

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗОМ

Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В.

**Ключевые слова:** смешанная задача, трещина, штамп, межфазный дефект.

**Hakobyan V.N., Amirjanyan A.A., Hakobyan L.V.**  
**Contact problem for a compound plane with a cut**

**Keywords:** mixed boundary value problem, crack, stamp, interfacial defect

This article discussed the plane stress state of a composite elastic plane with an interfacial crack, on one of the banks of which, with adhesion, an absolutely rigid stamp is pressed that does not reach the endpoints of the crack. Using discontinuous solutions of the Lamé equations for a composite plane with an interfacial crack, the solution of the problem is reduced to solving a singular integral equation. The solution of the latter is constructed by the numerical-analytical method of mechanical quadratures. A numerical analysis has been carried out and regularities of changes of contact stresses and the Cherepanov-Rice integral  $J$  have been studied depending on the physical-mechanical and geometrical parameters of the problem.

**Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Ա.Ա., Հակոբյան Լ.Վ.**  
**Կոնտակտային խնդիր միջֆազային ճաքով բաղադրյալ հարթության համար**

**Հիմնարարներ՝** խառը եզրային խնդիր, ճաք, դրոշմ, միջֆազային դեֆեկտ

Աշխատանքում ուսումնասիրվել է բաղադրյալ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը, երբ այն պարունակում է միջֆազային ճաք, որի ափերից մեկին է սեղմվում, ճաքի զազաթներ դուրս չեկող, ափին հարակցված բացարձակ կոշտ դրոշմը: Միջֆազային դեֆեկտներով բաղադրյալ հարթության համար Լամեի հավասարումների խզվող լուծումների օգնությամբ խնդրի լուծումը բերվել է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման, որի լուծումը կառուցվել է մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի թվային-անալիտիկ մեթոդով: Թվային հաշվարկի օգնությամբ ուսումնասիրվել են կոնտակտային լարումների և Չերեպանով-Ռայսի  $J$  ինտեգրալի փոփոխման օրինաչափությունները:

Рассмотрено плоско-деформированное состояние составной упругой плоскости с межфазной трещиной, на один из берегов которой со сцеплением вдавливаются абсолютно жёсткий штамп, не достигающий до концевых точек трещины. Используя разрывные решения уравнений Ламэ для составной плоскости с межфазной трещиной, решение задачи сведено к решению сингулярного интегрального уравнения. Решение последнего построено численно-аналитическим методом механических квадратур. Проведён численный эксперимент и изучены закономерности изменения контактных напряжений и  $J$  интеграла Черепанова-Райса в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задачи.

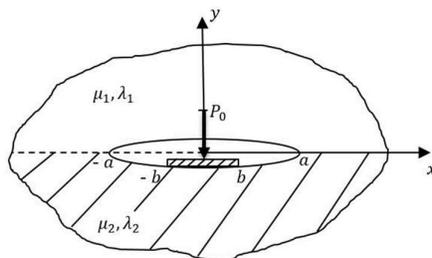
**Введение**

Изучение закономерности изменения напряжённо-деформированного состояния вокруг концентраторов напряжений различных типов и разработка методик повышения работоспособности и долговечности конструкций и их деталей всегда было и остается одним из важнейших направлений контактных и смешанных задач теории упругости и механики разрушения. Многие фундаментальные результаты в

этом направлении приведены в известных монографиях [1-5]. Укажем также на монографию [6] и на работы [7-10], где получены точные решения ряда задач для составной плоскости и пространства с межфазными трещинами, в один из берегов которых вдавливаются абсолютно жёсткий штамп при различных условиях контакта. В работах [11-13] получены замкнутые решения ряда контактных задач для упругой однородной и ортотропной плоскости с конечными трещинами, на один или оба берега которых одновременно действуют абсолютно жёсткие штампы, не доходящие до концевых точек трещины. Что же касается аналогичных задач для кусочно-однородной плоскости, то, как нам известно, они до сих пор не были рассмотрены. Исходя из этого и с целью устранения этой брешки, в настоящей работе изучено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной упругой плоскости с трещиной, в один из берегов которой со сцеплением вдавливаются абсолютно жёсткий штамп, не доходящий до концевых точек трещины.

