ՀԱՅԱՍՏԱՆԻԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻԱԶԳԱՅԻՆԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 75, №1-2, 2022 Механика

УДК 539.3

Doi: 10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-5

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН В АРМЕНИИ

Агаловян Л.А.

Ключевые слова: пластина, оболочка, анизотропия; классическая, уточненные, асимптотическая теории, неклассические краевые задачи.

Aghalovyan L.A.

On Some Aspects of the Development of the Theory of Shells and Plates in Armenia

Keywords: plate, shell, anisotropy; classical, refined, asymptotic theories, non-classical boundary value problems.

Some aspects of the development of the classical, refined, asymptotic theories of anisotropic plates and shells in Armenia are outlined. The decisive role of S.A.Ambartsumyan in the creation and development of these theories, the foundation of the corresponding Scientific school is noted.

Աղալովյան Լ.Ա.

Հայաստանում թաղանթների և սալերի տեսության զարգացման որոշ ասպեկտների մասին

Հիմնաբառեր՝ սալեր, թաղանթներ, դասական, ճշգրտված, ասիմպտոտիկ տեսություններ, ոչ դասական եզրային խնդիրներ:

Շարադրված են Հայաստանում անիզոտրոպ թաղանթների և սալերի դասական, ճշգրտված, ասիմպտոտիկ տեսությունների զարգացման որոշ ասպեկտները: Ընդգծված է Ս.Համբարձումյանի որոշիչ դերը այդ տեսությունների ստեղծման, զարգացման, համապատասխան գիտական դպրոցի հիմնադրման վեհ գործում:

Излагаются некоторые аспекты развития классической, уточненных, асимптотической теорий анизотропных пластин и оболочек в Армении. Отмечается решающая роль С.А. Амбарцумяна в создании и развитии этих теорий, основании соответствующей Научной школы.

1. Классическая и уточненные теории пластин и оболочек

Балки, стержни, пластины и оболочки являются составными элементами современных строительных конструкций, машиностроения, летательных и морских аппаратов, приборостроения. Для расчета на прочность, устойчивость и долговечность подобных конструкций необходимо определить их напряженно-деформированные состояния (НДС). Для этого в общем случае следует решить соответствующую трехмерную задачу теории упругости. Однако, первоначально было трудно преодолевать возникающие математические трудности и нашли развитие прикладные теории на основе метода принятия гипотез, используя их геометрическую специфику. Для балок и стержней один из размеров (длина) намного больше размеров их поперечного сечения. Для пластин и оболочек – толщина намного меньше тангенциальных размеров. Классическая теория изотропных балок и стержней построена на основе гипотезы плоских сечений Бернулли-Кулона-Эйлера (Тимошенко, 1965).

Первые исследования по теории пластин выполнены Коши и Пуассоном методом разложения по переменному параметру толщины. Однако сразу возникло противоречие, связанное с несоответствием между порядком основного дифференциального уравнения (четвертый) и выведенных Пуассоном граничных условий на боковой поверхности (их оказалось три). Это обстоятельство почти на полвека приостановило развитие теории. Проблему удалось решить Кирхгофу методом гипотез (гипотеза о недеформируемых нормалях). Кирхгоф на основе этой гипотезы, гласящей: нормальный к координатной поверхности прямолинейный элемент пластинки после деформации остается прямолинейным, нормальным к деформированной координатной поверхности пластинки и сохраняет свою длину; и варьированием потенциальной энергии деформации вывел основное уравнение изгиба пластинки и непротиворечивые граничные условия на боковой поверхности (их оказалось два). Обычно помимо этой геометрической гипотезы используется и вторая (статическая) гипотеза: нормальным напряжением $\sigma_{\gamma\gamma}$, действующим на площадках, параллельных координатной, и имеющим направление нормали к этим площадкам, можно пренебречь по сравнению с другими компонентами тензора напряжений. Ляв (1935) распространил эти гипотезы (гипотезы Кирхгофа-Лява) для вывода основных уравнений изотропных оболочек. Большой вклад для окончательного построения классической теории изотропных пластин и оболочек и методов решения возникающих прикладных задач внесли: Лурье, 1947; Власов, 1949; Голденвейзер, 1953, 1976;Тимошенко, 1963; Новожилов, 1962;Флюгге, 1961; Доннел, 1982 и др. Классическая теория анизотропных пластин построена Лехницким, 1957. Классическая теория слоистых анизотропных оболочек безупречно построена С. А. Амбарцумяном, 1961. Монография С. А. Амбарцумяна сразу же приобрела известность, была переведена NACA и издана в США (AmbartsumianS.A., 1964). По сей день она является настольной книгой конструкторских бюро по новой технике, подтверждая мировую известность автора.

