

**НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С
МЕЖФАЗНЫМ ДЕФОРМИРУЕМЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ**

Акопян Л.В., Амирджанян А.А., Даштоян Л.Л., Джилавян С.А.,

Ключевые слова: смешанная задача, контактная задача, межфазное включение, изгиб и растяжения балки.

Наkobyan L, Amirjanyan H., Dashtoyan L., Jilavyan S.

Stress state of a piece-homogeneous plane with interfacial deformable inclusion

Keywords: mixed boundary value problem, interfacial inclusion, bending and stretching of a beam

The work considers the plane stress state of a piecewise-homogeneous plane, of two heterogeneous half-planes, which is reinforced by a deformable thin inclusion at the junction of the half-planes and is deformed under action of distributed loads applied to the inclusion. It is assumed the inclusion undergo both tension and bending. A governing system of integro-differential equations with respect to jumps of contact stresses acting on the long sides of the inclusion is derived. The solution of the governing system in the general case is constructed by numerical-analytical method of mechanical quadratures. In the case of an infinite inclusion, an exact solution to the problem is obtained.

Հակոբյան Լ.Վ., Ամիրջանյան Հ.Ա., Դաշտոյան Լ.Լ., Զիլավյան Ս.Տ.

Միջֆազային դեֆորմացվող ներդրակով կտոր առ կտոր համասեռ հարթության լարվածային վիճակը

Նիւնաբառեր՝ խառը եզրային խնդիր, միջֆազային ներդրակ, կոնֆակտային խնդիր, հեծանի ծռում և ձգում:

Դիտարկված է կտոր առ կտոր համասեռ հարթության հարթ-դեֆորմացիոն վիճակը, որը երկու փարբեր կիսահարթությունների միացման գծի վրա ուժեղացված է դեֆորմացվող բարակ ներդրակով և դեֆորմացվում է ներդրակի վրա ազդող բաշխված բեռների ազդեցության փակ: Ենթադրվում է, որ ներդրակը ոչ միայն ձգվում է, այլ նաև ծռվում: Մտացված է խնդրի որոշիչ ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը ներդրակի երկար կողմերին գործող լարումների թռիչքների նկարմամբ, որի լուծումը, ընդհանուր դեպքում, կառուցվել է մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի մեթոդի օգնությամբ: Անվերջ ներդրակի դեպքում կառուցված է խնդրի փակ լուծումը:

В работе рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости, составленной из двух разнородных полуплоскостей, которая на линии стыка полуплоскостей усилена деформируемым тонким включением и деформируется под воздействием нормальных и касательных нагрузок, приложенных к включению. Полагается, что включение подвергается как растяжению, так и изгибу. Выведена ключевая система интегро-дифференциальных уравнений относительно скачков контактных напряжений, действующих на длинных сторонах включения. Решение ключевой системы, в общем случае, построено численно аналитическим методом механических квадратур. В случае бесконечного включения получено точное решение задачи.

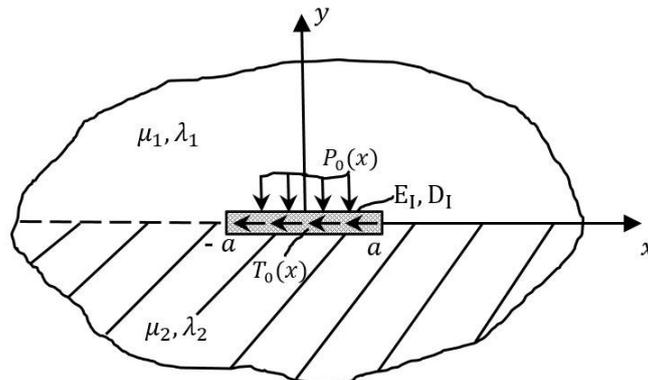
1 Введение

Плоско-деформированное или обобщённое плоское напряжённое состояние однородных массивных тел с концентраторами напряжений типа деформируемых накладок или включений хорошо изучено. Многие результаты в этом направлении приведены в монографии [1]. В этой связи укажем также на работы [2–11], где исследован ряд плоских задач для упругой плоскости и полуплоскости с деформируемыми накладками и включениями, относительно которых, главным образом, предполагалось, что они не сопротивляются изгибу и подвергаются только растяжению. Особо отметим монографию [4], где приведены некоторые результаты взаимодействия упругих накладок с упругими основаниями с одновременным учетом растягивания и изгиба накладок. Однако число аналогичных исследований как для однородных массивных тел с деформируемыми накладками и включениями, так и для кусочно-однородных массивных тел с межфазными деформируемыми включениями, где наряду с растяжением включения нужно учесть также и его изгиб, очень мало.

