ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика
УДК 539.3
Doi:10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-48

О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СТРИНГЕРОВ С УПРУГИМИ ТЕЛАМИ

Григорян М.С., Мхитарян С.М.

Ключевые слова: упругая полуплоскость, упругая полоса, упругий клин, стрингер, плоская деформация, антиплоская деформация, интегральное уравнение.

Գրիգորյան Մ.Ս., Մխիթարյան Ս.Մ.
Ստրինգերների և առաձգական մարմինների կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրների մի դասի ճշգրիտ լուծման մասին

Հիմնաբառեր: առաձգական կիսահարթություն, առաձգական շերտ, առաձգական սեպ, ստրինգեր, հարթ դեֆորմացիա, հակահարթ դեֆորմացիա, ինտեգրալ հավասարում:

Բարակապատ տարրերի տեսքով ստրինգերների և առաձգական հոծ մարմինների կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրների մոդիֆիկացված դրվածքով, երբ նախապես տրված է ստրինգերների կետերի հորիզոնական առաձգական տեղափոխությունների ռեժիմը, դիտարկվում է ճշգրտորեն լուծվող այդպիսի խնդիրների մի դաս: Ստրինգեր-առաձգական հիմքեր համակարգերի կոշտության հարցերի հետազոտությունը՝ ստրինգերների վրա ազդող ուժային գործոնների որոշումով, որոնք ապահովում են դրանց առաձգական տեղափոխությունների նախապես տրված ռեժիմը, ունի տեսական և գործնական նշանակություն: Առաձգական հոծ մարմինները վերցվում են կիսահարթության, շերտի և սեպի տեսքով, որոնք գտնվում են հարթ կամ հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում: Դիտարկվող կոնտակտային խնդիրների լուծումները բերված են լոգարիթմական սիմետրիկ կորիզով Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումների լուծումների, որոնց ճշգրիտ (փակ) լուծումները կառուցվում են Չեբիշևի բազմանդամներ պարունակող սպեկտրալ առնչությունների օգնությամբ:

Grigoryan M.S., Mkhitaryan S.M.
On precise solution of one class of problems on contact interaction of stringer with elastic bodies

Key words: elastic halfplane, elastic strip, elastic wedge, stringer, plane deformation, antiplane deformation, integral equation.

In modified problem statement on contact interaction of thin-walled elements in the form of the stringers with massive elastic bodies, when the regime of elastic horizontal displacements of stringer points is previously solved problem is considered. These problems have theoretical and practical interest when studying the questions of rigidity of stringers-elastic bases systems with the subsequent determination acting on the stringers of the force factors providing given them the regime of the elastic displacements. The massive elastic bodies are taken in the form of half-plane, strip and wedge, being in the conditions of plane or antiplane deformation. The solutions of the considered contact problems are brought to Fredholm integral equations of the first kind with symmetrical logarithmic kernel. Their precise (closed) solutions are built with the help of spectral correlations in Chebyshev polynomials.

В модифицированной постановке задач о контактном взаимодействии тонкостенных элементов в виде стрингеров с массивными упругими телами, когда заранее задан режим упругих горизонтальных перемещений точек стрингеров, рассмотрен один класс таких задач, решаемых точно. Эти задачи представляют теоретический и практический интерес при исследовании вопросов жесткости систем стрингеры - упругие основания с последующим определением действующих на стрингеры силовых факторов, обеспечивающих заданный их режим упругих перемещений. Массивные упругие тела берутся в виде полуплоскости, полосы и клина, находящихся в условиях плоской или антиплоской деформации. Решения рассматриваемых контактных задач сведены к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода с симметрическим логарифмическим ядром. Их точные (замкнутые) решения построены при помощи спектральных соотношений для многочленов Чебышева.

Введение. Задачи контактного взаимодействия между стрингерами и массивными упругими телами составляют обширную область теории контактных задач механики деформируемого твердого тела. Они будучи связаны с важными для инженерной практики вопросами о передаче нагрузок от тонкостенных элементов в виде стрингеров к массивным деформируемым телам, в последние десятилетия получили интенсивное развитие. Такому развитию способствовала также необходимость исследования вопросов концентрации напряжений с резко изменяющимися градиентами вокруг стрингеров, которые существенно влияют на прочностные характеристики многих инженерных конструкций и их деталей.

Первые исследования контактных задач стрингеров с массивными упругими телами восходят к известной статье Мелана [1]. Впоследствии существенное продвижение в этой области достигнуто в работах [2-4]. Основные результаты по задачам контактного взаимодейтвия между стрингерами и массивными упругими телами, полученные до 1976г., и методы их решения подытожены в коллективной монографии [5]. В этом направлении укажем также на монографии [6-8].

В задачах указанного типа в рамках модели одномерного упругого континуума стрингера [1] обычно требуется определить касательные контактные напряжения под стрингерами и осевых напряжений в их сечениях по заданной системе внешних сил. Но при исследовании вопросов жесткости системы стрингер - упругое основание представляет теоретический и практический интерес и такая постановка таких задач, когда необходимо заранее задать режим осевых упругих перемещений точек стрингеров и определить, по дифференциальному уравнению их деформирования, действующие на стрингеры соответствующие силовые факторы, обеспечивающие заданный режим перемещений. В такой постановке в [9] рассмотрена задача о контакте произвольного конечного числа и периодичекой системы стрингеров с упругой полуплоскостью, где обсуждены также некоторые частные случаи. В указанной постановке в [10] построено точное (замкнутое) решение задачи о контактном взаимодействии конечного стрингера с упругой полосой при антиплоской деформации.

В настоящей статье в указанной постановке получены точные решения одного класса задач о контактном взаимодействии стрингеров с массивными упругими телами в форме упругой полуплоскости при плоской деформации и в форме упругой полосы и упругого клина при антиплоской деформации. При этом рассматриваются случаи контакта двух одинаковых симметрично расположенных и симметрично нагруженных стрингеров с упругими телами отмеченных форм. Обсуждаемые задачи формулируются в виде интегральных уравнений Фредгольма первого рода с симметрическим логарифмическим ядром и методом ортогональных многочленов строятся их замкнутые решения.