В последующем, вплоть до сороковых годов двадцатого века доминирующую роль играли исследования на основе гипотезКирхгофа-Лява. Начиная с этих годов наметился интерес и к другим способам решения трехмерных задач теории упругости для пластин и оболочек. Это было связано с тем, что гипотезы Кирхгофа-Лява не всегда обеспечивали необходимую точность результатов. Сказанное касается, в частности, анизотропных пластин и оболочек, слоистых пластин и оболочек, динамических задач, пластин и оболочек из современных композиционных материалов. Для решения возникающих проблем было предложено множество подходов, которые можноразбить на три группы: а) метод смягченных гипотез, б) метод разложений по толщине, в) асимптотический метод. За короткий период появились основанные на смягченных допущениях теории Э. Рейсснера (ReissnerE., 1944; 1945), С. Амбарцумяна (Амбарцумян1967; 1971;1987;1991; Ambartsumian 1971), типа С. Тимошенко (Naghdi, 1957;Пелех, 1973).

В уточненной теории пластин Э.Рейсснера задается закон изменения основных расчетных тангенциальных напряжений σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} по толщине пластины и из уравнений равновесия и соотношений упругости $3D$ задачи выводятся двумерные непротиворечивые уравнения для определения перемещений и остальных компонент тензора напряжений. С точки зрения решения $3D$ задачи теории упругости, ошибка в выборе закона изменения основных расчетных напряжений будет чувствительно влиять на окончательные результаты.

В уточненной теории пластин Амбарцумяна С.А. основной упор сделан на касательные напряжения σ_{xz}, σ_{yz}, не считающиеся основными. Предполагается, что:

а) нормальное к срединной плоскости пластинки перемещение w не зависит от координаты z (как в классической теории);

б) касательные напряжения σ_{xz}, σ_{yz} меняются по толщине пластинки по заданному закону:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \frac{X^+ - X^-}{2} + \frac{z}{h}(X^+ + X^-) + f_1(z)\varphi(x,y)\\ \sigma_{yz} &= \frac{Y^+ - Y^-}{2} + \frac{z}{h}(Y^+ + Y^-) + f_2(z)\psi(x,y)\end{aligned} \tag{1}$$

где h – толщина пластинки, $f_i(z)$- заданные функции, которые характеризуют законы изменения этих касательных напряжений по толщине пластинки, $f_i\left(z = \pm\frac{h}{2}\right) = 0;\quad \varphi(x,y),\quad \psi(x,y)$ - неизвестные пока функции. Представление касательных напряжений в виде (1) позволяет с самого начала тождественно удовлетворять граничным условиям на лицевых поверхностях $z = \pm h/2$ пластинки:

$$\sigma_{xz}(z = \pm\frac{h}{2}) = \pm X^{\pm}(x,y); \qquad \sigma_{yz}(z = \pm\frac{h}{2}) = \pm Y^{\pm}(x,y) \tag{2}$$

где $X^{\pm}, Y^{\pm}$ – тангенциальные компоненты заданных поверхностных нагрузок.

Удовлетворивуравнения равновесия и соотношения упругости (обобщенный закон Гука), решение $3D$ задачи сводится к решению системы из пяти двумерных дифференциальных уравнений и удовлетворению соответствующих приведенных граничных условий на боковой поверхности пластинки относительно пяти неизвестных функций $u(x,y), v(x,y), w(x,y), \varphi(x,y), \psi(x,y)$. Построена соответствующая уточненная теория дла анизотропных оболочек, а также итерационная теория (Амбарцумян 1974).

На основе классической и уточненных теорий анизотропных пластин и оболочек С.А. Амбарцумяном, его учениками Г.Е. Багдасаряном, В.Ц. Гнуни, А.А. Хачатряном, Л.А. Мовсисяном, М.В. Белубекяном, Р.М. Киракосяном и другими учениками и сотрудниками решено множество интересных прикладных задач по прочности, устойчивости и колебаниям пластин и оболочек, в том числе слоистых. В результате созданная С.А. Амбарцумяном армянская Научная школа по теории пластин и оболочек приобрела известность не только в СССР, но и во всем мире.