Исходя из вышесказанного, на основе простых моделей растяжения и изгиба балки, здесь рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости с межфазным деформируемым тонким включением конечной длины.

2 Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.

Пусть кусочно-однородная упругая плоскость, отнесённая к декартовой системе координат Oxy , изготовленная путем соединения двух разнородных полуплоскостей с коэффициентами Ламе μ_1, λ_1 и μ_2, λ_2 , на интервале $L = (-a, a)$ линии соединения полуплоскостей усилена деформируемым тонким включением толщины h_I , с приведённым модулем деформации E_I^* и жесткостью изгиба D_I . Полагается, что плоскость деформируется под воздействием нормальных $P_0(x)$ и касательных $T_0(x)$ распределенных нагрузок, действующих на включение (Фиг.1).



Фиг. 1

При этом, включение будем трактовать как одномерный континуум, который под воздействием приложенной к нему нагрузки одновременно подвергается как растяжению, так и к изгибу. Будем считать, что вследствие малости толщины включения смещения точек его

длинных сторон одинаковы и определяются из независимых уравнений растяжения и изгиба средней линии включения.

Требуется вывести определяющую систему интегро-дифференциальных уравнений поставленной задачи и построить ее эффективное решение, определить закономерности изменения как контактных, так и касательных контактных напряжений, действующих на сторонах включения, в зависимости от упругих характеристик включения и разнородных полос.

Вследствие сделанных предположений, в зоне контакта включения с матрицей имеют место следующие условия контакта:

$$\begin{aligned} \frac{dV_j(x,0)}{dx} &= v'_I(x) + \gamma; \\ \frac{dU_j(x,0)}{dx} &= \varepsilon_I(x) = u'_I(x) \end{aligned} \quad (-a < x < a; \quad j = 1, 2) \quad (1.1)$$

Здесь $V_j(x, y)$, $U_j(x, y)$ ($j = 1, 2$) соответственно вертикальные и горизонтальные компоненты смещений точек разнородных полуплоскостей, удовлетворяющие, каждая в своей области определения, уравнениям Ламе, связанные с нормальными $\sigma_y^{(j)}(x, y)$ и касательными $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$ напряжениями, действующими в разнородных полуплоскостях, известными соотношениями, γ - угол поворота включения. $v_I(x)$ и $u_I(x)$ соответственно вертикальная и горизонтальная компоненты смещений средней линии включения, удовлетворяющие уравнениям [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_I}{dx^2} &= \frac{1}{h_I E_I^*} [T_0(x) - \tau(x)]; \quad (-a < x < a) \\ \frac{d^4 v_I}{dx^4} &= -\frac{1}{D_I} [P_0(x) - \sigma(x)], \quad (-a < x < a) \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ - компоненты скачков нормальных и касательных напряжений, действующих на длинные стороны включения, которые выражаются через компоненты напряжений разнородных полуплоскостей на берегах линии L по формулам:

$$\tau(x) = \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau_{xy}^{(2)}(x, 0); \quad \sigma(x) = \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma_y^{(2)}(x, 0),$$

$$E_I^* = \frac{E_I}{2(1 - \nu_I^2)}; \quad D_I = \frac{E_I h_I^3}{12(1 - \nu_I^2)};$$

E_I и h_I соответственно модуль упругости и толщина включения.

Из уравнений (1.2), при условии отсутствия перерезывающей силы и момента в концевых точках включения, находим:

$$\begin{aligned} \frac{du_I}{dx} &= \frac{1}{h_I E_I^*} \int_{-a}^x [T_0(s) - \tau(s)] ds; \quad (-a < x < a) \\ \frac{dv_I}{dx} &= -\frac{1}{D_I} \int_{-a}^x G'_x(x-s) [P_0(s) - \sigma(s)] ds; \quad (-a < x < a) \\ &\left(G(x) = |x|^3/12 \right), \end{aligned} \quad (1.3)$$