1. **Постановка задач и вывод определяющих интегральных уравнений (ОИУ).** Пусть упругая полуплоскость $\Pi_{-} = \left\{-\infty < x < \infty;\ -\infty < y \le 0\right\}$,

отнесенная к правой прямоугольной системе координат Oxy и находящаяся в условиях плоской деформации, обладает модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν. Пусть, далее, полуплоскость Π_- на своей границе $y=0$ по совокупности отрезков $L=[-a,-b]\cup[b,a]$ усилена двумя одинаковыми и относительно начала координат O симметрически расположенными стрингерами высоты h с модулем Юнга E_s и коэффициентом Пуассона ν_s. Предположим, что стрингер по отрезку на своей верхней грани $y=h$ в направлении оси Ox нагружена касательными силами интенсивности $\tau_+(x)$, т.е. .., а в его концевых сечениях $x=b$ и $x=a$ - сосредоточенными горизонтальными силами, соответственно, P_b и P_a в противоположных направлениях. Стрингер же по $[-a,-b]$ границы полуплоскости Π_- нагружен симметрически, так что $\tau_+(-x)=-\tau_+(x)$ $x\in[-a,-b]\cup[b,a]$, а сосредоточенные силы по величине равны P_b и P_a, но направлены противоположно им. Будем считать, что наперед задан режим горизонтальных упругих перемещений точек стрингеров в виде функции $f(x)$ $(x\in L)$, т.е. $u(x,y)\big|_{y=-0}=f(x)$, причем $f(-x)=-f(x)$ $(x\in L)$, где $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция на L, т.е. $f(x)\in C^2(L)$. Требуется определить касательные контактные напряжения под стрингерами $\tau_-(x)$, причем $\tau_{yx}\big|_{y=-0}=\tau_-(x)$, $\tau_-(-x)=-\tau_-(x)$ $(x\in L)$, касательные силы $\tau_+(x)$ на грани $y=h$ стрингеров $(\tau_+(-x)=-\tau_+(x)$ $x\in L)$, сосредоточенные силы P_a и P_b, обеспечивающие заданный режим упругих перемещений точек стрингеров в виде функции $f(x)$.

При этом для полноты постановки задачи необходимо, кроме упругих перемещений точек стрингеров, еще задать равнодействующие P касательных контактных под стрингерами:

$$\int_{-a}^{-b}\tau_-(s)\,ds=-P,\quad \int_{b}^{a}\tau_-(s)\,ds=P, \tag{1.1}$$

где P - известная величина.

Выведем ОИУ поставленной задачи. С этой целью воспользуемся формулой для горизонтальных перемещений граничных точек упругой полуплоскости Π_-:

$$u(x,-0)=\vartheta\left(\int_{-a}^{-b}+\int_{b}^{a}\right)\ln\frac{1}{|x-s|}\tau_-(s)\,ds \tag{1.2}$$

$$\vartheta = \frac{2\left(1-\nu^2\right)}{\pi E}, \ -\infty < x < \infty; \ \tau_-\left(-x\right) = -\tau_-\left(x\right); \ u\left(-x,-0\right) = -u\left(x,-0\right),$$

которая сразу получается из формулы для соответствующих вертикальных перемещений опять граничных точек полуплоскости Π_- [11] по принципу взаимности работ. Теперь, приняв во внимание свойство нечетности функций $u(x,-0)$ и $\tau_-\left(x\right)$, формулу (1.1) преобразуем к виду

$$u\left(x,-0\right) = \vartheta\int_b^a \ln\frac{x+s}{|x-s|}\tau_-\left(s\right)ds \qquad \left(0 < x < \infty\right).$$

Отсюда, реализуя граничное условие $u(x,-0) = f(x)$ $(b < x < a)$, придем к следующему ОИУ Фредгольма первого рода с симметрическим логарифмическим ядром:

$$\vartheta\int_b^a \ln\frac{x+s}{|x-s|}\tau_-\left(s\right)ds = f\left(x\right) \qquad \left(x \in \left(b,a\right)\right), \tag{1.3}$$

откуда определяется неизвестная функция $\tau_-\left(x\right)$ - касательные контактные напряжения под стрингерами.

Далее обратимся к стрингерам. Так как стрингеры физически и геометрически одинаковы, относительно начала координат расположены симметрически и симметрически нагружены, то ограничимся только правым стрингером по отрезку $b \le x \le a$. Дифференциальное уравнение деформирования этого стрингера в рамках его модели одноосного напряженного состояния [1] имеет вид [8]

$$hE_s^*\frac{d^2u_s}{dx^2} = \tau_-\left(x\right) - \tau_+\left(x\right); \left(b < x < a\right); \quad E_s^* = \frac{E_s}{1-\nu_s^2}, \tag{1.4}$$

где $u_s = u_s\left(x\right)$ - горизонтальные упругие перемещения точек стрингера по отрезку $\left[b,a\right]$. При обобщенном плоском напряженном состоянии следует формально положить $\nu_s = 0$. Вводя в рассмотрение осевое усилие $S = S\left(x\right)$ в сечении x стрингера, причем $S\left(x\right) = \sigma_x h$, где σ_x - осевое напряжение в сечении x стрингера, и приняв во внимание закон Гука $\sigma_x = E_s^*\varepsilon_s = E_s^*\frac{du_s}{dx}$ $\left(b < x < a\right)$, для определения $S\left(x\right)$ при помощи (1.4) получим следующую простейшую граничную задачу:

$$\left\{\frac{dS}{dx} = \tau_-\left(x\right) - \tau_+\left(x\right) \quad \left(b < x < a\right) \qquad S\left(x\right)\Big|_{x=b} = P_b, \quad S\left(x\right)\Big|_{x=a} = P_a. \right. \tag{1.5}$$

Отсюда находим

$$S(x)=\int_b^x\left[\tau_-(s)-\tau_+(s)\right]ds+P_b \quad (b\le x\le a).$$

После того как построено решение $\tau_-(x)$ ОИУ (1.3) при условии (1.1), из (1.4), согласно условию контакта $u_s(x)=u(x,-0)=f(x)$ $(b\le x\le a)$, сразу находим

$$\tau_+(x)=\tau_-(x)-hE_s^*f''(x) \qquad (b<x<a). \tag{1.6}$$

Кроме того, так как

$$S(x)=\sigma_x h=hE_s^*f'(x),\ (b\le x\le a), \tag{1.7}$$

то

$$\sigma_x=E_s^*f'(x),\ P_a=hE_s^*f'(a);\ \ P_b=hE_s^*f'(b). \tag{1.8}$$

Таким образом, после решения ОИУ (1.3) при условии (1.1), основные силовые характеристики стрингеров будут определяться по формулам (1.6)-(1.8).

