ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика

УДК 62.50; 621.38

Doi: 10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-67

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ МНОГОЭТАПНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ МАНИПУЛЯТОРОМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА И УСЛОВИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ

А. А. Гукасян

Ключевые слова: манипулятор, процесс обслуживания, технологический процесс, промежуточные состояния, матрица управляемости.

A. A. Ghukasyan

Generalized Model of Multi-Stage Manipulator Service of Technological Process and Control Conditions

Key words: manipulator, maintenance process, technological process, intermediate states, controllability matrix

The results of mathematical modeling and research into the controllability of multi-stage maintenance by a manipulator of a technological process, which consists of moving or stationary objects (targets) and a multi-link manipulator with a variable structure and vector control, are presented. It is assumed that during the maintenance process, the dynamic characteristics of the manipulator, the phase state vector and the ability of the control system, depending on the mass of the transferred load or tool, may change at some finite time points. In the general case, a description of the process of servicing moving and stationary objects by a manipulator is given and controllability issues are studied in the case when the movement of the manipulator at each service interval is described by linear differential equations with constant coefficients of various sizes and with vector control, and the movements of the objects are given. The questions of controllability of the whole process are investigated depending on the controllability at each stage of the movement. The controllability matrix of the entire system, which combines a finite number of composite systems, is given. It is shown that the service process over the entire time interval is completely controllable if it is controllable over each service interval.

Ա. Ա. Ղուկասյան

Մանիպուլյատորի միջոցով բազմափուլ տեխնոլոգիական պրոցեսի մատակարարման ընդհանրական մոդելը և ղեկավարելիության պայմանները

Հիմնաբառեր. մանիպուլյատոր, մատակարարման պրոցես, տեխնոլոգիական պրոցես, միջանկյալ վիճակներ, ղեկավարելիության մատրիցա

Բերված են մաթեմատիկական մոդելավորման և մանիպուլյատորի միջոցով բազմափուլ տեխնոլոգիական պրոցեսի մատակարարման ղեկավարելիության հարցերի ուսումնասիրության արդյունքները, երբ տեխնոլոգիական պրոցեսը բաղկացած է շարժական կամ անշարժ օբյեկտներից և փոփոխական ստրուկտուրայով ու վեկտորական ղեկավարման բազմօղակ մանիպուլյատորից: Ենթադրրվում է, որ մատակարարման պրոցեսում մանիպուլյատորի դինամիկական բնութագրիչները, ֆազային վեկտորը և ղեկավարման համակարգի հնարավորությունները՝ կախված տեղափոխվող բեռի կամ սարքի զանգվածից, կարող է փոխվել ժամանակի վերջավոր պահերի: Ընդհանուր դեպքում բերված են մանիպուլյատորի միջոցով շարժական և անշարժ օբյեկտներին մատակարարման պրոցեսի նկարագրությունը և հետազոտվում է ղեկավարելիության հարցերը, երբ մանիպուլյատորի շարժումը մատակարարման յուրաքանչյուր փուլում նկարագրվում է տարբեր չափողականության հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումներով և վեկտորական ղեկավարման միջոցով, երբ տրված են օբյեկտների շարժումները: Ուսումնասիրվում է ամբողջ պրոցեսի ղեկավարելիության հարցը՝ կախված յուրաքանչյուր փուլի շարժման ղեկավարելիությունից: Բերված է ղեկավարելիության մատրիցան ամբողջ համակարգի համար, որը միավորում է վերջավոր թվով բաղադրյալ համակարգեր: Ցույց է տրված, որ մատակարարման պրոցեսը ժամանակի ամբողջ ինտերվալում հանդիսանում է լրիվ ղեկավարելի, եթե այն ղեկավարելի է մատակարարման յուրաքանչյուր ինտերվալում:

Приводятся результаты математического моделирования и исследования вопросов управляемости многоэтапного обслуживания манипулятором технологического процесса, который состоит из подвижных или неподвижных объектов (целей) и многозвенного манипулятора с переменной структурой и векторным управлением. Предполагается, что в процессе обслуживания, динамические характеристики манипулятора, фазовый вектор состояния и возможность системы управления в зависимости от массы переносимого груза или инструмента могут изменяться в некоторые конечные моменты времени. В общем случае приводится описание процесса обслуживания манипулятором подвижных и неподвижных объектов и исследуются вопросы управляемости в случае, когда движение манипулятора на каждом интервале обслуживания описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами различной размерности и с векторным управлением, а движения объектов заданы. Исследуются вопросы управляемости всего процесса в зависимости от управляемости на каждом этапе движения. Приведена матрица управляемости всей системы, объединяющей конечное число составных систем. Показано, что процесс обслуживания на всём промежутке времени является вполне управляемым, если он управляем на каждом интервале обслуживания.

Введение. Строится математическая модель технологического процесса обслуживания, который может быть реализован с использованием манипуляторов с программным управлением или адаптивного робота, оснащенного системой технического зрения, чувствительным элементом, а также другими элементами искусственного интеллекта. Применение робота в технологическом процессе обслуживания эффективно для выполнения, главным образом, вспомогательных операций производственного цикла, а также операций, выполняемых в экологически вредных и дискомфортных условиях. При моделировании автоматизированных производственных систем все элементы в системе обслуживания, то есть станки, манипуляторы, конвейеры, склады с деталями или другими технологическими инструментами могут быть рассмотрены как подвижные и неподвижные объекты (цели), состояния которых могут быть заданы или являться решениями некоторых дифференциальных уравнений, описывающих их движение [1-8]. Ниже приводятся результаты математического моделирования и исследования вопросов управляемости многоэтапного обслуживания манипулятором технологического процесса, который состоит из подвижных или неподвижных объектов (целей) и многозвенного манипулятора с переменной структурой и векторным управлением. Предполагается, что в процессе обслуживания, динамические характеристики манипулятора, фазовый вектор состояния и возможность системы управления в зависимости от массы переносимого груза или инструмента могут изменяться в некоторые конечные моменты времени [9, 10]. Задача манипулятора состоит в том, что он должен обслуживать непрерывную работу объектов в зависимости от технологического назначения. В общем случае приводится описание процесса обслуживания манипулятором подвижных и неподвижных объектов и исследуются вопросы управляемости в случае, когда движение манипулятора на каждом интервале обслуживания описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами различной размерности и с векторным управлением, а движения объектов заданы.