Чтобы удовлетворить условиям контакта, определим компоненты смещений разнородных

полуплоскостей на берегах линии L через компоненты скачков нормальных и касательных напряжений. Для этого будем использовать разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости с межфазной трещиной, приведенные в [6]. Учитывая при этом, что в рассматриваемом случае компоненты дислокации смещений равны нулю, будем иметь:

$$\begin{aligned} v'_1(x, 0) = v'_2(x, 0) &= -\frac{d_0}{\Delta}\tau(x) - \frac{d_1}{\pi\Delta} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds, \\ u'_1(x, 0) = u'_2(x, 0) &= \frac{d_0}{\Delta}\sigma(x) - \frac{d_1}{\pi\Delta} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds \end{aligned} \quad (1.4)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}}{2}; & d_1 &= \frac{\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}}{2}; & \vartheta_1^{(j)} &= \frac{\mu_j}{2 + \alpha_j}; & \vartheta_2^{(j)} &= \frac{(1 + \alpha_j)\mu_j}{2 + \alpha_j}; \\ \Delta &= \left(\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}\right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}\right)^2; & \alpha_j &= \frac{1}{1 - 2\nu_j}; & (j &= 1, 2). \end{aligned}$$

Далее, используя представления (1.3) и (1.4), удовлетворим условиям контакта (1.1). В итоге придем к следующей определяющей системе интегро-дифференциальных уравнений для определения компонентов скачков напряжений на длинных сторонах включения:

$$\begin{aligned} \frac{d_0}{\Delta}\tau(x) + \frac{d_1}{\pi\Delta} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds &= \frac{1}{D_I} \left[\int_{-a}^a G'_x(x-s) [P_0(s) - \sigma(s)] ds \right] - \gamma \\ \frac{d_0}{\Delta}\sigma(x) - \frac{d_1}{\pi\Delta} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds &= \frac{1}{h_I E_I^*} \int_{-a}^x [T_0(s) - \tau(s)] ds \\ &(-a < x < a) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Систему (1.5) нужно рассматривать вместе с уравнениями равновесия включения, которые можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \sigma(x) dx &= P_0^*; & \int_{-a}^a \tau(x) dx &= T_0^*; & \int_{-a}^a x [\sigma(x) - P_0(x)] dx &= 0, \\ \left(P_0^* &= \int_{-a}^a P_0(x) dx; & T_0^* &= \int_{-a}^a T_0(x) dx \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Таким образом решение задачи свелось к решению системы интегро-дифференциальных уравнений (1.5) при условиях (1.6). После решения системы определяющих уравнений кон-

тактные напряжения определяются формулами [5]:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \frac{l_0}{\Delta} \sigma(x) + \frac{l_2}{\pi \Delta} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds; & \sigma_y^{(2)}(x, 0) &= \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma(x); \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= \frac{l_0}{\Delta} \tau(x) - \frac{l_2}{\pi \Delta} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds; & \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) &= \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau(x).\end{aligned}\tag{1.7}$$

Решение системы определяющих уравнений.

Решение определяющей системы уравнений (1.5) будем строить численно-аналитическим методом механических квадратур. Для этого введем в рассмотрение комплексную комбинацию скачков напряжений $\varphi(x) = \sigma(x) - i\tau(x)$ и систему (1.5) запишем в следующем виде:

$$\varphi(x) - \frac{q}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi(s)}{s-x} ds + \int_{-a}^a K_1(x, s) \varphi(s) ds + \int_{-a}^a K_2(x, s) \bar{\varphi}(s) ds = f(x) + \frac{i\Delta}{d_0} \gamma \tag{1.8}$$

$(-a < x < a)$

где

$$\begin{aligned}q &= d_1/d_0, & K_1(x, s) &= \frac{\Delta}{2id_0D_i} [G'_x(s-x) - h_I^2 H(x-s)/6]; \\ K_2(x) &= \frac{\Delta}{2id_0D_i} [G'_x(x) + h_I^2 H(x)/6]; \\ f(x) &= -\frac{i\Delta}{d_0D_i} \int_{-a}^a [G'_x(s-x) P_0(s) - h_I^2 H(x-s) T_0(s)/6] ds.\end{aligned}$$