Далее перейдем к безразмерным величинам, полагая

$$\xi=x/a,\ \eta=s/a;\ k=b/a;\ \varphi_\pm(\xi)=\vartheta\tau_\pm(a\xi);\ g(\xi)=f(a\xi)/a;$$
$$S_0(\xi)=S(a\xi)/hE_s^*,\ \sigma_x^{(0)}(\xi)=\sigma_x(a\xi)/E_s^*;\ P_a^{(0)}=P_a/hE_s^*,\ P_b^{(0)}=P_b/hE_s^*.$$

В результате, ОИУ (1.3) преобразуется к виду

$$\int_k^1\ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\varphi_-(\eta)d\eta=g(\xi) \qquad (k<\xi<1), \tag{1.9}$$

а формулы (1.6)-(1.8)- к видам соответственно

$$\varphi_+(\xi)=\varphi_-(\xi)-\lambda g''(\xi) \quad (k<\xi<1),\quad \lambda=h\vartheta E_s^*/a \tag{1.10}$$

$$S_0(\xi)=g'(\xi),\ \ \sigma_x^{(0)}(\xi)=g'(\xi);\ \ P_a^{(0)}=g'(1),\ P_b^{(0)}=g'(k).$$

Условие же равновесия правого стрингера согласно (1.1) перейдет в следующее условие:

$$\int_k^1\varphi_-(\eta)d\eta=P_0; \qquad (P_0=\vartheta P/a). \tag{1.11}$$

Таким образом, в разбираемой задаче основными уравнениями в безразмерных величинах будут (1.9)-(1.11).

В изложенной выше постановке рассмотрим также задачу о контактном взаимодействии двух одинаковых полубесконечных стрингеров с упругой полуплоскостью.

Пусть граница $y=0$ этой полуплоскости по совокупности отрезков $L=(-\infty,-a]\cup[a,\infty)$ усилена двумя одинаковыми полубесконечными стрингерами. Пусть, далее, на верхних гранях $y=h$ стрингеров действуют одинаковые по величине, но противоположные по направлению касательные силы интенсивности $\tau_+(x)$ $\left(\tau_+(-x)=-\tau_-(x)\;\; x\in L\right)$, а в концевых точках $x=\pm a$ действуют одинаковые по величине, но противоположные по направлению, сосредоточенные горизонтальные силы величины P_a. Здесь также примем, что заранее задан режим упругих горизонтальных перемещений точек стрингеров в виде функции $f(x)\in C^2$ $\left((-\infty,-a]\cup[a,\infty)\right)$, причем $f(-x)=-f(x)$ и $f(x)=o(1)$ при $|x|\to\infty$. Требуется определить силовые факторы $\tau_\pm(x)$, σ_x и P_a, обеспечивающие заданный режим перемещений.

Приступив к выводу основных уравнений обсуждаемый задачи, для горизонтальных перемещений $u(x,-0)$ граничных точек упругой полуплоскости Π_- будем иметь

$$u(x,-0)=\vartheta\left(\int_{-\infty}^{-a}+\int_{a}^{\infty}\right)\ln\frac{1}{|x-s|}\tau_-(s)\,ds=$$

$$=\vartheta\int_{a}^{\infty}\ln\frac{x+s}{|x-s|}\tau_-(s)\,ds\,(a\le x<\infty)\qquad\left(\tau_-(x)=-\tau_-(x)\qquad(\infty<x<\infty)\right).$$

Так как по постановке задачи $u(x,-0)=f(x)$ $(a\le x<\infty)$, то отсюда получим следующее ОИУ задачи:

$$\vartheta\int_{a}^{\infty}\ln\frac{x+s}{|x-s|}\tau_-(s)\,ds=f(x)\;\;(a<x<\infty).\tag{1.12}$$

Обращаясь к стрингерам, рассмотрим равновесие части $[a,x]$ правого полубесконечного стрингера. Можем записать

$$-T_a+\int_a^x\tau_+(s)\,ds-\int_a^x\tau_-(x)\,dx+\sigma_x h=0,$$

откуда

$$\sigma_x=\frac{1}{h}\left[T_a-\int_a^x\tau_+(s)\,ds+\int_a^x\tau_-(s)\,ds\right]\;\;(a\le x<\infty).$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие $\lim\limits_{x\to\infty}\sigma_x = 0$, откуда вытекает, что

$$T_a = \int\limits_a^\infty \left[\tau_+(s) - \tau_-(s)\right] ds. \tag{1.13}$$

Дифференциальное уравнение же деформирования правого полубесконечного стрингера имеет вид (1.4), но на интервале (a,∞). Далее поступив совершенно аналогично сделанному выше, получим, что после определения $\tau_-(x)$ из ОИУ (1.12), основные силовые факторы, действующие на правый стрингер определятся по формулам

$$\tau_+(x) = \tau_-(x) - hE_s^* f''(x), \quad \sigma_x = E_s^* f'(x)\frac{n!}{r!(n-r)!}, \ (a < x < \infty) \tag{1.14}$$

$T_a = hE_s^* f'(a)$.

Далее в ОИУ (1.12) введем безразмерные величины

$\xi = a/x$, $\eta = a/s$; $\tau_0(\xi) = \vartheta\tau(a/\xi)/\xi^2$, $f_0(\xi) = f(a/\xi)/a$.

В результате, ОИУ (1.12) перейдет в следующее ОИУ:

$$\int\limits_0^1 \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\tau_0(\eta)d\eta = f_0(\xi) \quad (0<\xi<1), \tag{1.15}$$

а условие (1.13)- в условие

$$\int\limits_0^1 \varphi_0(\eta)d\eta = T_0;\ T_0 = \int\limits_0^1 q_0(\eta)d\eta - T_a^{(0)};\ q_0(\eta) = \frac{\vartheta}{\eta^2}\tau + \left(\frac{a}{\eta}\right);\ T_a^{(0)} = \frac{\vartheta T_a}{a}. \tag{1.16}$$

Указанные безразмерные величины можно ввести также в формулах (1.14). На этом однако останавливаться не будем. Итак, решение рассматриваемой задачи свелось к решению ОИУ (1.15)-(1.16).