В работах [11-18] исследуются различные задачи оптимального обслуживания манипулятором технологического процесса. В [11] приведена модель управляемого технологического процесса, состоящего из подвижных конвейеров, тележки с различными деталями и адаптивным манипулятором. Манипулятор оптимальным образом обслуживает работу конвейеров нужными деталями, когда последовательность обслуживания определяется с помощью датчика усилий, расположенного во внутренней поверхности захватного устройства манипулятора. В [18] обслуживание технологического процесса осуществляется многозвенным манипулятором с векторным управлением. Движение манипулятора на каждом интервале обслуживания описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а движения объектов заданы. Здесь предполагается, что размерность матрицы динамических характеристик многозвенного манипулятора, размерность фазового вектора и матрицы возможности системы управления в процессе обслуживания не меняются. Определена матрица управляемости технологического процесса при векторном управлении манипулятора и приведены сравнения со скалярным управлением [13]. В рамках математической модели процесса обслуживания манипулятором технологического участка, разработанной в исследованиях [11,13-15,18], в работе [17], в частности, для трехэтапного обслуживания, исследуется возможность применения алгоритма оптимального управления манипулятора по быстродействию. На первом этапе движение манипулятора описывается уравнением второго порядка, на втором – третьего порядка, как электромеханическая модель манипулятора [19], а на третьем этапе – второго порядка с нефиксированной массой на захвате [9,10]. Применяя принцип максимума построен синтез оптимального обслуживания на каждом этапе. Оптимальный синтез обслуживания является объединением управлений для каждого этапа. Во всех исследованиях время нахождения манипулятора около каждого объекта не учитывается [11], то есть считается, что в момент времени t_i манипулятор обслуживает объект под номером i и мгновенно направляется к другому объекту (предположение имеет место, поскольку $\tau \ll T - t_0$ где $\tau -$ время нахождения манипулятора около объекта, а $\left(T - t_0\right)$ - время процесса обслуживания).

1. Описание модели обслуживания. Предполагаем, что движения объектов обслуживания заданы [13,14,18], а динамика движения манипулятора на каждом интервале $\left[t_{i-1}, t_i\right]$ $\left(i = 1, 2, ..., k\right)$ описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами различных размеров и с векторным управлением. Допускается, что возможности системы управления в процессе обслуживания на каждом интервале $\left[t_{i-1}, t_i\right]$, может меняться

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}^i + \mathbf{B}_i \mathbf{u}^i \text{, где } \mathbf{A}_i = \mathbf{A}\left(\boldsymbol{\omega}^i\right),\ \mathbf{B}_i = \mathbf{B}_i\left(\boldsymbol{\omega}^i\right)\ \left(i = 1, 2, \ldots, k\right) \tag{1.1}$$

Здесь элементы матриц $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{B}_i$ зависят от некоторого параметра $\omega^i \left(i = 1, 2, ..., k\right)$, который может меняться после каждой встречи с объектами. В практических задачах обслуживания параметром $\omega^i \in \left\{\Omega^i\right\}$, где $\left\{\Omega^i\right\}(i = 1, 2, ..., k)$ - область допустимых значений параметра ω^i, может являться масса переносимого манипулятором груза или инструмента [9,10,18].

Уравнения (1.1) на всем интервале обслуживания представим в виде

$$\left[\begin{array}{l}\dot{\mathbf{x}}^1=\mathbf{A}_1\mathbf{x}^1+\mathbf{B}_1\mathbf{u}^1, t\in[t_0,t_1]\\ \dot{\mathbf{x}}^2=\mathbf{A}_2\mathbf{x}^2+\mathbf{B}_2\mathbf{u}^2, t\in[t_1,t_2]\\ ----------\\ \dot{\mathbf{x}}^{k-1}=\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}^{k-1}+\mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}^{k-1}, t\in[t_{k-2},t_{k-1}]\\ \dot{\mathbf{x}}^k=\mathbf{A}_k\mathbf{x}^k+\mathbf{B}_k\mathbf{u}^k, t\in[t_{k-1},t_k=T]\end{array}\right. \tag{1.2}$$

Применяем следующие обозначения: k – количество интервалов обслуживания $[t_{i-1},t_i](i=1,2,...,k)$, $\mathbf{x}^i-n_i$-мерный фазовый вектор состояния манипулятора (состояния захвата манипулятора), который соответствует движению на интервале времени $[t_{i-1},t_i]$, $\mathbf{A}_i-(n_i\times n_i)$-мерная матрица с постоянными элементами $\left\{a_{l,j}^i\left(\omega^i\right)\right\}_{l,j=1}^{n_i,n_i}$ на интервале времени $[t_{i-1},t_i]$, характеризующими динамические свойства механической системы манипулятора в зависимости от параметра ω^i (здесь предполагается, что изменение параметра происходит скачкообразно в моменты времени $t_{i-1}\left(i=1,2,...,k\right)$), $\mathbf{B}_i-(n_i\times r_i)$ - мерная матрица с постоянными элементами $\left\{b_{l,j}^i\right\}_{l,j=1}^{n_i,r_i}$ на интервале времени $[t_{i-1},t_i]$, характеризующими возможность системы управления манипулятором на том же интервале времени $[t_{i-1},t_i]$, $\mathbf{u}^i-r_i\left(r_i\le n_i\right)$ - мерный вектор управления, $t\in[t_0,T]$ (t_0 - начальный, $t_k=T$ - конечный момент времени). Моменты времени $t_i\left(i=1,2,...,k\right)$ $\left(t_0<t_1<t_2<...<t_{k-1}<t_k=T\right)$ могут быть фиксированными или определяться из дополнительных условий. В [18] приведено описание в случае, когда в процессе обслуживания размерность матриц динамических характеристик манипулятора и возможности системы управления, а также размерность фазового вектора не меняются.

На каждом этапе обслуживания $[t_{i-1},t_i]\left(i=1,2,...,k\right)$, матрицы $\mathbf{A}_i,\mathbf{B}_i$ и векторы $\mathbf{x}^i,\mathbf{u}^i$ в (1.2) имеют вид

$$\mathbf{A}_i=\begin{pmatrix}a_{11}^i & a_{12}^i & \cdots & a_{1n_i}^i\\ a_{21}^i & a_{22}^i & \cdots & a_{2n_i}^i\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n_i1}^i & a_{n_i2}^i & \cdots & a_{n_in_i}^i\end{pmatrix}\quad \mathbf{B}_i=\begin{pmatrix}b_{11}^i & b_{12}^i & \cdots & b_{1r_i}^i\\ b_{21}^i & b_{22}^i & \cdots & b_{2r_i}^i\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ b_{n_i1}^i & b_{n_i2}^i & \cdots & b_{n_ir_i}^i\end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{x}^i=\left(x_1^i,x_2^i,...,x_{n_i}^i\right)^T,\mathbf{u}^i=\left(u_1,u_2,...,u_{r_i}\right)^T,\ \left(i=1,2,....k\right)$$

Движения объектов обслуживания в каждый промежуточный момент времени $t_i\left(i=1,2,...,k\right)$ заданы, и их состояние в n_i – мерном пространстве определим фазовым вектором $\mathbf{z}^i\left(i=1,2,...,k\right)$.