При помощи замены переменных $x = at$ и $s = a\tau$ уравнение (1.8) сформулируем на интервале $(-1, 1)$. Получим:

$$\psi(t) - \frac{q}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\psi(\tau)}{\tau-t} d\tau + \int_{-1}^1 K_1^*(t, \tau) \psi(\tau) d\tau + \int_{-1}^1 K_2^*(t, \tau) \bar{\psi}(\tau) d\tau = f_*(t) + i\gamma_* \tag{1.9}$$

$(-1 < x < 1)$

Здесь

$$\begin{aligned}\psi(t) &= a\varphi(at) / |N_0|; & f_*(t) &= af(at) / |N_0|; & \gamma_* &= \frac{\gamma a \Delta}{|N_0| d_0}; \\ N_0 &= P_0^* + iT_0^*; & K_j^*(t, \tau) &= aK_j(at, a\tau) \quad (j = 1, 2).\end{aligned}$$

Условия (6) при этом примут вид:

$$\int_{-1}^1 \psi(t) dt = N_0^*; \quad \int_{-1}^1 \operatorname{Re}[t \psi(t)] dt = M_0; \quad (1.10)$$

$$\left(N_0^* = N_0/|N_0|; \quad M_0 = \int_{-1}^1 \frac{aP_0(at)}{|N_0|} t dt \right).$$

Нетрудно установить, что функция $\psi(t)$ в концевых точках интервала интегрирования $t = \pm 1$ имеет осциллирующую особенность и ее можно представить в следующем виде [11]:

$$\psi(t) = \frac{\psi^*(t)}{(1+t)^{1/2-i\beta}(1-t)^{1/2+i\beta}} \quad (1.11)$$

$$\left(\beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2(\mu_1 + 1\mu_2)}{1(\mu_2 + 2\mu_1)}; \quad j = 3 - 4\nu_j; \quad j = 1, 2 \right)$$

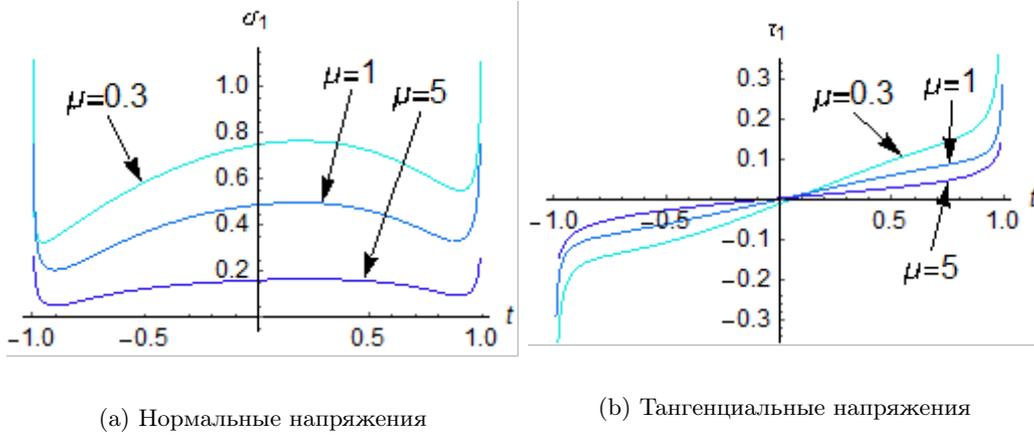
где функция $\psi^*(t)$ - непрерывная ограниченная функция на замкнутом интервале $[-1, 1]$, а ν_j ($j = 1, 2$) - коэффициенты Пуассона разнородных полуплоскостей.

Подставляя значение функции $\psi(t)$ из (1.11) в (1.9) и (1.10), по известной процедуре [12], приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции $\psi^*(t)$ в узлах квадратурной формулы $\psi^*(\xi_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и приведенного угла поворота включения γ_* . После определения этих значений можно восстановить функцию $\psi^*(t)$ при помощи формулы Лагранжа.

Некоторые численные результаты

Проведён численный расчёт и изучены закономерности изменения безразмерных контактных напряжений $\sigma_1(t) = a\sigma_y^{(1)}(at, 0)/|N_0|$ и $\tau_1(t) = a\tau_{xy}^{(1)}(at, 0)/|N_0|$ на длинных сторонах включения, а также приведенного угла поворота включения γ_* в зависимости от отношения $\mu = \mu_2/\mu_1$ в случае фиксированных значений коэффициентов Пуассона ν_j ($j = 1, 2$), модуля упругости включения E_I , отношения $l = h/2a$, когда $aP_0(xa)/|N_0| = \cos(x - 0.5)$, $aT_0(xa)/|N_0| = 0.5x$ и $|N_0|/a\mu_1 = 0.1$.