Важное место занимают исследования С.А. Амбарцумяна и его учеников по изучению взаимодействия тонкостенных конструктивных элементов с различными физическими полями, в частности, температурными, электромагнитными и др. С.А. Амбарцумяном, Г.Е. Багдасаряном, М.В. Белубекяном на основе им же предложенной гипотезы магнитоупругости тонких тел, построена теория магнитоупругости тонких оболочек и пластин (Амбарцумян, Багдасарян, Белубекян, 1977). В дальнейшем это направление интенсивно развивалось и расширялось. Основные результаты отражены в монографиях (Амбарцумян, Белубекян, 1991;1992;2010; Амбарцумян, Багдасарян, 1996);(Багдасарян, 1999; Baghdasaryan, Mikilyan, 2016; Baghdasaryan, Danoyan,2018). Спектр научных интересов С.А.Амбарцумяна продолжал оставаться широким. Он является автором разномодульной теории упругости (Амбарцумян,1982), прикладной микрополярной теории оболочек и пластин (Амбарцумян,1999).

По уточненной теории типа Тимошенко сначала задаются компоненты вектора перемещения (обычно как линейные функции от толщинной переменной), затем $3D$ задача теории упругости сводится к двумерной для пластин и оболочек (Naghdi, 1957; Пелех, 1973).

Согласно методу разложения по толщине, искомые величины предствляются в виде степенных рядов по поперечной координате z к пластинке или оболочке. Этому методу посвящена монография (Кильчевский,1963). Н.А. Кильчевским вариационным методом выведены также непротиворечивые граничные условия, которые возникали у Коши как проблема.

К методу разложения по толщине можно отнести также представления искомых величин в виде ряда по некоторым специальным функциям от поперечной координаты, в частности по полинимам Лежандра. Такая теория для изотропных оболочек построена И.Н. Векуа (Векуа, 1982). Характерной особенностью методов разложения по толщине является повышение порядка основных разрешающих дифференциальных уравнений с увеличением числа приближений, что приводит к необходимости преодоления значительных математических трудностей.

2. Асимптотическая теория пластин и оболочек

Учитываявышеуказаннуюспецификупластиниоболочек,переходявуравненияхравновесия(движения) и соотношениях упругости $3D$ задачи теории упругости к безрзамерным координатам и пермещениям, всегда есть возможностьвыделить малый геометрический параметр $\varepsilon = h/l$ (h - толщина, l - характерный тангенциальный размер) в этих уравнениях и соотношениях. Казалось бы, можно обычным разложением по этому параметру решить $3D$ задачу. Последовало разочарование, ибо система оказалась сингулярно возмущенной малым параметром. При этом малый параметр оказался коэффициентом не всего старшего оператора, а лишь его части. На сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения математики начали обращать внимание начиная с середины двадцатого века (К. О. Фридрихс, А. Н. Тихонов, В. Вазов, М. И. Вишик и Л. А. Люстерник, А. Х. Найфе и др.). Последовало бурное развитие и появилось множество первоклассных монографий (Вазов В., 1968; Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., 1973; Найфе А. Х., 1976: Ломов С. А., 1981 и др.). Однако в этих монографиях не был обсужден тип сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, возникающих в теории упругости для тонких тел. Для решения подобных уравнений и систем эффективным оказался асимптотический метод. Первыми работами по применению асимптотического метода для решения задач пластин и оболочек являются (FriedrichsandDressler, 1961; Green,1962a; 1962b; Гольденвейзер, 1962). Было доказано, что одним разложением по малому параметру, как в регулярно возмущенных малым параметром уравнениях, задачу решить невозможно. Решение сингулярно возмущенных уравнений и систем складывается из двух качественно различных слагаемых: решения внешней задачи (I^{out}) и решения пограничного слоя (I_b):

$$I = I^{out} + I_b \tag{3}$$

Применительно к $3D$ задаче теории упругости, решением внешней задачи помимо удовлетворения уравнений равновесия (движения) и соотношений упругости, удовлетворяются граничные условия на лицевых поверхностях пластинки или оболочки (внешние условия). Это же решение в русскоязычных публикацияхбыло принято называть решением внутренней задачи (I^{int}) в том плане, что оно справедливо на некотором расстоянии от боковой поверхности, т.е. внутри пластинки или оболочки. Решение I_b локализовано вблизи боковой поверхности и как правило все его величины экспоненциально убывают при удалении от боковой поверхности во внутрь пластинки или оболочки. Эти решения можно построить раздельно.