Перейдем к задаче о контакте двух стрингеров с упругой полосой при анти-плоской деформации. Пусть упругая полоса $\Omega_- = \{-\infty < x < \infty;\ -H \le y \le 0\}$ высоты H и модуля сдвига G отнесена к правой прямоугольной системе координат Oxy. Пусть, далее, полоса на своей границе $y = 0$ по совокупности отрезков $L = [-a,-b] \cup [b,a]$ усилена двумя одинаковыми стрингерами высоты h и модулями сдвига G_s, а по грани $y = -H$ жестко защемлена. Верхние грани стрингеров симметрически нагружены касательными силами интенсивности $\tau_+(x)$, причем $\tau_+(-x) = -\tau_+(x)$, а в сечениях $x = \pm a$ и $x = \pm b$ действуют касательные сосредоточенные силы $T_{\pm a}$ и $T_{\pm b}$, причем $T_{-a}=-T_a$, $T_{-b}=-T_b$. Считается, что под действием этих нагрузок система стрингеры-полоса, точнее система длинноленточные стрингеры-упругий слой, находится в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy. В описанной задаче опять примем, что наперед задан режим упругих перемещений $u(x,-0)$ точек стрингеров в направлении оси Oz в виде функции $f(x)\in C^2([-a,-b]\cup[b,a])$, причем $f(-x)=-f(x)$. Кроме того, как и выше, заданы равнодействующие P касательных контактных напряжений под стрингерами, т.е. имеют место условия (1.1). Требуется определить действующие на стрингеры силовые факторы $\tau_{\pm}(x)$, $P_{\pm a}$ и $P_{\pm b}$, обеспечивающие заданный режим их перемещений.

Приступив к выводу основных уравнений описанной задачи, сначала запишем выражение упругих перемещений $u(x,-0)$ в направлении оси Oz граничных точек полосы $y=0$ от касательных сил интенсивности $\tau_{-}(x)$, полученное методом преобразования Фурье [10]

$$u(x,-0)=\frac{1}{\pi G}\left(\int_{-a}^{-b}+\int_{b}^{a}\right)\ln\operatorname{cth}\left(\frac{\pi|x-s|}{4H}\right)\tau_{-}(s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{\pi G}\int_{b}^{a}\ln\left(\frac{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi|x-s|}{4H}\right)}{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi(x+s)}{4H}\right)}\right)\tau_{-}(s)\,ds\qquad(-\infty<x<\infty).$$

Исходя из последнего, реализуем граничное условие $u(x,-0)=f(x)$ $(b<x<a)$, в результате чего относительно $\tau_{-}(x)$ придем к следующему ОИУ:

$$\frac{1}{\pi G}\int_{b}^{a}\ln\left(\frac{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi|x-s|}{4H}\right)}{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi(x+s)}{4H}\right)}\right)\tau_{-}(s)\,ds=f(x)\ \ (b<x<a).\tag{1.17}$$

Уравнение (1.17) должно рассматриваться при втором условии (1.1).

Обращаясь теперь к вопросу определения силовых факторов, действующих на стрингеры, сначала запишем дифференциальное уравнение деформирования правого стрингера при антиплоской деформации [12]:

$$hG_s\frac{d^2u_s}{dx^2}=\tau_{-}(x)-\tau_{+}(x)\ \ (b<x<a),\tag{1.18}$$

где $u_s = u_s(x)$- упругие перемещения точек правого стрингера в направлении оси Oz. Теперь очевидно, что после решения ОИУ (1.17), вследствие условия контакта $u_s(x) = u(x,-0) = f(x)$ $(b < x < a)$, функция $\tau_+(x)$ сразу определится из (1.18):

$$\tau_+(x) = \tau_-(x) - hG_s f''(x) \quad (b < x < a). \tag{1.19}$$

А усилия $S(x) = h\tau_{xz}$ в сечениях правого стрингера и сосредоточенные силы T_a и T_b определятся по формулам

$$\begin{gathered} S(x) = \int_b^x \left[\tau_-(s) - \tau_+(s)\right] ds + T_b \quad (b \le x \le a); \\ T_b = hG_s f'(b); \quad T_a = hG_s f'(a). \end{gathered} \tag{1.20}$$

Далее введем безразмерные величины

$$t = \pi x/H, \; u = \pi s/H; \; c_0 = \pi b/H, \; d_0 = \pi a/H;$$

$$\tau_0(\xi) = \frac{1}{G}\tau(H\xi/\pi); \; f_0(\xi) = \frac{\pi}{H} f(H\xi/\pi).$$

Тогда ОИУ (1.17) преобразуется в следующее ОИУ:

$$\frac{1}{\pi}\int_{c_0}^{d_0} \ln\frac{\operatorname{sh}(t/2) + \operatorname{sh}(u/2)}{\left|\operatorname{sh}(t/2) - \operatorname{sh}(u/2)\right|}\tau_0(u)\,du = f_0(t) \quad (c_0 < t < d_0),$$

а условие (1.1) - в следующее условие:

$$\int_{c_0}^{d_0} \tau_0(u)\,du = T_0, \qquad (T_0 = \pi P/Gh).$$

Эти уравнения преобразуем дальше, полагая

$$\xi = \operatorname{sh}(t/2), \; \eta = \operatorname{sh}(u/2), \; \omega_0(\xi) = 2\tau_0(2\operatorname{arcsh}\xi)\Big/\sqrt{1+\xi^2}, \; \gamma_0 = \operatorname{sh}(c_0/2),$$

$$g_0(\xi) = f_0(2\operatorname{arcsh}\xi); \; t = 2\operatorname{arcsh}\xi = 2\ln\left(\xi + \sqrt{1+\xi^2}\right); \; \delta_0 = \operatorname{sh}(d_0/2);$$

В результате придем к ОИУ

$$\frac{1}{\pi}\int_{\gamma_0}^{\delta_0} \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\omega_0(\eta)\,d\eta = g_0(\xi) \quad (\gamma_0 < \xi < \delta_0), \tag{1.21}$$

и к условию

$$\int_{\gamma_0}^{\delta_0} \omega_0(\eta) d\eta = T_0. \tag{1.22}$$

Таким образом, поставленная задача окончательно описывается ОИУ (1.21)-(1.22).