Результаты численных расчётов приведены на Фиг. 2и в таблице 1. На Фиг. 2а и Фиг. 2б приведены соответственно графики распределения безразмерных нормальных и касательных контактных напряжений для разных значений параметра μ в случае, когда $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.25$, $\mu_I/\mu_1 = 20$ и $l = 0.1$. Из них видно, что при выбранных значениях параметров увеличение параметра $\mu = \mu_2/\mu_1$, что можно трактовать как увеличение жесткости нижней полуплоскости при постоянной жесткости верхней полуплоскости, приводит к уменьшению нормальных напряжений в средней части зоны контакта, а касательные контактные напряжения, при этом, по абсолютной величине уменьшаются во всей зоне контакта.



Фиг. 2

В таблице 1. приведены значения приведенного угла поворота включения γ_* при тех же значениях параметров и той же внешней нагрузке,

μ	0.2	0.5	1	3	5	10
γ_*	-0.068	-0.049	-0.032	-0.0106	-0.0047	-0.0004

Таблица 1: Приведенный угол поворота

2 Кусочно-однородная плоскость с бесконечным межфазным включением

Теперь рассмотрим частный случай поставленной задачи, когда включение бесконечное и на него в точке $x = x_0$ под углом α действует сосредоточенная сила P_0 , т.е. имеем $P_0(x) = P_0 \sin \alpha \delta(x - x_0)$ и $T_0(x) = P_0 \cos \alpha \delta(x - x_0)$.

Учитывая, что в рассматриваемом случае угол поворота включения равен нулю, систему (5) и условия (6) запишем в виде:

$$\frac{d_0}{\Delta} \tau(x) + \frac{d_1}{\pi \Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(s)}{s-x} ds = -V_I(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2.1)$$

$$\frac{d_0}{\Delta} \sigma(x) - \frac{d_1}{\pi \Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(s)}{s-x} ds = U_I(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) dx = P_0 \sin \alpha; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x) dx = P_0 \cos \alpha. \quad (2.2)$$

Здесь

$$U_I(x) = \frac{du_I}{dx} = \frac{1}{h_I E_I^*} \left[P_0 \cos \alpha H(x - x_0) - \int_{-\infty}^x \tau(s) ds \right]; \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$V_I(x) = \frac{dv_I}{dx} = -\frac{1}{D_I} \left[P_0 \sin \alpha G'_x(x - x_0) - \int_{-\infty}^{\infty} G'_x(x - s) \sigma(s) ds \right]; \quad (-\infty < x < \infty)$$

Далее, к обеим частям уравнений (1.2) и (2.1) применим обобщенное преобразование Фурье. Учитывая формулу для преобразования свертки [?] и значение интеграла [?]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{x} dx = i\pi \operatorname{sign}(p)$$

получим:

$$\bar{U}_I = \frac{i}{ph_i E_I^*} [P_0 \cos \alpha e^{ix_0 p} - \bar{\tau}(p)];$$

$$\bar{V}_I = \frac{i}{p^3 D_i} [P_0 \sin \alpha e^{ix_0 p} - \bar{\sigma}(p)]$$
(2.3)

$$\frac{d_0}{\Delta} \bar{\sigma}(p) + i \frac{d_1 \operatorname{sign}(p)}{\Delta} \bar{\tau}(p) = \bar{U}_I(p);$$

$$\frac{d_0}{\Delta} \bar{\tau}(p) - i \frac{d_1 \operatorname{sign}(p)}{\Delta} \bar{\sigma}(p) = -\bar{V}_I(p).$$
(2.4)

Подставляя значения $\bar{U}_I(p)$ и $\bar{V}_I(p)$ из (2.3) в (2.4), для определения образов Фурье скачков напряжений $\bar{\sigma}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) e^{ipx} dx$; $\bar{\tau}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x) e^{ipx} dx$, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{d_1 |p| p^2}{\Delta} + \frac{1}{D_I} \right) \bar{\sigma}(p) + \frac{id_0 p^3}{\Delta} \bar{\tau}(p) = \frac{P_0 \sin \alpha e^{ipx_0}}{D_I}; \\ \frac{id_0 p}{\Delta} \bar{\sigma}(p) - \left(\frac{1}{E_I^* h_I} + \frac{d_1 |p|}{\Delta} \right) \bar{\tau}(p) = -\frac{P_0 \cos \alpha e^{ipx_0}}{E_I^* h_I}. \end{cases}$$
(2.5)

