}$ безразмерная частота собственных колебаний:

$$\bar{\omega} = \omega \cdot t_0, \text{ где } t_0 = a \sqrt{\frac{\rho}{\mu}},$$

в данном случае имеем следующее обозначение для безразмерного времени:

$$\tau = \frac{t}{t_0} = \frac{t}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

$$\text{А } \bar{w} = \frac{w}{a}, \quad \bar{u} = \frac{u}{a}, \quad \bar{s} = \frac{s}{a}.$$

Функционал (2.25) представим в безразмерном виде:

$$\tilde{U}_0 = \int_0^1 \left(\bar{W}_0 + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} \bar{w} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} \bar{u} + \frac{\delta^2}{3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{t}^2} \psi + \bar{J} \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial \bar{t}^2} \Omega_3 \right) d\bar{s},\tag{3.2}$$

после интегрирования по \bar{s} получим функцию шестнадцати независимых переменных $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{16}$. Минимизация функционала (3.2) приводит к нахождению минимума функции шестнадцати независимых переменных (3.1).

Вычислив соответствующие частные производные, приходим к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$([K] - \bar{\omega}^2 [M]) \cdot \{\delta\} = 0.\tag{3.3}$$

Здесь $[K]$ - матрица жёсткости, $[M]$ - матрица масс конечного элемента, размерности 16×16 .

Ненулевые элементы матрицы масс конечного элемента имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
M_{11} = M_{33} = M_{99} &= \frac{26}{35}, M_{12} = M_{21} = M_{34} = M_{43} = -M_{9,10} = \\
-M_{10,9} &= -M_{11,12} = -M_{12,11} = \frac{11}{105}, M_{19} = M_{91} = M_{3,11} = M_{11,3} = \frac{9}{35}, \\
M_{1,10} = M_{10,1} &= -M_{29} = -M_{92} = M_{3,12} = M_{12,3} = -M_{4,11} = -M_{11,4} = -\frac{13}{210}, \\
M_{22} = M_{44} = M_{10,10} &= M_{12,12} = \frac{2}{105}, M_{2,10} = M_{10,2} = M_{12,4} = M_{4,12} = -\frac{1}{70}, \\
M_{55} = M_{13,13} &= \frac{26}{105} \delta^2, M_{56} = M_{65} = -M_{13,14} = -M_{14,13} = \frac{11}{315} \delta^2, \\
M_{5,13} = M_{13,5} &= \frac{3}{35} \delta^2, M_{5,14} = M_{14,5} = -M_{6,13} = -M_{13,6} = -\frac{13}{630} \delta^2, \\
M_{66} = M_{14,14} &= \frac{2}{315} \delta^2, M_{6,14} = M_{14,6} = -\frac{1}{210} \delta^2, M_{77} = M_{15,15} = \frac{26}{35} \bar{J}, \\
M_{78} = M_{87} &= -M_{15,16} = -M_{16,15} = \frac{11}{105} \bar{J}, M_{7,14} = M_{14,7} = M_{7,15} = M_{15,7} = \frac{9}{35} \bar{J}, \\
M_{7,16} = M_{16,7} &= -M_{8,15} = -M_{15,8} = -\frac{13}{210} \bar{J}, \\
M_{88} = M_{16,16} &= \frac{2}{105} \bar{J}, M_{8,16} = M_{16,8} = -\frac{1}{70} \bar{J},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где принято обозначение $\bar{J} = \frac{J}{\rho a^2}$.

Обращая определитель однородной системы линейных алгебраических уравнений (3.3) в ноль, получим уравнение для определения безразмерной частоты $\bar{\omega}$ собственных колебаний.

В качестве примера рассмотрим задачу свободных колебаний стержня с круговой осью, когда один конец жёстко закреплён, а другой свободен, граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\text{при } \bar{s} = 0, \bar{w} = 0, \bar{u} = 0, \psi = 0, \Omega_3 = 0; \\
\text{при } \bar{s} = 1 = \frac{\pi \bar{r}_0}{2}, \bar{Q}_1 = 0, \bar{N} = 0, \bar{M}_{11} = 0, \bar{L}_{13} = 0,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

которые с учётом (2.16) и (2.17) эквивалентны следующим условиям:

$$\begin{aligned}
\text{при } \bar{s} = 0, \bar{w} = 0, \bar{u} = 0, \psi = 0, \Omega_3 = 0; \\
\text{при } \bar{s} = 1 = \frac{\pi \bar{r}_0}{2}, 2\delta(1 + \bar{\alpha}) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{s}} - \frac{1}{\bar{r}_0} \bar{u} - \Omega_3 \right) + 2\delta(1 - \bar{\alpha})(\psi + \Omega_3) = 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} + \frac{1}{\bar{r}_0} \bar{w} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \bar{s}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_3}{\partial \bar{s}} = 0. \quad (3.6)$$

Задачу будем решать с помощью МКЭ.

