ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 74, № 4, 2021 Механика

**УДК 539.3** Doi- http://doi.org/10.33018/74.4.1

**Агаловян Л.А., Япуджян В.Т.**

# О СМЕШАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО ПЛОСКОСТЬ УПРУГОЙ СИММЕТРИИ

**Ключевые слова**: плоская деформация, вынужденные колебания, анизотропное тело, плоскость упругой симметрии, резонанс.

**Aghalovyan L.A., Yapujyan V.T.**

## About the plane deformational dynamic mixed problem of an anisotropic body with a plane of elastic symmetry

**Keywords**: plane deformation, forced oscillations, anisotropic body, plane of elastic symmetry, resonance.

Forced oscillations of the layer with general anisotropy in its plane have been studied. It is assumed that the layer rests freely on an absolutely rigid base, and the front surface is affected by a normal load that changes harmonic over time. The solution of the problem by the asymptotic method reduces to the solution of the singular perturbation equations. The solution of the corresponding external problem has been determined. The cases where resonance can occur, when the solution becomes mathematically precise are expressed.

**Աղալովյան Լ.Ա., Յափուջյան Վ.Տ.**

## Առաձգականության սիմետրիայի հարթություն ունեցող անիզոտրոպ մարմնի հարթ դեֆորմացիոն դինամիկական խառը խնդրի մասին

**Հիմնաբառեր՝** հարթ դեֆորմացիա, հարկադրական փափանումներ, անիզոտրոպ մարմին, առաձգական սիմետրիաի հարթություն, ռեզոնանս:

Ուսումնասիրված են իր հարթության մեջ ընդհանուր անիզոտրոպիայով օժտված շերտի ստիպողական փափանումները: Ենթադրվում է, որ շերտը ազատ հենված է բացարձակ կոշտ հենարանի վրա, իսկ դիմային մակերևույթի վրա ազդում է ըստ ժամանակի հարմոնիկ փոփոխվող նորմալ բեռ: Ասիմպտոտիկ մեթոդով խնդրի լուծումը հանգեցված է սինգուլյար գրգռված հավասարումների լուծմանը: Որոշված է համապատասխան արտաքին խնդրի լուծումը:

Արփածված են այն դեպքերը, երբ կարող է առաջանալ ռեզոնանս, երբ լուծումը դառնում է մաթեմապիկորեն ճշգրիտ:

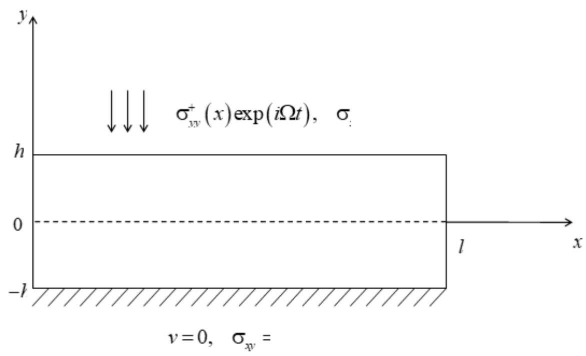
Изучены вынужденные колебания анизотропной полосы, обладающей общей анизотропией в своей плоскости. Полоса опирается на абсолютно жесткое основание, а на верхнюю кромку полосы действует переменная нормальная нагрузка, которая изменяется во времени гармонически. Асимптотическим методом решение задачи сведено к системе сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Найдено решение внешней задачи. Выведены условия возникновения резонанса. Указаны случаи, когда найденное решение становится математически точным.

## Введение

Для решения статических и динамических краевых задач теории упругости для тонких тел типа балок, пластин и оболочек эффективным оказался асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Решению статических краевых задач асимптотическим методом для пластин и оболочек посвящена монография Гольденвейзера А.Л. [1], где рассматривалась лишь первая краевая задача теории упругости, т.е. на лицевых поверхностях пластин и оболочек заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений. Статические краевые задачи для анизотропных балок, пластин и оболочек асимптотическим методом рассмотрены в монографиях Агаловяна Л.А. [2] и Агаловяна Л.А., Геворкяна Р.С. [3]. Были рассмотрены как классические, так и неклассические краевые задачи. Асимптотический метод оказался особенно эффективным для решения неклассических краевых задач, т.е. когда на лицевых поверхностях заданы значения перемещений или смешанные условия. Была установлена принципиально новая асимптотика для решения этих задач [2–4]. Метод оказался эффективным и для решения динамических задач тонких тел [2, 5–10].