Решение внешней задачиищется в виде

$$I^{out} = \varepsilon^{q_I + s} I^{(s)}, \quad s = \overline{0, N} \tag{4}$$

где обозначение $s = \overline{0, N}$ означает суммирование по целочисленным значениям повторяющегося (немого) индекса s от нуля до числа приближений N (обозначение Эйнштейна). В случае регулярного возмущения $q_I = 0$. Здесь же значение q_I зависит от искомой функции и от типа краевых условий на лицевых поверхностях. Они должны быть такими, чтобы после подстановки (4) в преобразованные переходом к безразмерным координатам и перемещениям системы и приравнивания в каждом уравнении соответствующих коэффициентов при ε, возможно было получить непротиворечивую систему для определения всех $I^{(s)}$. Это наиболее трудная часть при использовании асимптотического метода. Неслучайно, что некоторые авторы отыскание таких q_I считают искусством (Бабич, Булдырев, 1977). Например, в плоской задаче для полосы (балки) имеем $q_I = -2$ для σ_{xx}, u ; $q_I = -1$ для σ_{xy} ; $q_I = 0$ для σ_{yy} ; $q_V = 0$ в симметричной (растяжение - сжатие), $q_V = -3$ в кососимметричной (изгиб) задачах (Агаловян, 1997). Соответствующее этой асимптотике разрешающее уравнение при $s = 0$ совпадает с уравнением на основе гипотезы плоских сечений Бернулли-Кулона-Эйлера, последующие приближения уточняют данные классической теории балок и стержней. Уникальны свойства решения пограничного слоя для изотропной полосы ширины $2h$. Оно является математически точным. Напряжения σ_{xxb}, σ_{xyb} в произвольном поперечном сечении самоуравновешенны:

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_{xxb} dy = 0, \quad \int_{-h}^{+h} y\sigma_{xxb} dy = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \sigma_{xyb} dy = 0 \tag{5}$$

Все искомые величины пограничного слоя убывают от торца $x=0$ балки (стержня) во внутрь как $\exp\left(-\mathrm{Re}\,\lambda_1 \dfrac{x}{h}\right)$, где λ_1 – первый корень с $\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 0$ уравнения $\sin 2\lambda + 2\lambda = 0$ в симметричной задаче $(\mathrm{Re}\,\lambda_1 \approx 2.106)$ и уравнения $\sin 2\lambda - 2\lambda = 0$ в задаче изгиба $(\mathrm{Re}\,\lambda_1 \approx 3.749)$. Постоянные в решении внешней задачи однозначно определяются, используя свойство (5) и на их значения не влияют самоуравновешенные торцевые нагрузки, т.е. тождественно выполняется принцип Сен-Венана. Таким образом, принцип Сен-Венана есть следствие, вытекающее из математически точного решения плоской задачи.

Асимптотический метод позволяет решить первую краевую $3D$ задачу для термоупругой пластинки

$$D = \{(x, y, z): 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ -h \le z \le h,\ \min(a,b) = l,\ h << l\},$$

обладающей общей анизотропией (21 постоянная упругости). Считается, что на лицевых плоскостях $z = \pm h$ заданы значения напряжений

$$\sigma_{jz}(x, y, \pm h) = \sigma_{jz}^{\pm}(x, y), \qquad j = x, y, z \tag{6}$$

В уравнениях равновесия с учетом объемных сил и соотношениях упругости с учетом влияния температурного поля по модели Дюгамеля-Неймана, переходя к безразмерным координатам $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\zeta = z/h$ и перемещениям $U = u/l$, $V = v/l$, $W = w/l$, снова получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему. Решение этой системы имеет вид (3), а решение внешней задачи вид (4). Для определения $I^{(s)}$ получим непротиворечивую систему, если

$$\begin{aligned} &q_I = -2 \quad \text{для} \quad \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}; \quad q_I = -1 \quad \text{для} \quad \sigma_{xz}, \sigma_{yz}; \\ &q_I = 0 \quad \text{для} \quad \sigma_{zz}; q_I = -2 \quad \text{для} \quad u, v; \quad q_I = -3 \quad \text{для} \quad W \end{aligned} \tag{7}$$