### Постановка задачи и вывод определяющего уравнения

Пусть составная упругая плоскость из двух разнородных полуплоскостей с коэффициентами Ламэ  $\lambda_1, \mu_1$  и  $\lambda_2, \mu_2$  соответственно, отнесённая к декартовой системе координат  $Oxy$ , направление оси  $Ox$  которой совпадает с линией соединения разнородных материалов, находится в условиях плоской деформации. Будем полагать, что составная плоскость на линии  $y = 0$  на интервале  $(-a, a)$  ослаблена разрезом и деформируется под воздействием абсолютно жёсткого штампа с плоским основанием, вдавливаемого сосредоточенной нормальной силой  $P_0$  в нижний берег разреза на участке  $(-b, b)$  ( $0 < b < a$ ).



Фиг. 1

Считается также, что остальная часть берегов разреза свободна от напряжений и сила  $P_0$  приложена к штампу в точке  $x = 0$ , что исключает его поворот (Фиг.1)

Ставится задача: определить контактные напряжения, действующие под штампом, и  $J$ -интеграл Черепанова - Райса в концевых точках разреза  $x = \pm a$ .

Снабдив индексами 1 и 2 компоненты напряжений и смещений разнородных полуплоскостей, задачу математически можно представить в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0) = \sigma_y^{(2)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(2)}(x,0); \\ u_1(x,0) + iv_1(x,0) = u_2(x,0) + iv_2(x,0) \end{cases} \quad (|x| > a); \quad (1.1a)$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0) = 0; & (-a < x < a) \\ \sigma_y^{(2)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(2)}(x,0) = 0; & (-a < x < -b; \& b < x < a) \quad (|x| < a) \\ u_2(x,0) + iv_2(x,0) = i\delta & (-b < x < b) \end{cases} \quad (1.1b)$$

Здесь  $\sigma_y^{(j)}(x, y)$ ,  $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$  ( $j = 1, 2$ ) - компоненты напряжения, действующие в соответствующих полуплоскостях,  $u_j(x, y)$  и  $v_j(x, y)$  ( $j = 1, 2$ ) - компоненты смещения точек этих полуплоскостей, а  $\delta$  - жёсткое смещение штампа.

Чтобы построить решение поставленной задачи будем использовать разрывные решения для составной плоскости с межфазными дефектами, приведённые в [6]:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0) = & \frac{1}{\Delta} \left\{ l_0 \chi(x) + l_1 w'(x) + \right. \\ & \left. + \frac{il_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(s) ds}{s-x} + \frac{il_3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{w'(s) ds}{s-x} \right\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [u_2(x,0) + iv_2(x,0)] = & -\frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{l_0 w'(x)}{\theta_2^{(2)}} - d_0 \chi(x) + \right. \\ & \left. + \frac{l_2 i}{\pi \theta_2^{(2)}} \int_{-a}^a \frac{w'(s) ds}{s-x} + \frac{d_1 i}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(s) ds}{s-x} \right\} \quad (-\infty < x < \infty) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\left[ \sigma_y^{(2)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(2)}(x,0) \right] = - \begin{cases} \chi(x) & (-b < x < b) \\ 0 & (b < |x| < a) \end{cases} \quad (1.4)$$

-комплексная комбинация неизвестных контактных напряжений, действующих под штампом,

$$w(x) = [u_1(x,0) + iv_1(x,0)] - [u_2(x,0) + iv_2(x,0)]$$

-комплексная комбинация разности смещений точек берегов трещины.

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} l_0 = & \theta_2^{(1)} (\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)}) - \theta_1^{(1)} (\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)}); & l_2 = & \theta_1^{(1)} \theta_2^{(2)} + \theta_2^{(1)} \theta_1^{(2)} \\ l_1 = & 2(\theta_2^{(2)})^{-1} (\theta_1^{(2)} l_0 - \theta_2^{(2)} l_2); & l_3 = & 2(\theta_2^{(2)})^{-1} (\theta_1^{(2)} l_2 - \theta_2^{(2)} l_0); \end{aligned}$$

$$d_0 = \frac{\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)}}{2}; \quad d_1 = \frac{\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)}}{2}; \quad \theta_1^{(j)} = \frac{\mu_j}{2 + \alpha_j}; \quad \theta_2^{(j)} = \frac{(1 + \alpha_j)\mu_j}{2 + \alpha_j};$$

$$\Delta = (\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)})^2 - (\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)})^2; \quad \alpha_j = \frac{1}{1 - 2\nu_j}; \quad (j = 1, 2),$$

где  $\nu_j$  ( $j = 1, 2$ ) – коэффициенты Пуассона.