## 1 Постановка задачи, основные уравнения

Рассматриваются вынужденные колебания анизотропной полосы $D = \{(x, y):\ 0 \le x \le l,\ -h \le y \le h,\ h << l\}$, находящейся в условиях плоской деформации (Фиг. 1).




Фиг. 1

Считается, что полоса свободно лежит на жесткой подстилке, на верхнюю кромку полосы действует нормальная нагрузка, меняющаяся во времени гармонично. Требуется найти решение уравнений движения плоской деформации анизотропного тела, имеющего плоскость упругой симметрии

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};\\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.\end{gathered}\tag{1}$$

при соотношениях упругости [11, 12]:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{xx}=\beta_{11}\sigma_{xx}+\beta_{12}\sigma_{yy}+\beta_{16}\sigma_{xy};\quad \varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x};\\ &\varepsilon_{yy}=\beta_{12}\sigma_{xx}+\beta_{22}\sigma_{yy}+\beta_{26}\sigma_{xy};\quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y};\\ &\varepsilon_{xy}=\beta_{16}\sigma_{xx}+\beta_{26}\sigma_{yy}+a_{66}\sigma_{xy};\quad \varepsilon_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\end{aligned}\tag{2}$$

где

$$\beta_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}};\quad i,j=1,2,6,\tag{3}$$

$a_{ij}$- постоянные упругости, и при граничных условиях:

$$\begin{aligned}&\sigma_{yy}\left(y=h\right)=-\sigma_{yy}^{+}\left(x\right)\exp\left(i\Omega t\right);\quad \sigma_{xy}\left(y=h\right)=0;\\ &v\left(y=-h\right)=0;\quad \sigma_{xy}\left(y=-h\right)=0.\end{aligned}\tag{4}$$

Граничные условия при $x=0,l$ не конкретизируем, ими обусловлено появление пограничного слоя, которое можно рассматривать отдельно [?].

## 2 Асимптотическое решение задачи

Решение задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx}(x,y,t)=\sigma_{11}(x,y)\exp(i\Omega t)\,; \quad (x,y:1,2)\,;\\
&\sigma_{xy}(x,y,t)=\sigma_{12}(x,y)\exp(i\Omega t)\,;\\
&u(x,y,t)=u_x(x,y)\exp(i\Omega t)\,; \quad v(x,y,t)=u_y(x,y)\exp(i\Omega t)\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Подставив (5) в уравнения (1) и (2) и перейдя к безразмерным координатам и перемещениям:

$$x=l\xi; \quad y=h\zeta; \quad U=\frac{u_x}{l}; \quad V=\frac{u_y}{l}, \tag{6}$$

в результате получим систему

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\Omega_*^2U=0; \quad \Omega_*^2=\rho h^2\Omega^2; \quad \varepsilon=\frac{h}{l};\\
&\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\Omega_*^2V=0;\\
&\frac{\partial U}{\partial\xi}=\beta_{11}\sigma_{11}+\beta_{12}\sigma_{22}+\beta_{16}\sigma_{12}; \quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta}=\beta_{12}\sigma_{11}+\beta_{22}\sigma_{22}+\beta_{26}\sigma_{12};\\
&\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta}+\frac{\partial V}{\partial\xi}=\beta_{16}\sigma_{11}+\beta_{26}\sigma_{22}+\beta_{66}\sigma_{12}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Решение сингулярно возмущенной системы (7) складывается из решений внешней задачи $\left(I^{out}\right)$ и пограничного слоя $\left(I^b\right)$:

$$I=I^{out}+I_b. \tag{8}$$

Решение внешней задачи будем искать в виде

$$I^{out}=\varepsilon^{q_i+s}I^{(s)}, \quad s=\overline{0,N}, \tag{9}$$

где $q_i=-1$ для $\sigma_{11},\ \sigma_{12},\ \sigma_{22}$ и $q_i=0$ для $U,\ V$, обозначение $s=\overline{0,N}$ означает, что в (9) по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование по целочисленным значениям s от нуля до числа приближений N. Подставив (9) в систему (7) и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при $\varepsilon$, получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(s)}}{\partial\zeta}+\Omega_*^2U^{(s)}=0; \quad \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(s)}}{\partial\zeta}+\Omega_*^2V^{(s)}=0;\\
&\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}=\beta_{11}\sigma_{11}^{(s)}+\beta_{12}\sigma_{22}^{(s)}+\beta_{16}\sigma_{12}^{(s)}; \quad \frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}=\beta_{12}\sigma_{11}^{(s)}+\beta_{22}\sigma_{22}^{(s)}+\beta_{26}\sigma_{12}^{(s)};\\
&\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}=\beta_{16}\sigma_{11}^{(s)}+\beta_{26}\sigma_{22}^{(s)}+\beta_{66}\sigma_{12}^{(s)}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Из системы (10) напряжения можно выразить через перемещения $U^{(s)}$ и $V^{(s)}$:

$$\sigma_{11}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[\alpha_1\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} + \alpha_2\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}\right] + \frac{\gamma_1^{(s-1)}}{\Delta};$$
$$\sigma_{22}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[\alpha_3\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} + \alpha_4\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}\right] + \frac{\gamma_2^{(s-1)}}{\Delta};$$
$$\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[\alpha_5\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} + \alpha_3\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}\right] + \frac{\gamma_3^{(s-1)}}{\Delta};$$
$$\Delta = \beta_{12}\alpha_2 + \beta_{26}\alpha_3 + \beta_{22}\alpha_4;$$

$\alpha_1 = (\beta_{12}\beta_{26} - \beta_{16}\beta_{22})\,; \quad \alpha_2 = (\beta_{16}\beta_{26} - \beta_{12}\beta_{66})\,; \quad \alpha_3 = (\beta_{12}\beta_{16} - \beta_{11}\beta_{26})\,;$
$\alpha_4 = \left(\beta_{11}\beta_{66} - \beta_{16}^2\right); \quad \alpha_5 = \left(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2\right);$

$$\begin{aligned}
\gamma_1^{(s-1)} &= \left(\beta_{22}\beta_{66} - \beta_{26}^2\right)\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} + \alpha_1\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi};\\
\gamma_2^{(s-1)} &= \alpha_2\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} + \alpha_3\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi};\\
\gamma_3^{(s-1)} &= \alpha_1\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} + \alpha_5\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Подставив значения $\sigma_{12}^{(s)}, \sigma_{22}^{(s)}$ в первые два уравнения (10), для определения $U^{(s)}$, $V^{(s)}$ получим уравнения:

$$\begin{aligned}
&\alpha_5\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \alpha_3\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \Omega_*^2\Delta U^{(s)} = \gamma_{11}^{(s-1)};\\
&\alpha_3\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \alpha_4\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \Omega_*^2\Delta V^{(s)} = \gamma_{22}^{(s-1)};\\
&\gamma_{11}^{(s-1)} = -\Delta\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\gamma_3^{(s-1)}}{\partial\zeta};\\
&\gamma_{22}^{(s-1)} = -\Delta\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\gamma_2^{(s-1)}}{\partial\zeta}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Для ортотропной полосы учитывая, что $\beta_{16} = \beta_{26} = 0$, имеем $\alpha_3 = 0$. В результате, уравнения для $U^{(s)}$ и $V^{(s)}$ разделяются и им соответствуют сдвиговые и продольные колебания, которые при $s = 0$ независимы. В случае общей анизотропии, как следует из (12), нет такого разделения. Из системы (12), после некоторых преобразований, $V^{(s)}$ можно выразить через$U^{(s)}$ по формуле

$$V^{(s)} = \frac{b}{\alpha_3 a}\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\alpha_4}{\alpha_3}U^{(s)} + \frac{1}{a}\gamma_{22}^{(s-1)} - \frac{\alpha_4}{\alpha_3 a}\gamma_{11}^{(s-1)};$$
$$a = \Omega_*^2\Delta; \quad b = \left(\alpha_4\alpha_5 - \alpha_3^2\right), \tag{13}$$