Пусть в пространстве состояния заданы произвольные начальное (при $t=t_0, i=1$) и конечное (при $t=T, i=k$) положения системы (1.2) в виде

$$\mathbf{x}^1\left(t_0\right)=\mathbf{x}^1_{t_0}, \mathbf{x}^k\left(t_k\right)=\mathbf{x}^k\left(T\right)=\mathbf{x}^k_T \tag{1.4}$$

где фазовый вектор $\mathbf{x}^1_{t_0}$ имеет размерность n_1, а $\mathbf{x}^k_T$ – размерность n_k.

В общем случае предполагается, что $n_1 \neq n_k, r_1 \neq r_k$ и в промежуточные моменты времени $t_i\ \left(i=1,2,\ldots,k-1\right)$, когда происходит переход из одного этапа обслуживания в другое, фазовые векторы составных систем (1.2) должны удовлетворять условиям:

$$\mathbf{x}^i\left(t_i\right)=\mathbf{z}^i\left(t_i\right)=\mathbf{x}^{i+1}\left(t_i\right), \left(i=1,2,\ldots,k-1\right) \tag{1.5}$$

где $\mathbf{z}^i\left(t_i\right)$ – фазовое состояние объектов в моменты времени $t_i\ \left(i=1,2,\ldots,k-1\right)$.

Условия (1.5) обеспечивают преемственность процесса [20,21] и означают, что конец движения манипулятора на интервале времени $t\in\left[t_{i-1},t_i\right]$ является началом движения на следующем интервале времени $t\in\left[t_i,t_{i+1}\right]$.

Не нарушая общности, предполагаем что $n_{i+1}>n_i$, $r_{i+1}>r_i$ $\left(r_i \le n_i, r_{i+1}\le n_{i+1}\right)$ $\left(i=1,2,\cdots,k-1\right)$. Для согласования размерности фазовых векторов на разных этапах движения, формально считаем, что движение на i - ом этапе происходит на n_{i+1}-мерном пространстве $R^{n_{i+1}}$, где последние $\left(n_{i+1}-n_i\right)$ компоненты фазового вектора $\mathbf{x}^i\left(t\right)$ тождественно равны нулю [14,15], то есть

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}^i\left(t\right)=\left(x^i_1,x^i_2,\cdots,x^i_{n_i},0_{n_i+1},0_{n_i+2},\cdots,0_{n_{i+1}}\right)^T,\\
&\mathbf{x}^{i+1}\left(t\right)=\left(x^{i+1}_1,x^{i+1}_2,\cdots,x^{i+1}_{n_i},x^{i+1}_{n_i+1},x^{i+1}_{n_i+2},\cdots,x^{i+1}_{n_{i+1}}\right)^T
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\left(\begin{aligned}
&x^{i+1}_1\left(t_i\right)=x^i_1\left(t_i\right),x^{i+1}_2\left(t_i\right)=x^i_2\left(t_i\right),\cdots,x^{i+1}_{n_i}\left(t_i\right)=x^i_{n_i}\left(t_i\right),\\
&x^{i+1}_{n_i+1}\left(t_i\right)\equiv 0,x^{i+1}_{n_i+2}\left(t_i\right)\equiv 0,\cdots,x^{i+1}_{n_{i+1}}\left(t_i\right)\equiv 0
\end{aligned}\right)$$

Аналогичным образом, можно формально увеличить размерность пространства состояний на $i+1$ этапе движений на величину $\left(n_i-n_{i+1}\right)$, когда $n_{i+1}<n_i\left(i=1,2,\cdots,k-1\right)$

Поскольку на каждом интервале времени $t \in [t_i, t_{i+1}]\,(i=1,2,...,k)$ движение манипулятора описывается системой линейных дифференциальных уравнений (1.1), то при надлежащем выборе управляющей вектор-функции $\mathbf{u}^i = \left(u_1, u_2, ..., u_{r_i}\right)^T$ из области допустимых управлений, имеем единственную траекторию движения манипулятора, удовлетворяющую условиям (1.4), (1.5). Полученные таким образом решения $\mathbf{x}(t) = \left\{\mathbf{x}^i(t)\right\}$ уравнений (1.2), где $\mathbf{x}^i(t) = \left(x_1^i, x_2^i, ..., x_{n_i}^i\right)^T\,(i=1,2,...,k)$, являются непрерывными и кусочно-дифференцируемыми, то есть всегда, кроме моментов времени $t_i\,(i=1,2,...,k)$, решение $\mathbf{x}(t)$ является непрерывно дифференцируемым.

2. Управляемость процесса обслуживания. Важным вопросом для дальнейшего исследования процесса обслуживания манипулятором объектов (технологического участка) являются вопросы управляемости, как на отдельных этапах обслуживания, так и управляемость всей системы на всем интервале времени [13-15,18].

Каждая система из совокупности (1.2)

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{A}_i\mathbf{x}^i + \mathbf{B}_i\mathbf{u}^i \quad (i=1,2,...,k) \tag{2.1}$$

при векторном управлении $\mathbf{u}^i = \left(u_1^i(t), u_2^i(t), ..., u_{r_i}^i(t)\right)^T$, является вполне управляемой на интервале $t \in [t_i, t_{i+1}]\,(i=1,2,...,k)$, если ранг матрицы управляемости равен n_i [22-24], то есть

$$rang\left(\mathbf{B}_i \quad \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i \quad \mathbf{A}_i^2\mathbf{B}_i \cdots \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{B}_i\right) = n_i\,(i=1,2,...,k) \tag{2.2}$$

и неуправляемой на интервале $t \in [t_i, t_{i+1}]\,(i=1,2,...,k)$, если

$$rang\left(\mathbf{B}_i \quad \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i \quad \mathbf{A}_i^2\mathbf{B}_i \cdots \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{B}_i\right) < n_i\,(i=1,2,...,k) \tag{2.3}$$

Матрица управляемости $\left(\mathbf{B}_i\ \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i\ \mathbf{A}_i^2\mathbf{B}_i\ \cdots \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{B}_i\right)$- имеет размерность $\left(n_i \times n_i r_i\right)$. В случае скалярного управления манипулятором матрица $\left(\mathbf{b}_i\ \mathbf{A}_{ii}\mathbf{b}\ \mathbf{A}_i^2\mathbf{b}_i\ \cdots \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{b}_i\right)$ управляемости на интервале обслуживания $t \in [t_i, t_{i+1}]$ $(i=1,2,...,k)$ имеет размерность $\left(n_i \times n_i\right)$ [13]. В случае (2.3) вопросы управляемости (2.1) исследуются в некотором подпространстве (подпространстве управляемости) фазового пространства меньшей размерности [23].