Подставив (4), с учетом (7), в безразмерные уравнения равновесия и соотношения упругости, получим уравнения

$$l_{11}u^{(s)} + l_{12}v^{(s)} = P_1^{(s)}, \quad l_{12}u^{(s)} + l_{22}v^{(s)} = P_2^{(s)} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &B_{11}\frac{\partial^4 W^{(s)}}{\partial \xi^4} + 4B_{16}\frac{\partial^4 W^{(s)}}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2\left(B_{12} + 2B_{66}\right)\frac{\partial^4 W^{(s)}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \\ &\qquad s + 4B_{26}\frac{\partial^4 W^{(s)}}{\partial \xi\, \partial \eta^3} + B_{22}\frac{\partial^4 W^{(s)}}{\partial \eta^4} = q^{(s)} \end{aligned} \tag{9}$$

Написанные в размерных координатах уравнения (8) при $s=0$ совпадают с уравнениями обобщенной плоской задачи, а уравнение (9) с уравнением изгиба по классической теории Кирхгофа для пластинок, имеющих плоскость упругой симметрии. При $s>0$ меняются правые части этих уравнений, куда, помимо нагрузочных слагаемых,будут входить слагаемые, связанные с общей анизотропией. Таким образом, $3D$ задача теории упругости,в случае общей анизотропии сводится к решению обобщенно плоской задачи и задачи изгиба пластинок, имеющих плоскость упругой симметрии.

3. Асимптотика решений неклассических краевых задач пластин и оболочек

Во всех известных монографиях по классической теории пластин и оболочек и по уточненным теориям был рассмотрен лишь один класс задач – на лицевых поверхностях пластины или оболочки заданы значения соответствующих компонент (σ_{jz}) тензора напряжений, т.е. условия первой краевой задачи теории упругости. Между тем случаи, когда на лицевых поверхностях заданы значения перемещений или смешанные условия также имеют большое прикладное значение. Причина оказалась очевидной – гипотезы Кирхгофа-Лява и известных уточненных теорий тут неприменимы. Например, если пластинка лежит на жестком основании $(w=0)$ и верхней лицевой поверхности сообщено штампом нормальное перемещение $w^{+}=const$, то гипотезой классической теории (w не зависит от z) невозможно удовлетворить этим условиям. Поэтому, вероятно трудно было найти подходящую гипотезу и до последнего времени подобные задачи в частных случаях решались аналитическими методами – интегральным преобразованием, методом потенциала и др. Между тем эти задачи остаются классическими краевыми задачами теории упругости.

Автору статьи удалось найти достаточно простую асимптотику для решения сначала соответствующих плоских задач (Агаловян,1982), затем пространственных (Агаловян,1997).

Пусть на лицевой поверхности пластинки D, обладающей общей анизотропией, заданы значения компонент вектора перемещения (условия второй краевой задачи теории упругости):

$$\begin{aligned} &u(\xi,\eta,+h)=u^{+}(\xi,\eta), \quad v(\xi,\eta,+h)=v^{+}(\xi,\eta), \quad w(\xi,\eta,+h)=w^{+}(\xi,\eta)\\ &u(\xi,\eta,-h)=u^{-}(\xi,\eta), \quad v(\xi,\eta,-h)=v^{-}(\xi,\eta), \quad w(\xi,\eta,-h)=w^{-}(\xi,\eta) \end{aligned} \tag{10}$$

или смешанные условия:

$$\begin{aligned} &\sigma_{jz}(\xi,\eta,+h)=\sigma_{jz}^{+}\,(\xi,\eta), \quad j=x,y,z\\ &u(\xi,\eta,-h)=u^{-}(\xi,\eta), \quad (u,v,w) \end{aligned} \tag{11}$$