При помощи соотношений (1.2) и (1.3) удовлетворим первому и третьему из условий (1.1b), предварительно продифференцировав последнее. В итоге, придём к системе уравнений:

$$\begin{cases} l_0 \chi(x) + l_1 w'(x) + \frac{il_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(s) ds}{s-x} + \frac{il_3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{w'(s) ds}{s-x} = 0 & (-a < x < a) \\ \frac{l_0 w'(x)}{\theta_2^{(2)}} - d_0 \chi(x) + \frac{l_2 i}{\pi \theta_2^{(2)}} \int_{-a}^a \frac{w'(s) ds}{s-x} + \frac{d_1 i}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(s) ds}{s-x} = 0 & (-b < x < b) \end{cases} \quad (1.5)$$

Первое из этих уравнений рассмотрим как сингулярное интегральное уравнение относительно функции  $\varphi(x) = w'(x) + l_2 \chi(x) / l_3$

$$\varphi(x) + \frac{iq}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi(s) ds}{s-x} = F(x) \quad (-a < x < a), \quad (1.6)$$

где

$$F(x) = \frac{l_0 l_3 - l_1 l_2}{l_1 l_3} \chi(x); \quad q = l_3 / l_1,$$

и выразим  $w'(x)$  через функцию  $\chi(x)$ . При этом должны быть обеспечены условия непрерывности смещения в концевых точках трещины и условие равновесия штампа, т.е. условия

$$\int_{-a}^a w'(x) dx = 0; \quad \int_{-a}^a \chi(x) dx = \int_{-b}^b \chi(x) dx = P_0 \quad (1.7)$$

или

$$\int_{-a}^a \varphi(x) dx = l_2 P_0 / l_1 \quad (1.8)$$

Решение уравнения (1.6) при условии (1.8) следующее [4,6]:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 - q^2} \left\{ F(x) + \frac{q\omega(x)}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{F(s) ds}{\omega(s)(s-x)} \right\} + d\omega(x) \quad (1.9)$$

$$(-a < x < a)$$

где

$$\omega(x) = (x+a)^{-1/2+i\gamma} (a-x)^{-1/2-i\gamma}; \quad d = \frac{l_2 \operatorname{ch}(\pi\gamma)}{\pi l_3} P_0; \quad g = \frac{1+q}{1-q};$$

$$\left( \gamma = \frac{1}{2\pi} \ln|g| = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_1 + \varkappa_1 \mu_2}{\mu_2 + \varkappa_2 \mu_1}; \quad \mu_j = \frac{E_j}{2(1+\nu_j)}; \quad \varkappa_j = 3-4\nu_j; \quad j=1,2 \right)$$

Подставляя в (1.9) значение  $F(x)$ , после некоторых выкладок, используя вторую из формул (1.7), получим

$$w'(x) = -\frac{D}{l_1^2 - l_3^2} \chi(x) - \frac{A\omega(x)}{\pi i (l_1^2 - l_3^2)} \int_{-b}^b \frac{\chi(s) ds}{\omega(s)(s-x)} + d\omega(x) \quad (1.10)$$

$$(-a < x < a)$$

$$A = l_0 l_3 - l_1 l_2 = -2\Delta \left( (\mathfrak{g}_2^{(1)})^2 - (\mathfrak{g}_1^{(1)})^2 \right); \quad D = l_2 l_3 - l_0 l_1 = -\frac{\mathfrak{g}_1^{(2)}}{\mathfrak{g}_2^{(2)}} A.$$

Из первого уравнения (1.5) также можем записать

$$\frac{i}{\pi} \int_{-a}^a \frac{w'(s) ds}{s-x} = -\frac{l_0}{l_3} \chi(x) - \frac{l_1}{l_3} w'(x) - \frac{il_2}{\pi l_3} \int_{-b}^b \frac{\chi(s) ds}{s-x}.$$

Учитывая формулу (1.4), при помощи полученного соотношения и формулы (1.10), из второго уравнения (1.5) для определения комплексной комбинации контактных напряжений  $\chi(x)$  получим следующее определяющее сингулярное интегральное уравнение второго рода:

$$\chi(x) + \frac{q_*}{\pi i} \int_{-b}^b \frac{\chi(s) ds}{s-x} + \int_{-b}^b K(s, x) \chi(s) ds = f(x) \quad (-b < x < b) \quad (1.11)$$