Автономная система (2.1) на интервале времени $[t_{i-1}, t_i]$ называется вполне управляемой (обладает свойством управляемости), если для любой пары точек $\mathbf{x}^i(t_{i-1})$ и

$\mathbf{x}^i(t_i)(i=1,2,...,k)$ существует ограниченное измеримое векторное управление $\mathbf{u}^i(t)=\left(u_1^i(t),u_2^i(t),...,u_{r_i}^i(t)\right)^T, t\in[t_{i-1},t_i]$, переводящее систему (2.1) из точки $\mathbf{x}^i(t_{i-1})$ в точку , $\mathbf{x}^i(t_i)(i=1,2,...,k)$, при размерности $r_i\le n_i$ [22-25]. Из определения вполне управляемости системы (2.1) и условий (1.4), (1.5), следует обобщенное определение вполне управляемости совокупности (1.2) на интервале времени $t\in[t_0,T]$, при векторном управлении $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$.

Обобщенное определение управляемости. Совокупность (1.2) на интервале времени $[t_0,T]$ является вполне управляемой (обладает свойством управляемости), если для любого начального $\mathbf{x}^1(t_0)$ и конечного $\mathbf{x}^k(T)$ состояний существует допустимое векторное управление $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$ $t\in[t_0,T]$, переводящее (1.2) из начального состояния в конечное, с обеспечением в промежуточные моменты времени $t_i\left(t_0<t_1<t_2<...<t_{k-1}<t_k=T\right)$ условий $\mathbf{x}^i(t_i)=\mathbf{x}^{i+1}(t_i)(i=1,2,...,k-1)$. Управление при этом строится как объединение управлений $\mathbf{u}_p=\left\{\mathbf{u}^i(t)\right\}$ $(i=1,2,...,k-1)$ манипулятором на каждом этапе обслуживания, то есть как элемент $\sum_{i=1}^{k-1}r_i$ -мерного векторного пространства $R^{\sum_{i=1}^{k-1}r_i}$ ($\mathbf{u}_p\in R^{\sum_{i=1}^{k-1}r_i}$).

Нетрудно убедиться, что процесс обслуживания (1.2) является вполне управляемым на интервале времени $[t_0,T]$, если он вполне управляем на каждом этапе и неуправляемым, если хотя бы одна из систем (1.2) не вполне управляема на своем интервале определения.

Для доказательства этого утверждения предполагаем, что на интервале времени $[t_0,T]$ имеется только один промежуточный момент t_1, где происходит изменение динамических характеристик механической системы манипулятора, возможность системы управления и размерность фазового вектора [13-15,18].

Движение манипулятора на каждом интервале $[t_0,t_1],[t_1,T](k=2)$ описывается следующими уравнениями

$$\left[\begin{array}{l}\dot{\mathbf{x}}^1=\mathbf{A}_1\mathbf{x}^1+\mathbf{B}_1\mathbf{u}^1, t_0\le t\le t_1\\ \dot{\mathbf{x}}^2=\mathbf{A}_2\mathbf{x}^1+\mathbf{B}_2\mathbf{u}^2, t_1\le t\le t_2=T\end{array}\right., \tag{2.4}$$

где начальные и конечные условия, а также условия преемственности имеют вид

$$\mathbf{x}^1(t_0)=\mathbf{x}^1_{t_0}, \mathbf{x}^1(t_1)=\mathbf{z}^1(t_1)=\mathbf{x}^2(t_1), \mathbf{x}^2(t_2)=\mathbf{x}^2_T \tag{2.5}$$

Матрицы $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$ и векторы $\mathbf{x}^i$, $\mathbf{u}^i$ в общем случае, имеют структуры (1.3), а условие управляемости и неуправляемости (2.2), (2.3), соответственно при $i = 1,2$.

Дальнейшего исследования вопросов о вполне управляемости процесса обслуживания, описывающимися объединением систем (2.4) при $n_2 > n_1$ на всем промежутке времени $[t_0, T]$, по аналогии с [13-15], формально рассмотрим движение в пространстве состояния $R^{n_1+n_2}$ размерности (n_1+n_2), где движение на первом этапе, то есть в течение времени $[t_0, t_1]$, происходит в подпространстве R^{n_1}, а на втором этапе $[t_1, T]$ в подпространстве R^{n_2}. Подпространства R^{n_1} и R^{n_2} $\left(R^{n_1} \bigcup R^{n_2} = R^{n_1+n_2}\right)$ не имеют внутренних точек, а при $t = t_1$ имеют общие граничные точки.

Для описания движения в $R^{n_1+n_2}$ в течение времени $t \in [t_0, t_2], (t_2 = T)$ введем (n_1+n_2)- мерный вектор состояния $\mathbf{y}$ и (r_1+r_2)-мерный вектор управления $\mathbf{v}$ следующим образом

$$\mathbf{y} = \left(x_1^1, \quad x_2^1, \quad \dots \quad, x_{n_1}^1, \quad x_1^2, \quad x_2^2, \quad \dots \quad, x_{n_2}^2\right)^T, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{v} = \left(u_1^1, \quad u_2^1, \quad \dots \quad, u_{r_1}^1, \quad u_1^2, \quad u_2^2, \quad \dots \quad, u_{r_2}^2\right)^T,$$

где $\mathbf{y}^1 = \left(x_1^1, \quad x_2^1, \quad \dots, \quad x_{n_1}^1, \quad 0, \quad 0, \quad \dots, \quad 0\right)^T$, при $t_0 \le t \le t_{1-}$ (2.7)

$$\mathbf{v}^1 = \left(u_1^1, \quad u_2^1, \quad \dots \quad, u_{r_1}^1, \quad 0, \quad 0, \quad \dots \quad, 0\right)^T,$$

и $\mathbf{y}^2 = \left(0, \quad 0, \quad \dots, \quad 0, \quad x_1^2, \quad x_2^2, \quad \dots, \quad x_{n_2}^2\right)^T$, при $t_{1+} \le t \le t_2$ (2.8)

$$\mathbf{v}^2 = \left(0, \quad 0, \quad \dots \quad, 0, \quad u_1^2, \quad u_2^2, \quad \dots \quad, u_{r_2}^2\right)^T,$$

В момент времени t_1, из (2.5) следует, что $\left|\mathbf{y}^1(t_1)\right| = \left|\mathbf{y}^2(t_1)\right|$.

Введем блочную матрицу $\mathbf{C}$ с размерностью $\left((n_1+n_2)\times(n_1+n_2)\right)$ и матрицу $\mathbf{D}$ с размерностью $\left((n_1+n_2)\times(r_1+r_2)\right)$, соответственно

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

где матрицы $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i$ определяются из (1.3) и $r_2 > r_1$.

В соответствии с (2.6)-(2.9) матрицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ можно представить в виде суммы следующих матриц

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} \end{pmatrix},\ \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} \end{pmatrix},\ \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

(матрицы $\mathbf{0}_{li}\left(l, j = 1,2\right)$ с нулевыми элементами в (2.10) имеют размерности $\left(n_l \times n_j\right)$, а $\mathbf{0}_{ii} - \left(n_i \times r_i\right)$ в (2.11)).