в частности, $u^{-}=v^{-}=w^{-}=0$

Если в уравненниях трехмерной задачи теории упругости перейти к безразмерным координатам и перемещениям, опять получим сингулярно возмущенную малым параметром систему. Решение внешней задачи будем искать в виде (4). При условиях (10) или (11) мы получим непротиворечивую систему для определения $I^{(s)}$, если

$$q_I = -1 \quad \text{для всех} \quad \sigma_{ij}, \quad i,j = x,y,z$$
$$q_I = 0 \quad \text{для} \quad U,V,W \tag{12}$$

Подставив (4) в преобразованную систему, сучетом (12), получим непротиворечивую систему для определения $I^{(s)}$. Решение этой системы будет содержать шесть неизвестных функций, которые однозначно определяются из шести условий (10) или (11).Таким образом, в отличие от первой краевой задачи, во второй и смешанной краевых задачах все неизвестные сразу выражаются через функции, которые входят в условия (10) или (11). Более того, если функции $u^+, v^+, w^+, \sigma^+_{jz}$ являются многочленами от ξ, η, итерация обрывается и получается математически точное решение во внешней задаче. В качестве иллюстрации сказанного приведем решение второй краевой задачи для ортотропных пластин при $u^-, v^-, w^- = 0$, $u^+, v^+, w^+ = const$. Итерация обрывается на исходном приближении, имеем

$$\sigma_{xz} = \frac{u^+}{2ha_{55}},\ \sigma_{yz} = \frac{v^+}{2ha_{44}},\ \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_{xx} = \frac{A_{13}w^+}{2hA_{33}},\ \sigma_{yy} = \frac{A_{23}w^+}{2hA_{33}},\ \sigma_{zz} = \frac{A_{12}w^+}{2hA_{33}}$$

$$u = \frac{u^+}{2h}(h+z), \quad v = \frac{v^+}{2h}(h+z), \quad w = \frac{w^+}{2h}(h+z) \tag{13}$$

$$A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad A_{13} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}, \quad A_{23} = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23},$$
$$A_{33} = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2$$

Асимптотика (4), (12) оказалась востребованной для решения краевых задач для слоистых пластин и оболочек (Агаловян,1997; Агаловян, Геворгян, 2005). Эта же асимптотика позволяет решить $3D$ динамические задачи теории упругости для пластин и оболочек. При этом не только вторую и смешанную краевые задачи, а и первую (Агаловян,2000; 2008; 2015а; 2017).

В середине двадцатого века сейсмологи обнаружили, что перед сильным землетрясением происходит значительная деформация поверхности Земли в зоне землетрясения. Тогда же возникла естественная задача (Rikitake)– можноли, измеряя перемещения точек поверхности сейсмоопасных зон, определить напряженно-деформированное состояние (НДС) блока земной коры или литосферной плиты Земли. Асимптотический метод позволяет решить и эту проблему для блоков в виде слоистых пластин и оболочек. Определив НДС, можно осуществить мониторинг его изменения во времени на основе новых измерений, выявить критические состояния и их местоположение. Вычисление же энергии деформации позволит оценить магнитуду ожидаемого землетрясения (Aghalovyan, 2015b; Aghalovyan, Aghalovyan,2021).

Асимптотический метод был использован и в некоторых других областях механики сплошной среды.

С.О. Саркисяном построены:

- Асимптотическая теория магнитоупругости тонких оболочек и пластин (Саркисян, 1992);
- Асимптотическая теория микрополярных упругих тонких пластин и оболочек (Саркисян, 2008;2012);
- Теория микрополярных упругих (термоупругих) тонких пластин и оболочек (Саркисян, 2011a; 2011b;2013;2019a);
- Моменто-мембранная теория упругих тонких оболочек и пластин как модель для двумерных наноматериалов (Саркисян, 2019 b; 2020;2021a;2021b).