Указанные безразмерные величины можно ввести также в уравнениях (1.19)-(1.20).

В постановке предыдущей задачи рассмотрим также задачу о контакте двух одинаковых полубесконечных стрингеров с упругой полосой $\Omega_- = \{-\infty < x < \infty; \ -H \le y \le 0\}$ модуля G и высоты H. Здесь предполагается, что прикрепленные на границе полосы $y = 0$ по совокупности полубесконечных отрезков $L = \{-\infty < x < -a; \ a < y < \infty\}$ стрингеры на своих верхних гранях $y = h$ нагружены касательными силами $\tau_{yx}\big|_{y=h-0} = \tau_+(x)$ $\left(x \in L; \ \tau_+(-x) = -\tau_+(x)\right)$, а в своих сечениях $x = \pm a$ - сосредоточенными горизонтальными силами $T_{\pm a}$ $(T_{-a} = -T_a)$. Опять при заданном режиме упругих перемещений стрингеров $u(x,-0) = f(x)$ $\left(f(x) \in C^2\left((-\infty, -a] \cup [a, \infty)\right)\right)$, $f(-x) = -f(x)$ требуется определить функции $\tau_\pm(x)$, силы $T_{\pm a}$ и осевые усилия $S(x) = \tau_{zx} h$ в стрингерах с модулем сдвига G_s.

На основании результатов предыдущей задачи имеем

$$u(x,-0) = \frac{1}{\pi G}\left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty}\right) \ln \operatorname{cth}\left(\frac{\pi|x-s|}{4H}\right) \tau_-(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{\pi G}\int_a^{\infty} \ln\left(\frac{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi|x-s|}{4H}\right)}{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi(x+s)}{4H}\right)}\right) \tau_-(s)\, ds \qquad (0 < x < \infty).$$

Отсюда при помощи условия $u(x,-0) = f(x)$ $\left(x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)\right)$ придем к следующему ОИУ:

$$\frac{1}{\pi G}\int_a^{\infty} \ln\left(\frac{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi|x-s|}{4H}\right)}{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi(x+s)}{4H}\right)}\right) \tau_-(s)\, ds = f(x) \ \ \left(x \in (a, \infty)\right).$$

Здесь введем безразмерные величины

$$t=\pi x/H,\ u=\pi s/H;\ c=\pi a/H;\ \tau_0(t)=\frac{1}{G}\tau_-(tH/\pi);\ f_0(t)=\frac{\pi}{H}f(tH/\pi).$$

Тогда после простых преобразований будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\int_c^\infty \ln\frac{\operatorname{sh}(t/2)+\operatorname{sh}(u/2)}{\left|\operatorname{sh}(t/2)-\operatorname{sh}(u/2)\right|}\tau_0(u)\,du=f_0(t)\quad (t\in(c,\infty)).$$

Далее опять положим

$$\xi=\operatorname{sh}(t/2)/\operatorname{sh}(c/2),\ \eta=\operatorname{sh}(u/2)/\operatorname{sh}(c/2);\ g_0(\xi)=f_0\left(2\operatorname{arcsh}\left(\eta\operatorname{sh}(c/2)\right)\right);$$

$$\omega_0(\eta)=2\operatorname{sh}(c/2)\Big/\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(c/2)\eta^2}\ \tau_0\left(2\operatorname{arcsh}\left(\eta\operatorname{sh}(c/2)\right)\right);$$

$$t=2\operatorname{arcsh}\left(\xi\operatorname{sh}(c/2)\right)=2\ln\left[\xi\operatorname{sh}(c/2)+\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(c/2)\xi^2}\right].$$

В результате ОИУ рассматриваемой задачи представим формулой

$$\frac{1}{\pi}\int_1^\infty \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\tau_0(\eta)\,d\eta=g_0(\xi)\quad (1<\xi<\infty). \tag{1.23}$$

Преобразуем также условие (1.13). В только что введенных безразмерных координатах оно принимает вид

$$\int_c^\infty \tau_0(u)\,du=T_0,\quad T_0=\frac{(T_+-T_a)\pi}{HG};\ T_+=\int_a^\infty \tau_+(s)\,ds;$$

а в координатах ξ,η - вид

$$\int_1^\infty \omega_0(\eta)\,d\eta=T_0. \tag{1.24}$$

После решения ОИУ (1.23)-(1.24) силовые характеристики стрингеров определяется как выше. Отметим, что, как и выше, ОИУ (1.23), можно преобразовать к виду (1.15).

Наконец, при антиплоской деформации рассмотрим задачу контактного взаимодействия между двумя одинаковыми стрингерами и клиновидным телом $\Omega=\{0\le r<\infty;\ -\alpha\le\varphi\le\alpha;\ -\infty<z<\infty\}$, отнесенным к цилиндрической системе координат r,φ,z с полюсом в вершине O клина Ω. Предполагается, что клин обладает модулем сдвига G и на своих гранях $\varphi=\pm\alpha$ на отрезках $b\le r\le a$ усилен двумя одинаковыми стрингерами модуля G_s и высоты h. Как выше, считается, что стрингеры нагружены симметрически относительно биссектрисы клина $\varphi=0$. А именно, верхняя грань стрингера на грани $\varphi=\alpha$ клина Ω по отрезку $b \le r \le a$ нагружена касательными силами интенсивности $\tau_+(r)$ $(b \le r \le a)$, направленными по оси Oz, а в сечениях $r = a$ и $r = b$ опять в направлении оси Oz действуют сосредоточенные силы P_a и P_b соответственно. Стрингер на грани клина $\varphi = -\alpha$ нагружен такими же силами, одинаковыми по величине, но противоположными по направлению. Считается, что под воздействием этих силовых факторов система стрингеры-клин находится в условиях антиплоской деформации в направлении оси Oz с базовой плоскостью (r, φ). Предположим, что опять заранее задан режим упругих перемещений стрингеров в направленными оси Oz $u(r, \alpha) = f(r) \in C^2(b, a)$ и требуется определить касательные контактные напряжения $\tau_{\varphi r} = \tau_-(r)$ $(b < r < a)$, касательные силы $\tau_+(r)$ и сосредоточенные силы P_a и P_b таким образом, чтобы они обеспечили заданный режим перемещений точек стрингеров $f(r)$. При этом, как выше, считается, что заданы также равнодействующие P касательных контактных напряжений под стрингерами, т.е. должно выполняться условие