С учетом (2.6) - (2.11) системы уравнений (2.4) в общем случае можно представить в виде

$$\left[\begin{array}{l} \dot{\mathbf{y}}^1 = \mathbf{C}_1\mathbf{y}^1 + \mathbf{D}_1\mathbf{v}^1, t \in \left[t_0, t_1\right] \\ \dot{\mathbf{y}}^2 = \mathbf{C}_2\mathbf{y}^2 + \mathbf{D}_2\mathbf{v}^2, t \in \left[t_1, t_2\right] \end{array}\right. \tag{2.12}$$

Из (2.6)-(2.11) следует, что первую систему уравнений в (2.12) можно рассматривать на всем промежутке времени $\left[t_0, t_2\right]$ с нулевыми элементами в $\left[t_1, t_2\right]$ (с нулевым продолжением), а вторую систему в $\left[t_0, t_2\right]$ с нулевыми элементами в $\left[t_0, t_1\right]$ [13,14].

Начальными и конечными условиями для задач управления (2.12), соответственно, являются

$$\mathbf{y}^1\left(t_0\right) = \left(x_1^1\left(t_0\right), x_2^1\left(t_0\right), ..., x_n^1\left(t_0\right), 0, 0, ..., 0\right)^T, \mathbf{y}^1\left(t_1\right) = \left(x_1^1\left(t_1\right), x_2^1\left(t_1\right), ..., x_n^1\left(t_1\right), 0, 0, ..., 0\right)^T$$

$$\mathbf{y}^2\left(t_1\right) = \left(0, 0, ..., 0, x_1^2\left(t_1\right), x_2^2\left(t_1\right), ..., x_n^2\left(t_1\right)\right)^T, \mathbf{y}^2\left(t_2\right) = \left(0, 0, ..., 0, x_1^2\left(t_2\right), x_2^2\left(t_2\right), ..., x_n^2\left(t_2\right)\right)^T$$

$$\left|\mathbf{y}^1\left(t_1\right)\right| = \left|\mathbf{y}^2\left(t_1\right)\right|, \left(x_i^1\left(t_1\right) = x_i^2\left(t_1\right), i = 1, 2, ..., n\right) \tag{2.13}$$

Объединяя системы (2.12) с учетом (2.6)-(2.13), процесс обслуживания формально можно описать уравнением

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{D}\mathbf{v}, t \in \left[t_0, t_2\right] \tag{2.14}$$

где векторы $\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ и матрицы $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ определяются из (2.6)-(2.8) и (2.9)-(2.11), соответственно.

Поскольку в каждый момент времени $t \in \left[t_0, t_2\right]$ (2.14) либо совпадает с первым уравнением из (2.12), либо со вторым, то для переменных и параметров (2.6)-(2.13) матрицы управляемости (2.2) для (2.12) имеют следующие структуры, соответственно

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{C}_1\mathbf{D}_1 & \mathbf{C}_1^2\mathbf{D}_1 \cdots \mathbf{C}_1^{n_1-1}\mathbf{D}_1 \end{pmatrix}, \text{ при } t \in [t_0, t_1] \tag{2.15}$$

и $\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_2 & \mathbf{C}_2\mathbf{D}_2 & \mathbf{C}_2^2\mathbf{D}2 \cdots \mathbf{C}_2^{n_2-1}\mathbf{D}_2 \end{pmatrix}$, при $t \in [t_1, t_2]$ (2.16)

$$rang\begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{C}_1\mathbf{D}_1 & \mathbf{C}_1^2\mathbf{D}_1 \cdots \mathbf{C}_1^{n_1-1}\mathbf{D}_1 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{A}_1^{n_1-1}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$rang\begin{pmatrix} \mathbf{D}_2 & \mathbf{C}_2\mathbf{D}_2 & \mathbf{C}_2^2\mathbf{D}2 \cdots \mathbf{C}_2^{n_2-1}\mathbf{D}_2 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{A}_2^{n_2-1}\mathbf{B}_2 \end{pmatrix}$$

Обозначим через $\mathbf{M}_1^1, \mathbf{M}_2^2$ следующие матрицы

$$\mathbf{M}_1^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{A}_1^{n_1-1}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_2^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{A}_2^{n_2-1}\mathbf{B}_2 \end{pmatrix}$$

Здесь матрицы $\mathbf{M}_1^1$ и $\mathbf{M}_2^2$ имеют размерности $\left((n_1+n_2)\times r_1 n_1\right)$ и $\left((n_1+n_2)\times r_2 n_2\right)$ соответственно. С учетом (2.2), (2.3, (2.15), (2.16), $rang\mathbf{M}_i\ (i=1,2)$ совпадает с (2.2) и (2.3), при $i=1,2$.

Объединяя матрицы $\mathbf{M}_1^1$ и $\mathbf{M}_2^2$, получим

$$\mathbf{M}^1 = \{\mathbf{M}_1^1, \mathbf{M}_2^2\} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_1^{n_1-1}\mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_2^{n_2-1}\mathbf{B}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Блочная диагональная матрица $\mathbf{M}^1$ имеет размерность $\left((n_1+n_2)\times(n_1r_1+n_2r_2)\right)$, где $\mathbf{M}_{11} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1 \cdots \mathbf{A}_1^{n_1-1}\mathbf{B}_1 \end{pmatrix}$ совпадает с матрицей управляемости первой системы совокупности (2.12), а $\mathbf{M}_{22} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_2 \cdots \mathbf{A}_2^{n_2-1}\mathbf{B}_2 \end{pmatrix}$ - с матрицей управляемости второй системы.

Замечание. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ данные матрицы одинакового строения, то в общем случае $rang(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le rang\mathbf{A} + rang\mathbf{B}$ и неравенство является точным, если [26]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

В рассматриваемом случае (2.15)- (2.17), имеем

$$rang\mathbf{M}^1 = rang\mathbf{M}_{11} + rang\mathbf{M}_{22}. \tag{2.18}$$

В случае скалярного управления $(r_1, r_2 = 1)$ блочная диагональная матрица $\mathbf{M}^1$ является квадратной, имеет размерность $((n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2))$ и определитель вычисляется следующим образом [14,15,26]

$$\det \mathbf{M}^1 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{M}_{11} \times \mathbf{M}_{22}) = \det \mathbf{M}_{11} \times \det \mathbf{M}_{22} \tag{2.19}$$

Здесь $\det \mathbf{M}^1 \neq 0$, если $rang\mathbf{M}^1 = (n_1 + n_2)$, где $rang\mathbf{M}_{11} = n_1$, $rang\mathbf{M}_{22} = n_2$

Из (2.19) следует, что движение механической системы манипулятора или процесс обслуживания, описываемый объединением (2.12), вполне управляем на интервале времени $t \in [t_0, T]$ тогда и только тогда, когда обе системы в (2.12) при $r_1, r_2 = 1$ и при (2.5) вполне управляемы на интервалах времени $[t_0, t_1]$ и $[t_1, t_2]$, соответственно, и неуправляемы, если одна из систем в (2.12) не вполне управляема на своем интервале определения, то есть $\det \mathbf{M}^1 = \det \mathbf{M}_{11} \times \det \mathbf{M}_{22} = 0$, если $rang\mathbf{M}_{11} < n_1$, или $rang\mathbf{M}_{22} < n_2$. Эти результаты совпадают с результатами исследования [14,15].