где

$$q_* = \frac{\mathfrak{g}_2^{(2)}}{\mathfrak{g}_1^{(2)}}; \quad K(s, x) = -\frac{\mathfrak{g}_2^{(2)} \mu_1^2}{\pi i \varkappa_1 \mathfrak{g}_1^{(2)} l_3} \frac{[\omega(x) - \omega(s)]}{\omega(s)(s-x)};$$

$$f(x) = -\frac{4P_0 l_2 \mu_1^2 \mu_2^2 \operatorname{ch}(\pi\gamma) \omega(x)}{\pi \varkappa_1 \varkappa_2 \mathfrak{g}_1^{(2)} \mathfrak{g}_2^{(2)} l_3^2}.$$

Уравнение (1.11) нужно рассматривать при втором условии в (1.7):

$$\int_{-b}^b \chi(x) dx = P_0. \quad (1.12)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению определяющего сингулярного интегрального уравнения (1.11) при условии (1.12).

### Решение определяющего сингулярного интегрального уравнения

Решение определяющего сингулярного интегрального уравнения (1.11) будем строить численно-аналитическим методом механических квадратур. Для этого

уравнение (1.11) при помощи замены переменных  $x = b\eta$ ,  $s = b\xi$  сформулируем на интервале  $(-1, 1)$  и введя обозначения

$$\psi(x) = b\chi(x)/P_0; \quad K_*(\eta, \xi) = bK_*(b\eta, b\xi), \quad f_*(\eta) = bf(b\eta)/P_0$$

запишем в виде:

$$\psi(\eta) + \frac{q_*}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{\xi - \eta} + \int_{-1}^1 K_*(\xi, \eta) \psi(\xi) ds = f_*(\eta) \quad (-1 < x < 1) \quad (2.1)$$

При этом условие (1.12) принимает вид

$$\int_{-1}^1 \psi(s) ds = 1 \quad (2.2)$$

Нетрудно показать, что решение уравнения (2.1) в концевых точках интервала имеет осциллирующую особенность  $1/2 \mp i\beta$ , т.е. его можно представить в виде:

$$\psi(\eta) = \psi_*(\eta)(1+\eta)^{-1/2+i\beta} (1-\eta)^{-1/2-i\beta} \quad (2.3)$$

где

$$G = \frac{1-q_*}{1+q_*}, \quad \beta = \frac{\ln|G|}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi} \ln \alpha_2,$$

а  $\psi_*(\eta)$  – непрерывная ограниченная функция на интервале  $[-1, 1]$ .

Далее, подставляя выражение функции  $\psi(t)$  из (2.3) в (2.1) и (2.2), используя квадратурные формулы, приведённые в [14], по обычной процедуре, придём к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в узлах квадратурной формулы.

После решения этой системы, при помощи интерполяционной формулы Лагранжа, восстанавливается функция  $\psi_*(\eta)$  и определяются все необходимые механические характеристики поставленной задачи.

Приведём формулы для определения безразмерного  $J$ -интеграла Черепанова-Райса в концевых точках трещины. Для этого будем использовать первое соотношение (1.2), которое при  $|x| > a$  имеет вид:

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \frac{il_2}{\pi\Delta} \int_{-b}^b \frac{\chi(s) ds}{s-x} + \frac{il_3}{\pi\Delta} \int_{-a}^a \frac{w'(s) ds}{s-x} \quad (2.4)$$

Подставляя сюда значение  $w'(x)$  из (1.10) и используя значение интеграла [15]

$$\int_a^b \frac{(s-a)^{v-1} (b-s)^{-v} ds}{s-x} = \begin{cases} \frac{\pi}{(b-x) \sin(\pi v)} \left| \frac{x-a}{b-x} \right|^{v-1} & (x < a; x > b) \\ -\pi \operatorname{ctg}(\pi v) (x-a)^{v-1} (b-x)^{-v} & (a < x < b) \end{cases} \quad (0 < \operatorname{Re} v < 1)$$