$$\int_b^a \tau_-(r)\,dr = P. \tag{1.25}$$

Приступив к выводу основных уравнений описанной задачи, предварительно построим решение следующей вспомогательной первой граничной задачи для плоского клина $\omega = \{0 \le r < \infty;\ -\alpha \le \varphi \le \alpha\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (0 < r < \infty; -\alpha < \varphi < \alpha) \\ \tau_{r\varphi}\Big|_{\varphi = \pm\alpha} = \dfrac{G}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi = \pm\alpha} = \tau(r) \quad (0 < r < \infty); \end{cases} \tag{1.26}$$

где $u = u(r, \varphi)$ - упругие перемещение точек клина ω в направленными оси Oz при антиплоской деформации, $\tau_{r\varphi}$ - компонента касательных напряжений, а $\tau(r)$ - считается заданной функцией. Решение граничной задачи (1.26) построим методом интегрального преобразования Меллина, введя в рассмотрение трансформанты Меллина:

$$\bar{u} = \bar{u}(p, \varphi) = \int_0^\infty u(r, \varphi) r^{p-1} dr,\ \ \bar{\tau} = \bar{\tau}(p) = \int_0^\infty \tau(r) r^p dr \quad (-1 - \varepsilon < \operatorname{Re} p < 0,\ \varepsilon > 0).$$

При этом полоса регулярности преобразования Меллина, как в [13], была определена условием сходимости интеграла $\overline{\tau}(p)$. В трансформантах Меллина граничная задача (1.26) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overline{u}}{d\varphi^2} + p^2\overline{u} = 0 \quad (-\alpha < \varphi < \alpha); \\ \left.\dfrac{d\overline{u}}{d\varphi}\right|_{\varphi=\pm\alpha} = \overline{\tau}(p)/G. \end{cases}$$

Решение этой граничной задачи представляется формулой

$$\overline{u}(p,\varphi) = \frac{\overline{\tau}(p)}{Gp}\frac{\sin(p\varphi)}{\cos(p\alpha)} \quad (-\alpha \le \varphi \le \alpha),$$

откуда

$$-p\overline{u}(p,\varphi) = -\frac{\overline{\tau}(p)}{G}\frac{\sin(p\varphi)}{\cos(p\alpha)} \quad (-\alpha \le \varphi \le \alpha).$$

Теперь по формуле обращения преобразования Меллина

$$\frac{d\overline{u}(r,\alpha)}{dr} = -\frac{1}{2\pi i Gr}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{\tau}(p)\operatorname{tg}(p\alpha) r^{-p} dp =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i Gr}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \operatorname{tg}(p\alpha) r^{-p} dp \int\limits_0^\infty \tau(r_0) r_0^{\,p} dr_0 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i Gr}\int\limits_0^\infty \tau(r_0) dr_0 \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \operatorname{tg}(p\alpha)\left(\frac{r_0}{r}\right)^p dp \qquad (-1-\varepsilon < c < 0).$$

Так как полюсы функции $\operatorname{tg}(p\alpha)$ расположены вне интервала $|\operatorname{Re} p| < \dfrac{\pi}{2\alpha}$, то полосу регулярности $-1-\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0$ можно расширить, заменив ее полосой регулярности $-\dfrac{\pi}{2\alpha} < \operatorname{Re} p < \dfrac{\pi}{2\alpha}$ и, следовательно, вследствие аналитичности функции $\operatorname{tg}(p\alpha)$ в указанной полосе можем положить $c = 0$. Далее заменой $p = is$ от мнимой оси интегрирования перейдем на действительную ось. После элементарных преобразований находим

$$\frac{du(r,\alpha)}{dr}=\frac{r^{\pi/2\alpha-1}}{\alpha G}\int_0^\infty\frac{\tau_0^{\pi/2\alpha}\tau(r_0)dr_0}{r_0^{\pi/\alpha}-r^{\pi/\alpha}}\qquad(0<r<\infty),\tag{1.27}$$

где использовано выражение синус-интеграла Фурье из [14] (стр. 85, ф-ла 2.9(4)). Очевидно, что

$$\frac{du(r,-\alpha)}{dr}=-\frac{du(r,\alpha)}{dr}\qquad(0<r<\infty).$$

Теперь, исходя из (1.27) вычислим интеграл

$$J(r,\alpha)=\int\frac{r^{\pi/2\alpha-1}dr}{r_0^{\pi/\alpha}-r^{\pi/\alpha}},$$

полагая в нем

$$x=r^{\pi/\alpha},\ u=r_0^{\pi/\alpha};\ c=b^{\pi/\alpha},\ d=a^{\pi/\alpha}$$

и используя выражение известного интеграла из [15] (стр. 85, ф-ла 2.9(4)). После простых преобразований находим

$$J(r,\alpha)=\frac{\alpha}{\pi\sqrt{u}}\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{u}}{\left|\sqrt{x}-\sqrt{u}\right|}.$$

На основании последнего, применительно к поставленной контактной задачи для клина, будем иметь

$$u(r,\alpha)=\frac{\alpha}{\pi^2 G}\int_c^d\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{u}}{\left|\sqrt{x}-\sqrt{u}\right|}u^{\alpha/\pi-1}\tau_-\left(u^{\alpha/\pi}\right)du\quad(0\le x<\infty).\tag{1.28}$$

Отсюда, в частном случае, когда $\alpha=\pi/r$, полагая $x=r^2,\ u=r_0^2$, находим

$$u(r,\pi/2)=\frac{1}{\pi G}\int_{\sqrt{c}}^{\sqrt{d}}\ln\frac{r+r_0}{|r-r_0|}\tau(r_0)dr_0,$$

что совпадает с известным результатом для упругой полуплоскости.