При $1 < r_1 \leq n_1$ и $1 < r_2 \leq n_2$ $(r_1 \neq r_2)$ для рассматриваемого случая имеем (2.18). Если системы в (2.4) при (2.5) вполне управляемы на своих интервалах движений $[t_0, t_1]$ и $[t_1, t_2]$, то тогда $rang\mathbf{M}_{11} = n_1$ и $rang\mathbf{M}_{22} = n_2$ $(rang\mathbf{M}_{11} < n_1$, или $rang\mathbf{M}_{22} < n_2$ в противном случае). По аналогии с [13-15] в качестве матрицы управляемости для объединения (2.4) на промежутке времени $[t_0, t_2]$ можно принять матрицу $\mathbf{M}^1$. Следовательно, процесс обслуживания вполне управляем, если

$rang\mathbf{M}_{11} = n_1$, $rang\mathbf{M}_{22} = n_2$ и

$$rang\mathbf{M}^1 = rang\mathbf{M}_{11} + rang\mathbf{M}_{22} = n_1 + n_2 \tag{2.20}$$

и не вполне управляем на интервале времени $[t_0, t_2]$, если

$$rang\mathbf{M}^1 < n_1 + n_2 \; (rang\mathbf{M}_{11} < n_1, \text{ или } rang\mathbf{M}_{22} < n_2), \tag{2.21}$$

где $\mathbf{M}_{11} = \left(\mathbf{B}_i \;\; \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i \;\; \mathbf{A}_i^2\mathbf{B}_i \;\cdots \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{B}_i\right)$ и $\mathbf{M}_{22} = \left(\mathbf{B}_2 \;\; \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \;\; \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_2 \;\cdots \mathbf{A}_2^{n-1}\mathbf{B}_2\right)$.

Предположим, что утверждение об управляемости верно при $(k-1)$ этапах движения. То есть матрица управляемости для объединенных систем (1.2) при $(k-1)$, имеет вид

$$\mathbf{M}^{k-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{M}_{k-1k-1} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Здесь матрица $\mathbf{M}_{jj}$ $(j = 1,2,\ldots,k-1)$ является матрицей управляемости системы под номером $j\left(j = 1,2,\cdots,k-1\right)$ из (1.2) на интервале времени движения $\left[t_{j-1}, t_j\right]$ и имеет размерность $\left(n_j \times n_j r_j\right)$, а матрица управляемости $\mathbf{M}^{k-1}$ объединенной системы на интервале времени $\left[t_0, t_{k-1}\right]$ имеет размерность $\left[\left(\sum_{j=1}^{k-1} n_j\right) \times \left(\sum_{j=1}^{k-1} n_j r_j\right)\right]$. По аналогии с (2.18) $rang\mathbf{M}^{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} n_j$. Матрицы $\mathbf{0}_{ij}\left(i,j = 1,2,\ldots k-1, i \neq j\right)$ с нулевыми элементами имеют размерности $\left(n_i \times n_j r_j\right)$. соответственно.

Для объединения системы уравнений (1.2), описывающих $(k-1)$ этапов движения, рассмотрим пространства состояния размерностью $\sum_{j=1}^{k-1} n_j$ $\left(R^{\sum_{j=1}^{k-1} n_j}\right)$.

Вектор состояния $\mathbf{y}$ и вектор управления $\mathbf{u}$ представим в виде

$$\mathbf{y} = \left(x_1^1,\, x_2^1,\, \cdots,\, x_{n_1}^1,\, x_1^2,\, x_2^2,\, \cdots,\, x_{n_2}^2,\, \cdots,\, x_1^{\kappa-1},\, x_2^{\kappa-1},\, \cdots,\, x_{n_{\kappa-1}}^{\kappa-1}\right)^T$$

$$\mathbf{v} = \left(u_1^1,\, u_2^1,\, \cdots,\, u_{r_1}^1,\, u_1^2,\, u_2^2,\, \cdots,\, u_{r_2}^2,\, \cdots,\, u_1^{\kappa-1},\, u_2^{\kappa-1},\, \cdots,\, u_{r_{\kappa-1}}^{\kappa-1}\right)^T \tag{2.23}$$

$\mathbf{y}$ имеет размерность $\sum_{j=1}^{k-1} n_j$, а $\mathbf{u}-$ $\sum_{j=1}^{k-1} r_j$.

На каждом интервале движения имеем

$$\mathbf{y}^1 = \left(x_1^1,\;\; x_2^1,\;\; \cdots,\;\; x_{n_1}^1,\;\; 0,\;\; 0,\;\; \cdots,\;\; 0,\;\; \cdots,\;\; 0,\;\; 0,\;\; \cdots,\;\; 0\right)^T,$$

при $t_0 \le t \le t_{1-}$

$$\mathbf{v}^1=\left(u_1^1,\quad u_2^1,\quad \cdots,\quad u_{r_1}^1,\quad 0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0\right)^T$$

$$\mathbf{y}^2=\left(0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0,\quad x_1^2,\quad x_2^2,\quad \cdots,\quad x_{n_2}^2,\quad \cdots,\quad 0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0\right)^T,$$

при $t_{1+}\le t\le t_{2-}$ (2.24)

$$\mathbf{v}^2=\left(0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0,\quad u_1^2,\quad u_2^2,\quad \cdots,\quad u_{r_2}^2,\quad \cdots,\quad 0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0\right)^T$$

……………………………………………………………………………………

$$\mathbf{y}^{\kappa-1}=\left(0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0,\quad \cdots,\quad x_1^{\kappa-1},\quad x_2^{\kappa-1},\quad \cdots,\quad x_{n_{k-1}}^{\kappa-1}\right)^T,$$

при $t_{(\kappa-2)+}\le t\le t_{\kappa-1}$

$$\mathbf{v}^{k-1}=\left(0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad \cdots,\quad 0,\quad \cdots,\quad u_1^{\kappa-1},\quad u_2^{\kappa-1},\quad \cdots,\quad u_{r_{\kappa-1}}^{\kappa-1}\right)^T$$