Резюмируя изложенное выше, можно констатировать, что созданная в Армении усилиями С. А. Амбарцумяна Научная школа по теории оболочек и пластин занимает достойное место в мировой науке по механике сплошной среды, в частности, по механике тонкостенных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агаловян Л.А.** (1982) О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела.// Межвуз.Сб: Изд-во ЕГУ. Вып.2.С .7-12.
2. **Агаловян Л.А.** (1997) Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит. 414с.
3. **Агаловян Л.А.** (2000) К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин.// Изв. Вузов. Северо-Кавказ. Регион. Естеств. Наук. №3.С.78.
4. **Агаловян Л.А., Геворкян Р.С**.(2005) Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек.Изд. «Гитутюн». Ереван. 468с.
5. **Aghalovyan L.A.**(2008)An asymptotic method for solving three-dimensional boundary value problems of statics and dynamics of thin bodies // Proc. IUTAM Symp. On the Relations of Shells, Plate, Beam and 3D Models, Springer. P. 1-20.
6. **Aghalovyan L.A.**(2015a) Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore.London. World Scientific Publishing. 376 p.
7. **Aghalovyan L.A.** (2015b) On Some Classes of 3D Boundary-Value problems of Statics and Dynamics of Plates and Shells. In book: Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology. Springer International Publishing. Switzerland,P.1-23.
8. **Агаловян Л.А.** (2017) О пространственных динамических задачах пластин и оболочек // Изв. НАНРАМеханика,Т.20, №1, С.3-21.
9. **Aghalovyan M.L., Aghalovyan L.A.** (2021) On one class of spatial problems of layered plates and applications in seismology. In the book: Recent approaches in the theory of plates and plate-like structures (Advanced Structured Materials, 151), Chapter 1, Springer Nature Switzerland AG, pp.1-16.
10. **Амбарцумян С.А.**(1961) Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз. 384с.
11. **Ambartsumyan S.A.** (1964) Theory of anisotropic shells.Washington. 396p.(NASA Technical Translation)
12. **Амбарцумян С.А.**(1967) Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 266с.

13. **Ambartsumyan S.A.** (1971) Theory of anisotropic plates. Technomic Publishing Co., USA. 248p.
14. **Амбарцумян С.А.**(1974) Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. Физматлит.448с.
15. **Амбарцумян С.А.**(1987) Теория анизотропных пластин.Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука. 360с.
16. **Ambartsumyan S.A.** (1991) Theory of anisotropic plates. Hemisphere Publishing Co., USA. 361p.
17. **Амбарцумян С.А.,Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.** (1977) Магнитоупругость тонких оболочек. М.: Наука. 272с.
18. **Амбарцумян С.А.**(1982) Разномодульная теория упругости. М.: Наука. 317с.
19. **Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.** (1991) Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван. Изд.Ер. гос. Ун-та. 143с.
20. **Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.** (1992) Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин. Ереван. Изд.АН Армении. 124с.
21. **Амбарцумян С.А.,Багдасарян Г.Е.** (1996) Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Физматгиз. 286с.
22. **Амбарцумян С.А.** (1999) Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван, «Гитутюн». 214с.
23. **Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.** (2010) Прикладная микрополярная теория упругих оболочек. Ереван, Гитутюн. 136с.
24. **Бабич В.М., Булдырев В.С.** (1977) Искусство асимптотики.// Вестник Ленинград. Ун-та. №13. Вып.3. С.5-12.
25. **Багдасарян Г.Е.** (1999) Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Изд. ЕГУ. 440с.
26. **Baghdasaryan G., Mikilyan M.** (2016) Effects of Magnitoelastic Interaction in Conductive Plates and Shells. Springer. ISBN 978-3-319-19161-4. 289p.
27. **Baghdasaryan G., Danoyan Z.** (2018) Magnitoelastic Waves. Springer. ISBN 978-981-10-6762-4. 270p.
28. **Вазов В.** (1968) Асимтотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.:Мир. 464с.
29. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** (1973) Асимтотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.:Наука. 272с.
30. **Векуа И.Н.** (1982) Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.:Наука. 285с.
31. **Власов В.З.** (1949)Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.,Л.:Гостехтеориздат. 784с.
32. **Гольденвейзер А.Л.** (1953, 1976) Теория упругих тонких оболочек М.:Наука. 512с.
33. **Гольденвейзер А.Л.** (1962) Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрировния уравнений теории упругости //ПММ. Т.26. Вып.4.С.668-686.
34. **Green A.E.**(1962a) On the Linear Theory of Thin Elastic Shells //Proc. Roy. Soc. Ser. A. Vol.266. №1325.