при  $\nu = 1/2 + i\gamma$ , получим

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = -\frac{l_3 \operatorname{sign} x \omega_1(x)}{\Delta \operatorname{ch}(\pi\gamma)} \left[ id - \frac{b_*}{\pi} \int_{-b}^b \frac{\chi(s) ds}{\omega(s)(s-x)} \right] + \Phi(x); \quad (2.5)$$

$$\Phi(x) = \frac{i(l_2 + a_* l_3 - ib_* \operatorname{th}(\pi\gamma))}{\pi\Delta} \int_{-b}^b \frac{\chi(s) ds}{(s-x)}; \quad \omega_1(x) = |a+x|^{\frac{1}{2}+i\gamma} |a-x|^{\frac{1}{2}-i\gamma},$$

$$b_* = \frac{\mathfrak{a}_2 \left( \mathfrak{g}_2^{(2)} \right)^2}{2\mu_2^2}; \quad a_* = \frac{\mathfrak{a}_2 \mathfrak{g}_1^{(2)} \mathfrak{g}_2^{(2)}}{2\mu_2^2}.$$

Нетрудно проверить, что функция  $\Phi(x)$  ограничена в конечных точках трещины. Теперь в выражении интеграла, входящего в (2.5), перейдем к интервалу  $(-1, 1)$  и запишем (2.5) посредством функции  $\Psi(x)$ . Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y^{(1)}(x, 0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x, 0)}{P_0} &= -\frac{\operatorname{sign} x \omega_1(x)}{\pi\Delta} \times \\ &\times \left[ il_2 - \frac{b_* l_3}{l_* \operatorname{ch}(\pi\gamma)} \int_{-1}^1 \frac{\Psi(\xi) d\xi}{\omega_*(\xi)(\xi - x/b)} \right] + \Phi_*(x) \quad (|x| > a), \\ &\left( \omega_*(\xi) = (\xi + l_*)^{-\frac{1}{2}+i\gamma} (l_* - \xi)^{\frac{1}{2}-i\gamma}; \quad l_* = a/b > 1 \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тогда безразмерные коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений будут определены по формуле:

$$\begin{aligned} K_I(\pm a) - iK_{II}(\pm a) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^j (a+0)} \frac{\omega_1^{-1}(x) \left[ \sigma_y^{(1)}(x, 0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) \right]}{P_0} = \\ &= \mp \frac{1}{\pi\Delta} \left[ il_2 - \frac{b_* l_3}{l_* \operatorname{ch}(\pi\gamma)} \int_{-1}^1 \frac{\Psi(\xi) d\xi}{\omega_*(\xi)(\xi \mp l_*)} \right], \end{aligned}$$

а  $J$ -интеграл Черепанова-Райса по формуле [16]:

$$J(\pm a) = \tilde{\mu} K(\pm a) \bar{K}(\pm a); \quad \tilde{\mu} = \frac{P_0}{2a} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right).$$

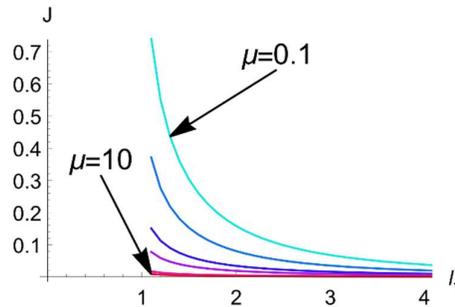
### Численные расчеты

Проведён численный расчёт и изучены закономерности изменения контактных напряжений, действующих под штампом, и безразмерных интегралов Черепанова-Райса  $J(\pm a)$  в конечных точках трещин в зависимости от соотношения

$\mu = \mu_2 / \mu_1$  и параметра  $l_* = a/b$  в случае фиксированных значений коэффициентов Пуассона  $\nu_j$  ( $j = 1, 2$ ). При этом, считается, что  $P_0 / a\mu_1 = 1$ .

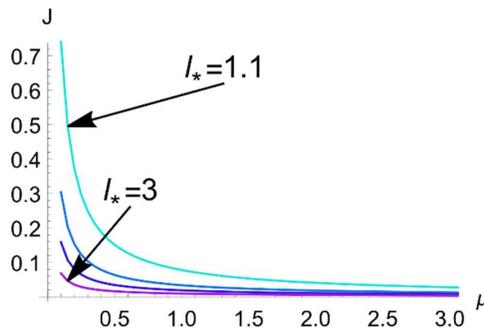
Результаты численных расчётов приведены в виде графиков (Фиг. 2- 3). На Фиг. 2 приведены соответственно графики безразмерных  $J$ - интегралов Черепанова-Райса в концевых точках трещины в зависимости от параметра  $l_*$  в случае, когда  $\nu_1 = 0.2$ ,  $\nu_2 = 0.3$ , и  $\mu = 0.1, 0.2, 0.5, 1, 5, 10$ .