В табл. 1 приведены значения наименьшей частоты микрополярного стержня с круговой осью в зависимости от значения безразмерного физического параметра $\bar{\alpha}$.

Таблица 1. Наименьшая частота свободных колебаний $\bar{\omega}$ микрополярной и классической стержней с круговой осью со свободным вращением в зависимости от $\bar{\alpha}$.

$\bar{\alpha}$	Микрополярная модель			Классическая модель		
	$\bar{\omega} \times 10^3$			$\bar{\omega} \times 10^3$		
	2 конечных элемента	4 конечных элемента	8 конечных элементов	2 конечных элемента	4 конечных элемента	8 конечных элементов
10^{-6}	13.83	13.61	13.60	13.81	13.59	13.58
10^{-5}	14.00	13.77	13.77	-	-	-
10^{-4}	15.44	15.22	15.21	-	-	-
10^{-3}	21.39	21.15	21.15	-	-	-
10^{-2}	27.29	27.12	27.12	-	-	-
10^{-1}	28.86	28.74	28.73	-	-	-

Из приведённых численных результатов (табл.1) можем сделать вывод о том, что учёт микрополярных свойств материала повышает частоты собственных колебаний по сравнению с классическим случаем. Следует также отметить, что по микрополярной теории по сравнению с классическим случаем, получаются новые добавочные частоты собственных колебаний стержня.

Заключение. Основные результаты данной работы следующие:

1. Построена прикладная модель динамики микрополярных (с независимыми полями перемещений и вращений) упругих тонких стержней с круговой осью.
2. Установлен вариационный принцип для задач собственных колебаний микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью.
3. Разработан вариант МКЭ для численного определения частот собственных колебаний микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью.
4. Установлено, что учёт микрополярных свойств материала стержня приводит к повышению частот собственных колебаний и появлению добавочных частот по сравнению с классическим случаем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах. Под общей редакцией: И.А. Биргера, Я.Г. Пановко, Т.1. М.: Изд-во "Машиностроение". 1968. 832с.

2. Кузьмин М.А., Лебедев Д.Л., Попов Б.Г. Решение задач механики методом конечных элементов. М.: Изд-во “Академкнига”. 2008. 160 с.
3. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Классическая модель статики упругих тонких стержней с круговой осью с учетом поперечных сдвигов и метод конечных элементов// Сб. трудов межд. конф. Актуальные проблемы механики сплошной среды. Цахкадзор, Армения. 2017. Изд-во НАН РА. С. 125-126.
4. Lakes R.S., Drugan W.J. Bending of a Cosserat elastic bar of square cross section - theory and experiment// J. Appl. Mech. 82(9). 2015. pp. 091002.
5. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Построение модели изгиба микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью и ее реализация методом конечных элементов// Вычислительная механика сплошных сред. 2020. Т. 13. № 3. С. 256-268.
6. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 1. С. 55-66.
7. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Доклады Российской академии наук. 2011. Т. 436. № 2. С. 195-198.
8. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. 383 p.
9. Галлагер Р. Метод конечных элементов. М.: Изд-во “Мир”. 1984. 428 с.
10. Крылов О.В. Метод конечных элементов и его приложение в инженерных расчетах. М.: Изд-во “Радио и связь”. 2002. 104 с.
11. Корепанов В.В., Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Аналитические и численные решения в рамках континуума Коссера как основа для постановки экспериментов по обнаружению моментных эффектов в материалах // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2. №4. С. 76–91.
12. Nakamura S., Benedict R.L., Lakes R.S. Finite element method for orthotropic micropolar elasticity// Intern. J. Eng. Sci. 1984. V. 22. № 3. P. 319-330.
13. Park S.K., Gao X.L. Bernoulli–Euler beam model based on a modified couple stress theory// Journal of Micromechanics and Microengineering, 16 (11). 2006. P. 2355 – 2359.
14. Жамакочян К.А., Саркисян С.О. Метод конечных элементов в расчетах на изгиб микрополярных упругих тонких пластин// Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 3. С. 375-383.
15. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель статической деформации микрополярного упругого стержня с круговой осью и метод конечных элементов //Актуальные проблемы прочности. Монография. Витебск: НАН Беларуси. 2018. Т. 1. Глава 14. С. 258-271.

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Оганесович - член-корр. НАН Армении, доктор физ.-мат. наук, профессор, (+374 93) 15 16 98. E-mail s_sargsyan@yahoo.com

Хачатрян Мелине Вардановна –кандидат физико-математических наук, тел. (+374 94) 61 82 13. E-mail khachatryanmeline@mail.ru

Поступила в редакцию 25.02.2022