Отсюда найдем:

$$\bar{\sigma}(p) = -\frac{P_0 \cos \alpha e^{ipx_0}}{\Delta_*} [id_0 h_I^2 p^3 / 6 - d_1 \operatorname{tg} \alpha |p| - \Delta \operatorname{tg} \alpha / (h_I E_I^*)];$$
(2.6)

$$\bar{\tau}(p) = \frac{P_0 \cos \alpha e^{ipx_0}}{\Delta_*} [d_1 h_I^2 p^2 |p| / 6 + ipd_0 \operatorname{tg} \alpha + \Delta / (h_I E_I^*)],$$
(2.7)

где

$$\Delta_* = \frac{1}{4}D_I p^4 + \frac{1}{6}h_I^2 d_1 |p| p^2 + d_1 |p| + \frac{\Delta}{h_I E_I^*}$$

Нетрудно заметить, что

$$\bar{\sigma}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) dx = P_0 \sin \alpha; \quad \bar{\tau}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x) dx = P_0 \cos \alpha,$$

т.е. условия равновесия включения удовлетворены автоматически. Из формул (2.6) и (2.7) скачки контактных напряжений можно найти по формулам обратного преобразования Фурье:

$$\sigma(x) = -\frac{P_0 \cos \alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{id_0 h_I^2 p^3}{6} - d_1 \operatorname{tg} \alpha |p| - \frac{\Delta \operatorname{tg} \alpha}{h_I E_I^*} \right] \frac{e^{-ip(x-x_0)}}{\Delta_*} dp; \quad (2.8)$$

$$\tau(x) = \frac{P_0 \cos \alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d_1 h_I^2 p^2 |p|}{6} + ipd_0 \operatorname{tg} \alpha + \frac{\Delta}{h_I E_I^*} \right] \frac{e^{-ip(x-x_0)}}{\Delta_*} dp. \quad (2.9)$$

Определим контактные напряжения. С этой целью, применяя к уравнениям (1.7) преобразование Фурье, придем к соотношениям:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_y^{(1)}(p, 0) &= \frac{l_0}{\Delta} \bar{\sigma}(p) - \frac{il_2 \operatorname{sign}(p)}{\Delta} \bar{\tau}(p); & \bar{\sigma}_y^{(2)}(p, 0) &= \bar{\sigma}_y^{(1)}(p, 0) - \bar{\sigma}(p); \\ \bar{\tau}_{xy}^{(1)}(p, 0) &= \frac{l_0}{\Delta} \bar{\tau}(p) + \frac{il_2 \operatorname{sign}(p)}{\Delta} \bar{\sigma}(p); & \bar{\tau}_{xy}^{(2)}(p, 0) &= \bar{\tau}_{xy}^{(1)}(p, 0) - \bar{\tau}(p). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставляя значения $\bar{\sigma}(p)$ и $\bar{\tau}(p)$ из (2.6) и (2.7) в (2.10), найдем

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_y^{(1)}(p, 0) &= -\frac{P_0 e^{ipx_0} \cos \alpha}{\Delta_*} \left[\frac{i\vartheta_1^{(1)} h_I^2 p^3}{12} - \frac{\vartheta_2^{(1)} \operatorname{tg} \alpha |p|}{2} - \frac{l_0 \operatorname{tg} \alpha - il_2 \operatorname{sign} p}{h_I E_I^*} \right]; \\ \bar{\tau}_{xy}^{(1)}(p, 0) &= \frac{P_0 e^{ipx_0} \cos \alpha}{\Delta_*} \left[\frac{\vartheta_2^{(1)} h_I^2 |p|^3}{12} + \frac{ip\vartheta_1^{(1)} \operatorname{tg} \alpha}{2} + \frac{l_0 + il_2 \operatorname{sign} p \operatorname{tg} \alpha}{h_I E_I^*} \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Отсюда, при помощи обратного преобразования Фурье получим:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(x, 0) &= -P_0 \cos \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{i\vartheta_1^{(1)} h_I^2 p^3}{12\Delta_*} - \frac{\vartheta_2^{(1)} \operatorname{tg} \alpha |p|}{2\Delta_*} - \frac{l_0 \operatorname{tg} \alpha - il_2 \operatorname{sign} p}{\Delta_* h_I E_I^*} \right] e^{-ip(x-x_0)} dp; \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= P_0 \cos \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\vartheta_2^{(1)} h_I^2 |p|^3}{12\Delta_*} + \frac{ip\vartheta_1^{(1)} \operatorname{tg} \alpha}{2\Delta_*} + \frac{l_0 + il_2 \operatorname{sign} p}{\Delta_* h_I E_I^*} \right] e^{-ip(x-x_0)} dp. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что функции $\bar{\sigma}_y^{(1)}(p, 0)$ и $\bar{\tau}_{xy}^{(1)}(p, 0)$ на бесконечности ведут себя соответственно как $1/p$ и $1/|p|$. Следовательно в точке приложения нагрузки $x = x_0$ нормальные и касательные контактные напряжения ведут себя соответственно как функции $\operatorname{sign}(x - x_0)$