Они показывают, что при удалении штампа от концевых точек трещины значение  $J$ - интеграла Черепанова-Райса уменьшается. При этом, чем жёстче верхняя полуплоскость, тем меньше значение  $J$ - интеграла.



Фиг. 2

На Фиг. 3 приведены графики безразмерных  $J$ - интегралов Черепанова-Райса в концевых точках трещины в зависимости от параметра  $\mu$  в случае, когда  $\nu_1 = 0.3$ ,



$\nu_2 = 0.2$  и  $l_* = 1.1, 1.5, 2, 3$ .

Фиг. 3

Из них явствует, что при уменьшении параметра  $\mu$ , что можно считать уменьшением  $\mu_2$  при постоянном значении  $\mu_1$ ,  $J$ -интеграл Черепанова-Райса в концевых точках трещины увеличивается. При этом, чем больше расстояние концевых точек штампа от концевых точек трещины, тем меньше значение  $J$ -интеграла Черепанова-Райса.

Численные расчеты показывают также, что контактные напряжения мало зависят как от параметра  $\mu$ , так и от параметра  $l_*$ .

### Заключение

Таким образом, методами сингулярных интегральных уравнений и механических квадратур получено решение задачи о вдавливании абсолютно жёсткого штампа, не доходящего до концевых точек трещины, в один из берегов межфазной трещины в составной упругой плоскости. Изучены закономерности изменения контактных напряжений и  $J$ -интеграла Черепанова-Райса в концевых точках трещины. Показано, что чем ближе концевые точки штампа к концевым точкам трещины, тем больше вероятность распространения трещины.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости, М. Наука, 1980г.,304с.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.- М.: Наука, 1982.- 344с.
3. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.- Киев: Наукова думка, 1976.- 443с.
4. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708с.
5. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г. Взаимодействие жёстких линейных включений и трещин в деформируемом теле. - Киев: Наукова думка, 1983.-288с.
6. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2014. 322с.
7. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. // Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, No4, с.57-65.
8. Акопян В.Н. Напряжения возле абсолютно жёсткого монетообразного включения в кусочно-однородном пространстве //В сб. трудов межд. конф.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посв. 95-летию со дня рожд. акад. Н.Х.Арутюняна, Ереван-2007, с.45-51.
9. Ильина И.И., Сильвестров В.В. Задача о тонком жёстком включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. // Изв. РАН. МТТ. 2005. №3. С.153-166.
10. Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Осесимметричная смешанная задача для составного пространства с монетообразной трещиной // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. №3. С. 31-46.

11. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Контактная задача для ортотропной плоскости с разрезом. //Механика композитных материалов, т.49, № 5, 2013г., с.757-772.
12. Мхитарян С.М. О напряженно-деформационном состоянии упругой бесконечной пластины с трещиной, расширяющейся посредством вдавливания в неё гладкого тонкого включения. // Изв. НАН РА, Механика, 2019(72), №4, с.38-64
13. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Контактная задача для однородной плоскости с трещиной. //Известия НАН РА, Механика, т.73, № 4, 2020г, с. 3-12 .
14. Саакян А.В. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности для интеграла типа Коши, когда показатели весовой функции Якоби комплексные. // Известия РАН, Механика твердого тела, 2012, №6, сс.116-121.
15. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. (Специальные функции)- М.: Наука, 1983.- 751с.
16. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т1., Т2 под редакцией Ю. Мураками. М.: Мир, 1990, 1014с.

**Сведения об авторах:**

Акопян Ваграм–доктор физ.-мат. наук, проф., тел.: (37410) 568188, эл. почта: [vhakobyan@sci.am](mailto:vhakobyan@sci.am)

Амирджанян Арутюн – кандидат физ.-мат. наук, тел.: (37410) 568188, эл. почта: [amirjanyan@gmail.com](mailto:amirjanyan@gmail.com)

Акопян Лусине – кандидат физ.-мат. наук, тел.: (37410) 564890, эл. почта: [lusine.vahram.hakobyan@gmail.am](mailto:lusine.vahram.hakobyan@gmail.am)

Поступила в редакцию 07.03.2022