По аналогии с (2.6)-(2.8) в промежуточные моменты времени t_j $\left(j=1,2,\ldots,k-2\right)$ вектор состояния $\mathbf{y}$ удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{t\to t_j-}\mathbf{y}=\lim_{t\to t_j-}\left(\mathbf{x}^1,\quad \mathbf{x}^2,\quad \cdots,\quad \mathbf{x}^j,\quad \mathbf{x}^{j+1},\quad \cdots,\quad \mathbf{x}^{k-1}\right)^T=\\
&=\left(\mathbf{0},\quad \mathbf{0},\quad \cdots,\quad \mathbf{0},\quad \mathbf{x}^j,\quad \mathbf{0},\quad \cdots,\quad \mathbf{0}\right)^T=\mathbf{y}^j\left(t_j\right),\\
&\lim_{t\to t_j+}\mathbf{y}=\lim_{t\to t_j+}\left(\mathbf{x}^1,\quad \mathbf{x}^2,\quad \cdots,\quad \mathbf{x}^j,\quad \mathbf{x}^{j+1},\quad \cdots,\quad \mathbf{x}^{k-1}\right)^T=\\
&=\left(\mathbf{0},\quad \mathbf{0},\quad \cdots,\quad \mathbf{0},\quad \mathbf{x}^{j+1},\quad \mathbf{0},\quad \cdots,\quad \mathbf{0}\right)^T=\mathbf{y}^{j+1}\left(t_j\right),
\end{aligned}\right.\quad \left(j=1,2,\ldots,k-2\right).$$

Параметры (2.9) - (2.11) в рассматриваемом случае имеют вид

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1}\\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{A}_{k-1}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1}\\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{B}_{k-1}\end{pmatrix} \qquad (2.25)$$

на интервале времени $t\in\left[t_0,t_{\kappa-1}\right]$.

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{0}_{k-1k-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{0}_{k-1k-1} \end{pmatrix}, \qquad (2.26)$$

при $t \in [t_0, t_1]$.

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{0}_{k-1k-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{0}_{k-1k-1} \end{pmatrix}, \qquad (2.27)$$

при $t \in [t_1, t_2]$.

На интервале $t \in [t_{\kappa-2}, t_{\kappa-1}]$, имеем

$$\mathbf{C}_{k-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{A}_{k-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{k-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{B}_{k-1} \end{pmatrix} \qquad (2.28)$$

Матрицы $\mathbf{M}_1^1, \mathbf{M}_2^2, \ldots, \mathbf{M}_{k-1}^{k-1}$ имеют аналогичные структуры (2.15), (2.16) с размерностями $(n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1}) \times r_j n_j, (j = 1, 2, \cdots, k-1)$.

В частности

$$\mathbf{M}_1^1=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_1^{n_1-1}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{0}_{k-1k-1}\end{pmatrix}, \text{ при } t\in[t_0,t_1] \tag{2.29}$$

$$\mathbf{M}_2^2=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1}\\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{A}_2^{n_2-1}\mathbf{B}_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{0}_{k-1k-1}\end{pmatrix}, \text{ при } t\in[t_1,t_2] \tag{2.30}$$

………………………………………………………………

$$\mathbf{M}_{k-1}^{k-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1}\\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{B}_{k-1} & \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{B}_{k-1} & \mathbf{A}_{k-1}^2\mathbf{B}_{k-1} & \cdots & \mathbf{A}_{k-1}^{n_{k-1}-1}\mathbf{B}_{k-1}\end{pmatrix}, \text{ при } t\in[t_{\kappa-2},t_{\kappa-1}] \tag{2.31}$$

Объединяя матрицы $\mathbf{M}_1^1$, $\mathbf{M}_2^2,\ldots,$ $\mathbf{M}_{k-1}^{k-1}$, получим (2.22)

$$\mathbf{M}^{k-1}=\left\{\mathbf{M}_1^1,\mathbf{M}_2^2,\ldots,\mathbf{M}_{k-1}^{k-1}\right\}=\begin{pmatrix}\mathbf{M}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1}\\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{M}_{k-1k-1}\end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

где $\mathbf{M}_{11}=\left(\mathbf{B}_1\ \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\ \mathbf{A}_1^2\mathbf{B}_1\ \cdots\mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{B}_1\right)$, $\mathbf{M}_{22}=\left(\mathbf{B}_2\quad \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\quad \mathbf{A}_2^2\mathbf{B}_2\cdots\mathbf{A}_2^{n_2-1}\mathbf{B}_2\right)$,…, $\mathbf{M}_{k-1k-1}=\left(\mathbf{B}_{k-1}\quad \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{B}_{k-1}\quad \mathbf{A}_{k-1}^2\mathbf{B}_{k-1}\cdots\mathbf{A}_{k-1}^{n_{k-1}-1}\mathbf{B}_{k-1}\right)$

$$rang\mathbf{M}^{k-1}=rang\mathbf{M}_{11}+rang\mathbf{M}_{22}+\ldots+rang\mathbf{M}_{k-1k-1}=\left(n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}\right).$$

На последнем этапе движения манипулятора динамические характеристики механической системы изменяются в момент времени $t=t_{\kappa-1}$ и манипулятор движется из точки $\mathbf{x}^k\left(t_{k-1}\right)$ в конечную точку $\mathbf{x}^k\left(T\right)$ (напомним, что $\mathbf{x}^{k-1}\left(t_{k-1}\right)=\mathbf{x}^k\left(t_{k-1}\right)$ (1.5)).

Система уравнений движения на интервале времени $t\in\left[t_{\kappa-1},t_\kappa\right]$ совпадает с последней системой из (1.2), то есть

$$\dot{\mathbf{x}}^k=\mathbf{A}_k\mathbf{x}^k+\mathbf{B}_k\mathbf{u}^k, \quad \text{при } \mathbf{x}^{k-1}\left(t_{k-1}\right)=\mathbf{x}^k\left(t_{k-1}\right) \tag{2.33}$$

На интервале $t\in\left[t_{\kappa-1},t_\kappa\right]$ система (2.33) вполне управляема, если

$$rang\mathbf{M}_{kk}=rang\left(\mathbf{B}_k\quad \mathbf{A}_k\mathbf{B}_k\quad \mathbf{A}_k^2\mathbf{B}_k\quad \ldots\quad \mathbf{A}_k^{n_k-1}\mathbf{B}_k\right)=n_k \tag{2.34}$$

На всем интервале времени $\left[t_0, T\right]$ матрица управляемости $\mathbf{M}^k$ объединения систем (1.2), с учетом (2.29), (2.33), имеет следующую структуру

$$\mathbf{M}^k = \left\{\mathbf{M}_1^1, \mathbf{M}_2^2, \cdots, \mathbf{M}_{k-1}^{k-1}, \mathbf{M}_k^k\right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} & \mathbf{0}_{1k} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} & \mathbf{0}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{M}_{k-1k-1} & \mathbf{0}_{k-1k} \\ \mathbf{0}_{k1} & \mathbf{0}_{k2} & \mathbf{0}_{k3} & \cdots & \mathbf{0}_{k-1k-1} & \mathbf{M}_{kk} \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