и $\ln|x - x_0|$.

Заклучение.

Таким образом, изучено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости с межфазным деформируемым включением. Полагается, что включение одновременно подвергается как растяжению, так и изгибу. На основе разрывных решений уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости и простых моделей растяжения и изгиба балки выведены определяющие интегральное и интегро-дифференциальное уравнения поставленной задачи, решение которых, в случае конечного включения, построено численно-аналитическим методом механических квадратур. В случае бесконечного включения, когда на него действует сосредоточенная нагрузка, методом интегрального преобразования Фурье построено точное решение задачи. Показано, что в точке приложения нагрузки нормальные и касательные контактные напряжения ведут себя соответственно как функции $\text{sign}(x)$ и $\ln|x|$.

Литература

- [1] Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.- М.: Наука, 1983.- 488с.
- [2] Ефимов А.Б., Малый В.И., Толкачева Н.М. Контактная задача для упругого тела с тонким покрытием, МТТ, 1969, №1, с.166-171.
- [3] Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином, ПММ, 1975, т.39,вып. 6, с. 1100-1109.
- [4] Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. //Изд. ЕГу, Ереван, 1983, 255с.
- [5] Григорян Э.Х. Изгиб полубесконечной балки, лежащей на упругой полуплоскости, Изв. НАН Армении, Механика, 1992, т. 45, №1-2, с.11-26
- [6] Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Издательство Гитутюн НАН РА, Ереван -2014, 322с.
- [7] Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О задаче изгиба полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости, Изв. НАН РА, Механика, 2008, т. 61, №4, с. 5-19
- [8] Агаян К.Л. Изгиб двух полубесконечных балок на крае упругой полуплоскости плоским штампом, Изв. НАН РА, Механика, 2010, т. 63, №4, с.3-11.
- [9] Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. //Изв. НАН РА. Механика. 2009. Т.62. №3. С.29-43.

- [10] В.Н.Акопян, А.А.Амирджанян Напряжённое состояние кусочно-однородной равномерно слоистой плоскости с системой периодических параллельных внутренних включений // Известия НАН РА, Механика, т.71, № 2, 2018г, с. 3-17. <http://doi.org/10.33018/71.2.1>
- [11] Hakobyan V., Dashtoyan L. Doubly periodic problem for piecewise homogeneous plane with absolutely rigid inclusions // Proceedings of 8th International Conference Contemporary Problems of Architecture and Construction, Yerevan, 2016, pp.125-128
- [12] A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
- [13] Снеддон Н.И. Преобразование Фурье //Москва : Изд-во иностр. лит.,1955.– 668 с.
- [14] Брычков.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций.- М.: Наука, 1977.- 287с.

Сведения об авторах:

Акопян Лусине Ваграмовна - к.ф.-м.н., научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90

Амирджанян Арутюн Арменович - к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 56-81-88, **email:** amirjanyan@gmail.com

Даштоян Лилит Левоновна - к.ф.-м.н., ученый секретарь Института механики НАН РА, (37410) 56-81-89, **email:** lilit.dashtoyan@sci.am

Джилаван Самвел Акопович - к.ф.-м.н., зав. кафедрой механики, Ереванский госуниверситет.Тел.: (+374 91) 500770, **email:** samjilavyan@ysu.am

Поступила в редакцию 12.09.2021