35. **Green A.E.** (1962b) Boundary Layer Equations in the Linear Theory of Thin Elastic Shells //Proc. Roy. Soc. Ser. A. Vol. 269. №1339.
36. **Доннелл Л.Г.** (1982) Балки, пластины и оболочки. М.:Наука. 567с.
37. **Кильчевский Н.А.** (1963) Основы аналитической механики оболочек. Киев. Изд-во АН УССР. 354с.
38. **Лехницкий С.Г.** (1957) Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат. 463с.
39. **Ломов С.А.** (1981) Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.:Наука. 398с.
40. **Лурье А.И.** (1947) Статика тонкостенных оболочекМ.:Гостехiздат. 252с.
41. **Ляв А.** (1935) Математическая теория упругости. М. ОНТИ.
42. **Муштари Х.М., Галимов К.З.** (1957) Нелинейная теория упругих оболочек. Казань. Таткнигоиздат. 431с.
43. **Naghdi P.M.** (1957) On the Theory of Thin Elastic Shells// Quatr. Appl. Math. Vol.14. , №4, P.369-380.
44. **Найфе А.Х.** (1976) Методы возмущений М.:Мир. 455с.
45. **Новожилов В.В.** (1962) Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз. 431с.
46. **Пелех Б.Л.** (1973) Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев. Наук. Думка. 248с.
47. **Reissner E.** (1944) On the theory of bending of Elastic plates//J. Math. And Phys. Vol. 23.
48. **Reissner E.** (1945) The Effects of Transversal-Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates//J. Appl. Meh. Vol. 12.
49. **Саркисян С.О.** (1992) Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении. 1992. 260 с.
50. **Саркисян С.О.** (2008) Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости// Прикладная математика и механика. Т. 72. Вып. 1. С. 129-147.
51. **Саркисян С.О.** (2011a) Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Физическая мезомеханика. Т. 14. № 1. С. 55-66.
52. **Саркисян С.О.** (2011b) Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Доклады Российской академии наук. Т. 436. № 2. С. 195-198.
53. **Саркисян С.О.** (2012) Теория микрополярных упругих тонких оболочек// Прикладная математика и механика. Т. 76. Вып. 2. С. 325-343.
54. **Sargsyan S.H.** (2013) Mathematical Model of Micropolar Thermo-Elasticity of Thin Shells// Journal of Thermal Stresses. Vol. 36. № 11. P. 1200-1216.
55. **Sargsyan S.H.** (2019a)Applied Theory of Dynamics of Micropolar Elastic Thin Shells and Variation Principles// Advanced Structured Materials. Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures. Springer. V. 103. P. 449-464.
56. **Саркисян С.О.** (2019b)Дискретно-континуальная и континуально-моментная модели графена для деформаций в своей плоскости// Физическая мезомеханика. Т. 22.№ 5. С. 28-33.
57. **Саркисян С.О.** (2020) Модель тонких оболочек в моментной теории упругости с деформационной концепцией “сдвиг плюс поворот”// Физическая мезомеханика. 2020. Т. 23. N4. С. 13-19.

58. **Саркисян С.О.**(2021a) Некоторые вопросы построения континуальной теории и расчёта деформаций графена// Перспективные материалы и технологии. Монография. Глава 32. Минск: Изд-воНАНБеларуси. С. 462-472.
59. **Sargsyan Samvel H.** (2021b) Moment-Membrane model of a plate as a continual model of graphene deformations and a finite element method for its calculation // AIP Conference Proceedings 2448, 020020: https://doi.org/10.1063/5.0073269
60. **Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.** (1963) Пластинки и оболочки. М.: Физматлит. 636с.
61. **Тимошенко С.П.** (1965) Сопротивление материалов. Т.1. М.: Физматлит. 364с.
62. **Филин А.П.** (1987) Элементы теории оболочек. Л. Стройиздат. 384с.
63. **Флюгге В.** (1961) Статика и динамика оболочек. М: Госстройиздат. 306с.
64. **Friedrichs K.O. and Dressler R.F.** (1961) A Boundary-Layer Theory for Elastic Plates // Comm. PureandAppl. Math. Vol. 14, № 1.
65. **Саркисян С. О.** (2022) Вариационные принципы моментно-мембранной теории оболочек//Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. № 1. С. 38-47.

Сведения об авторе

Агаловян Ленсер Абгарович – академик НАН РА, докт. физ.-мат. наук, зав. отделом «Механика тонкостенных систем» Института механики НАН РА,
Тел: (+37410)529630, E-mail:lagal@sci.am

Поступила в редакцию 16.03. 2022