Теперь, перейдя к выводу ОИУ рассматриваемой контактной задачи для клина, при помощи (1.28) реализуем условие $u(r,\alpha)=f(r)\ (b\le r\le a)$:

$$\frac{\alpha}{\pi^2 G}\int_c^d\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{u}}{\left|\sqrt{x}-\sqrt{u}\right|}u^{\alpha/\pi-1}\tau_-\left(u^{\alpha/\pi}\right)du=f(r)=f\left(x^{\alpha/\pi}\right)\quad(c<x<d).$$

Придерживаясь прежних обозначений, в этом уравнении положим

$$x=\xi^2,\ u=\eta^2;\ \beta=\sqrt{c}=b^{\pi/2\alpha};\ \gamma=\sqrt{d}=a^{\pi/2\alpha};$$

$$\omega_0(\xi)=\xi^{2\alpha/\pi-1}\tau_-\left(\xi^{2\alpha/\pi}\right)/G;\quad f_0(\xi)=\frac{\pi}{\alpha}f\left(\xi^{2\alpha/\pi}\right).$$

В результате придем к следующему ОИУ задачи:

$$\frac{1}{\pi}\int_\beta^\gamma \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\omega_0(\eta)d\eta=f_0(\xi)\qquad(\beta<\xi<\gamma). \tag{1.29}$$

Наконец, полагая здесь

$$\xi=\gamma t,\ \eta=\gamma\mathrm{v};\ \tau_0(t)=\omega_0(\gamma t);\quad g_0(t)=\frac{\pi}{\alpha a}f\left((\gamma t)^{2\alpha/\pi}\right);\ k=\beta/\gamma;$$

ОИУ (1.29) представим в безразмерной форме

$$\frac{1}{\pi}\int_k^1 \ln\frac{t+\mathrm{v}}{|t-\mathrm{v}|}\tau_0(\mathrm{v})d\mathrm{v}=g_0(t)\qquad(k<t<1). \tag{1.30}$$

Преобразуем также условие (1.29). Можем записать

$$\int_b^a \tau_-(r)dr=P\ \left(r=(\gamma t)^{2\alpha/\pi}\right)\Rightarrow\int_k^1 \tau_-\left((\gamma t)^{2\alpha/\pi}\right)\frac{2\alpha}{\pi}(\gamma t)^{2\alpha/\pi-1}\gamma dt=P\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_k^1 \tau_0(t)dt=P_0;\qquad P_0=\frac{\pi}{2\alpha aG}P.$$

Итак,

$$\int_k^1 \tau_0(t)dt=P_0. \tag{1.31}$$

После решения ОИУ (1.30)-(1.31), действующие на стрингеры необходимые силовые факторы определяются как выше.

2. **Решение ОИУ (1.9)-(1.11) и (1.15)-(1.16).** Так как ОИУ (1.9) при условии (1.11), (1.21)-(1.22) и (1.30)-(1.31) рассмотренных выше контактных задач имеют одинаковую структуру, а ОИУ (1.15)-(1.16) и (1.23)-(1.24) описанных выше задач также в сравнении между собой имеют одинаковые структуры, то здесь ограничимся только решением указанных ОИУ.

Решение ОИУ (1.9) при условии (1.11) построим методом ортогональных многочленов Чебышева при помощи спектральных соотношений [16]:

$$\int_k^1 \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi+\eta|}\frac{T_n(Y)d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(\eta^2-k^2)}}=\lambda_n T_n(X)\qquad(n=0,1,2,\ldots) \tag{2.1}$$

$$X=\cos\vartheta,\quad \vartheta=\frac{\pi}{K'}\int_1^{\xi/k}\frac{du}{\sqrt{\left(u^2-1\right)\left(1-k^2u^2\right)}};\quad \lambda_0=\pi K,$$

$$Y=\cos\varphi,\quad \varphi=\frac{\pi}{K'}\int_1^{\eta/k}\frac{du}{\sqrt{\left(u^2-1\right)\left(1-k^2u^2\right)}};\quad \lambda_n=\frac{K'}{n}\operatorname{th}\left(\pi nK/K'\right)\ \ n=1,2,...,$$

Здесь $K=K(k)$ - полный эллиптический интеграл первого рода, $K'=K(k')$ $\left(k'=\sqrt{1-k^2}\right)$, а $T_n(X)$ - многочлены Чебышева первого рода аргумента X. Отметим, что ϑ и φ, причем $0\le\vartheta,\varphi\le\pi$, можно выразить через неполный эллиптический интеграл первого рода. Действительно, в выражении ϑ от переменной интегрирования u перейдем к переменной $t=1/u$. Тогда

$$\vartheta=\frac{\pi}{K'}\int_{k/\xi}^{1}\frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(t^2-k^2\right)}}\qquad \left(k\le\xi\le1\right).$$

Далее, воспользовавшись выражением известного интеграла из [14] (стр. 260, ф-ла 10), получим

$$\vartheta=\frac{\pi}{K'}F\left(\arcsin\frac{\sqrt{\xi^2-k^2}}{K'\xi},k'\right)=\frac{\pi}{K'}\int_0^{\sqrt{\xi^2-k^2}/k'\xi}\frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k'^2t^2\right)}}\ \ \left(k\le\xi\le1\right),$$

где $F(\lambda,q)$ - неполный эллиптический интеграл первого рода.

Теперь, исходя из (2.1), решение ОИУ (1.9) представим в форме бесконечного ряда

$$\varphi_-(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\xi^2\right)\left(\xi^2-k^2\right)}}\sum_{n=0}^{\infty}X_nT_n(X)\qquad \left(k<\xi<1\right)\tag{2.2}$$

с неизвестными коэффициентами X_n. Далее (2.2) подставим в (1.9), поменяем порядок суммирования и интегрирования и воспользуемся соотношением (2.1). Будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_nX_nT_n(X)=g(\xi)\qquad \left(k<\xi<1\right).$$

Отсюда при помощи условий ортогональности многочленов Чебышева $T_n(X)$:

$$\int_k^1 T_m(X)T_n(X)\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)}}=\begin{cases}K' & (n=m=0);\\ K'/2 & (n=m\neq 0);\\ 0 & (n\neq m);\end{cases}$$