Матрица $\mathbf{M}^k$ имеет размерность $\left[\left(\sum_{j=1}^{k} n_j\right) \times \left(\sum_{j=1}^{k} n_j r_j\right)\right]$, где

$$\mathbf{M}_k^k = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \cdots & \mathbf{0}_{1k-1} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \cdots & \mathbf{0}_{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}_{k-11} & \mathbf{0}_{k-12} & \mathbf{0}_{k-13} & \cdots & \mathbf{0}_{k-1k-1} \\ \mathbf{B}_k & \mathbf{A}_k\mathbf{B}_k & \mathbf{A}_k^2\mathbf{B}_k & \cdots & \mathbf{A}_k^{n_k-1}\mathbf{B}_k \end{pmatrix} \text{ при } t \in \left[t_{\kappa-1}, T\right]$$

$$\max rang\mathbf{M}^k = \max rang\sum_{i=1}^{k}\mathbf{M}_{ii} = \left(n_1 + n_2 + \cdots + n_k\right).$$

Следовательно, из (2.21), (2.22), (2.35) следует, что система (1.2) с промежуточными состояниями (1.5) на всем интервале времени $\left[t_0, T\right]$ вполне управляема, если все системы (2.1) управляемы на интервалах своего определения, и не вполне управляема, если хотя бы одна система из (2.1) не вполне управляема на своем интервале определения. То есть, процесс обслуживания манипулятором на всем интервале времени вполне управляем, если каждый этап обслуживания вполне управляем и неуправляем, если хотя бы на одном интервале обслуживания процесс неуправляемый.

Заключение. Описывается модель технологического процесса многоэтапного обслуживания, состоящего из управляемого многозвенного манипулятора с переменной структурой и векторным управлением. Манипулятор должен автоматически обслуживать непрерывную работу подвижных или неподвижных объектов (целей). Предполагается, что элементы и размерность матрицы динамических характеристик многозвенного манипулятора, размерность фазового вектора движений, а также матрицы возможности системы управления в процессе обслуживания могут меняться в некоторые моменты времени. В частном случае, когда движение манипулятора на каждом интервале обслуживания описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а движения объектов заданы, исследуются вопросы управляемости всего процесса в зависимости от управляемости на каждом этапе движения. Показано, что процесс обслуживания на всём промежутке времени является вполне управляемым, если он управляем на каждом интервале обслуживания и неуправляем, если он неуправляем хотя бы на одном интервале. Приведена матрица управляемости всей системы, объединяющей конечное число составных систем. Обобщены результаты исследований, полученных в работах [13,14,17,18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989, 363 с.
2. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов. //Известия АН СССР, МТТ, №4, 1986, с.21-29.
3. Градецкий В.Г., Гукасян А.А., Грудев А.И., Черноусько Ф.Л. О влиянии упругой податливости конструкции робота на их динамику. //Изв. АН СССР МТТ, 1985, №3, с. 63-71.
4. Гукасян А.А., Мачкалян Р.Н. Кинематика движения манипулятора с упругими соединительными узлами в криволинейний системе координат. Изв. НАН РА, Механика. 2007. Т. 60. №3. С. 62-67.
5. Гукасян А.А. О кинематике многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и с упругими звеньями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №3. С.68-83.
6. Гукасян А.А. Кинематическое управление движением схвата двухзвенного упругого манипулятора. //Доклады НАН Армении. 2014. Т.114. № 4. С.316-324.
7. Гукасян А.А. О пространственном положении и деформации упругих звеньев манипулятора. // Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №4. С.53-64.
8. Гукасян А.А. О двух подходах к исследованию кинематики упругих манипуляторов. // Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №2. С.53-67.
9. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Об управляемом движении материальной точки с нефиксированной массой. //Известия НАН РА, Механика, №1, 2002, с.75-81.
10. Гукасян А.А., Матевосян А.Г. Задача оптимального управления движением точки переменной массы. //В сборнике научных трудов “Математический анализ и его приложения” АГПУ им. Х.Абовяна, Ереван 2003, вып.3, с.29-40.
11. Гукасян А.А. Об одной задаче оптимального моделирования технологического процесса, обслуживаемого манипуляционным роботом. //Известия АН Арм. ССР, Механика, т.39, №6, 1986, с.39-49.
12. Гукасян А.А. О моделировании процесса обслуживания манипулятором технологического участка. В сб. трудов межд. конф. «Экстремальная робототехника (ЭР-2016)», Санкт-Петербург, 2016, с. 153-159.
13. Гукасян А.А. О математическом моделировании процесса обслуживания и условия ее управляемости. Изв. НАН РА, Механика. 2017. Т. 70. №3. С. 26-38.
14. A A Ghukasyan and A Ya Ordyan On a model of the processes of maintaining a technological area by a manipulator. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012026 doi: 10.1088/1742-6596/991/1/01202.
15. Гукасян А. А., Ордян А. Я. Об одной модели процесса обслуживания манипулятором технологического участка. В сб. трудов межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Цахкадзор, Армения, 2017, с. 75-76.

16. Гукасян А.А., Ордян А. Я. Об оптимизации процесса обслуживания манипулятором технологического процесса. В сб. трудов 9-ой межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Горис, Армения, 2018, с.143-147.
17. Гукасян А. А., Ордян А. Я. О задачах синтеза оптимального управления в процессе обслуживания. В сб. трудов 6-ой межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Дилижан, Армения, 2019, октябрь 1-6, с. 124-128.
18. Гукасян А.А. Об управляемости процесса многоэтапного обслуживания технологического участка манипулятора с векторным управлением. //Доклады НАН Армении. 2021. Т.121. № 3. с.181-191.
19. Гукасян А.А. Об оптимальном управлении манипулятором с электромеханическими приводными системами. Межвузовский сборник научных трудов "Прикладная математика", ЕГУ, N: 7, 1988, с. 86-105..
20. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами. //ДАН СССР, т.176, №4, 1967, с.754-756.
21. Величенко В.В. Условия оптимальности в задачах управления с промежуточными условиями //ДАН СССР, т.174, №5, 1967. с.1011-1013.
22. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983, 392с.
23. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968, 475 с.
24. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978, 551 с.
25. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 574 с.
26. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: физматлит. 2004, 560 с.

Сведения об авторе:

Гукасян А.А.– Институт механики НАН Армении, Горисский Государственный Университет**.**
E-mail: ghukasyan10@yandex.com.

Поступила в редакцию 10.02.2022