непосредственно вытекающих из обычных условий ортогональности многочленов $T_n(x)$ $(x=\cos\vartheta)$, находим

$$X_0=g_0/\lambda_0K',\ X_n=2g_n/\lambda_nK'\quad (n=1,2,...);$$
$$g_n=\int_k^1\frac{g(\xi)T_n(X)d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)}}\quad (n=1,2,...). \tag{2.3}$$

Теперь заметим, что горизонтальные упругие перемещения точек стрингеров в виде функции $f(x)$ состоят из чисто упругих перемещений в виде функции $f_0(x)$ и одинаковых горизонтальных жестких смещений величины Δ, так что $f(x)=f_0(x)+\Delta$ $(b\leq x\leq a)$. Отсюда $g(\xi)=g_0(\xi)+\Delta_0$, где $g_0(\xi)=f_0(a\xi)/a$ $\Delta_0=\Delta/a$. Приняв во внимание это обстоятельство, из (2.3) будем иметь

$$g_n=g_n^{(0)}+K'\Delta_0\delta_n,\ \ \delta_n=\begin{cases}1\ (n=0);\\ 0\ (n=1,2,...);\end{cases}\ \ X_0=\left(g_0^{(0)}+\Delta_0K'\right)/\lambda_0K';$$
$$g_n^{(0)}=\int_k^1\frac{g_0(\xi)T_n(X)d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-k^2)}}\ (n=0,1,2,...);\ X_n=2g_n/\lambda_nK'\ (n=1,2,...) \tag{2.4}$$

С другой стороны, подставляя (2.2) в условие (1.11), находим $X_0=P_0/K'$. Тогда из (2.4) определим абсолютно жесткое смещение правого стрингера:

$$\Delta_0=\frac{\Delta}{a}=\frac{\lambda_0P_0-g_0^{(0)}}{K'}.$$

Перейдем к решению ОИУ (1.15), представив его решение в форме бесконечного ряда

$$\tau_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sum_{n=1}^{\infty}Y_nT_{2n-1}(\xi)\quad (0<\xi<1)$$

с неизвестными коэффициентами Y_n и воспользуемся известными спектральными соотношениями

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}\frac{T_{2n-1}(\eta)\,d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}=\frac{1}{2n-1}T_{2n-1}(\xi)\qquad (n=1,2,...,\ 0<\xi<1).$$

Далее, поступив совершенно аналогично сделанному выше, находим

$$Y_n=\frac{4(2n-1)}{\pi^2}f_n;\quad f_n=\int_0^1 f_0(\xi)\frac{T_{2n-1}(\xi)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\ (n=1,2,...).$$

Так как функция $f_0(\xi)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, то интегрированием по частям в последнем интеграле легко показать, что по крайней мере, $Y_n=O\left(\frac{1}{n^{2+\xi}}\right)$ при $n\to\infty$ $(\xi>0)$.

Обращаясь, теперь, к условию (1.13) или к этому же условию (1.16) в безразмерной форме, покажем, что одно тождественно удовлетворяется. Действительно, согласно (1.14),

$$T_a=hE_s^*f'(a);$$

$$\int_a^\infty\left[\tau_+(s)-\tau_-(s)\right]ds=-hE_s\int_a^\infty f''(s)\,ds=-hE_s^*f'(s)\Big|_{s=a}^{s=\infty}=hE_s^*f'(a)=T_a,$$

поскольку $f'(x)$ на бесконечности исчезает.

3. **Заключение.** В статье методом ортогональных мноогочленов Чебышева с аргументом в виде неполного эллиптического интеграла первого рода при помощи соответствующих спектральных соотношений, содержащих эти многочлены, построены замкнутые решения одного класса задач контактного взаимодействия стрингеров с массивными упругими телами в модифицированной их постановке, когда заранее задан режим упругих перемещений точек стрингеров. Такая постановка представляет интерес в исследованиях вопросов жесткости систем стрингеры-упругие основания. Изложенные здесь методики и идеи могут быть использованы в исследованиях новых граничных задач механики сплошной среды, когда описывающие их ОИУ имеют симметрические ядра, представимые суммой рассмотренных здесь ядер и регулярных ядер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E., Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen, Ing.– Arch., 3, 1932, N2, p. 123–129.
2. Koiter W.J.T. On the Diffusion of Load from a Stiffener into a Sheet, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, N2, p. 164–178.
3. Muki R., Sternberg E. Transfer of Load from an Edge-Stiffener to a Sheet - a Reconsideration of Melan Problem, J. of Appl. Mech. Trans. ASME, Ser. E., 1967, N3, p. 233-242.

4. Bufler H. Zur Krafteinleitung in Scheiben über geschweisste oder geklebte Verbindungen, Österr, Ing.–Arch., 1964, N3–4, p. 284–292.
5. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976, 493 с.
6. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1983, 296 с.
7. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван. Изд.-во «Гитутюн» НАН РА, 2014, 322 с.
8. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983, 488 с.
9. Mkhitaryan S.M., Kanetsyan E.G., Mkrtchyan M.S. On Two Problems of Contact Interaction of Stringers with an Elastic Half-Plane. Construction Technologies and architecture. ISSN 2674-1237, Vol. 2, p. 19-30.
10. Мхитарян С.М., Гаспарян А.В., Саргсян А.С. О точном решении интегрального уравнения одной контактной задачи математической теории упругости. Доклады НАН РА. Т. 121. N2, стр. 106-115.
11. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М. –Л: 1949, 270 с.
12. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. – В сб.: Механика деформируемого твердого тела, Ереван, Изд–во НАН Армении, 1993, стр. 129–143.
13. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968, 402 с.
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. и др. Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, т. 1, 1969, 344 с.
15. Градштейн И.С. Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ФМ, 1963, 1100 с.
16. Мхитарян С.М. О собственных функциях интегрального оператора, порожденного логарифмическим ядром на двух интервалах, и их приложении к контактным задачам. Известия АН Арм. ССР. Механика, т. 35, №6, 1982, стр. 3–18.

Сведения об авторах

Мхитарян Сурен Манукович – чл.-корр. НАН РА, проф., зав отделом, Институт механики НАН РА,
E-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

Григорян Марине Самвеловна – к.ф.м.н., доцент, декан факультета «Управление и технологии», Национальный университет архитектуры и строительства Армении
E-mail: marinegrigoryan17@gmail.com

Поступила в редакцию 15.03.2022