а для определения $U^{(s)}$ получим уравнение

$$\frac{\partial^4 U^{(s)}}{\partial \zeta^4} + \frac{ac}{b}\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{a^2}{b}U^{(s)} = \gamma^{(s-1)};$$
$$c = (\alpha_4 + \alpha_5); \tag{14}$$
$$\gamma^{(s-1)} = \frac{(\alpha_4 - \alpha_3)}{b}\frac{\partial^2 \gamma_{11}^{(s-1)}}{\partial \zeta^2} + \frac{a}{b}\gamma_{11}^{(s-1)}.$$

Решением уравнения (14) будет

$$U^{(s)} = U_0^{(s)}(\xi,\zeta) + U^{(s-1)}(\xi,\zeta), \tag{15}$$

где $U_0^{(s)}$ решение однородного, а $U^{(s-1)}$ частное решение неоднородного уравнения (14).

Решение однородного уравнения ищем в виде $U_0^{(s)} = e^{k\zeta}$. Для определения $k$ получим уравнение

$$k^4 + \frac{ac}{b}k^2 + \frac{a^2}{b} = 0. \tag{16}$$

Обозначив $z = k^2$, будем иметь

$$z_{1,2} = \frac{a}{2b}\left(-c \pm \sqrt{c^2 - 4b}\right). \tag{17}$$

Согласно формулам (11), (13), (14), $a > 0, \quad c > 0$, $c^2 - 4b = (\alpha_4 - \alpha_5)^2 + 4\alpha_3^2 > 0$. Следовательно, при $b > 0$

а)

$$z_1 = \frac{a}{2b}\left(-c + \sqrt{c^2 - 4b}\right) < 0; \quad z_2 = \frac{a}{2b}\left(-c - \sqrt{c^2 - 4b}\right) < 0, \tag{18}$$

а при $b < 0$

б)

$$z_1 < 0; \quad z_2 > 0. \tag{19}$$

Таким образом имеем:

а)

$$k_{1,2} = \pm\delta_1 i; \quad k_{3,4} = \pm\delta_2 i;$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{a}{2b}\left(c - \sqrt{c^2 - 4b}\right)}; \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{a}{2b}\left(c + \sqrt{c^2 - 4b}\right)}; \quad \delta_1,\ \delta_2 > 0; \quad (20)$$

$$U_0^{(s)} = D_{11}^{(s)}(\xi)\cos\delta_1\zeta + D_{21}^{(s)}(\xi)\sin\delta_1\zeta + D_{31}^{(s)}(\xi)\cos\delta_2\zeta + D_{41}^{(s)}(\xi)\sin\delta_2\zeta,$$

б)

$$k_{1,2} = \pm\delta_1 i; \quad k_{3,4} = \pm\delta_3;$$

$$\delta_3 = \sqrt{\frac{a}{2b}\left(-c - \sqrt{c^2 - 4b}\right)}, \quad \delta_3 > 0; \qquad (21)$$

$$U_0^{(s)} = D_{12}^{(s)}\cos\delta_1\zeta + D_{22}^{(s)}\sin\delta_1\zeta + D_{32}^{(s)} ch\delta_3\zeta + D_{42}^{(s)} sh\delta_3\zeta.$$

Подставив значение $U^{(s)}$ в (13) получим

а)

$$V^{(s)} = M_v D_{11}^{(s)}\cos\delta_1\zeta + M_v D_{21}^{(s)}\sin\delta_1\zeta + N_{v1}D_{31}^{(s)}\cos\delta_2\zeta + N_{v1}D_{41}^{(s)}\sin\delta_2\zeta + \gamma_{v1}^{(s-1)};$$

$$M_v = \frac{\alpha_4 a - \delta_1^2 b}{\alpha_3 a}; \quad N_{v1} = \frac{\alpha_4 a - \delta_2^2 b}{\alpha_3 a}; \qquad (22)$$

$$\gamma_{v1}^{(s-1)} = \frac{b}{\alpha_3 a}\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial\zeta^2} + \frac{\alpha_4}{\alpha_3}U^{(s-1)} + \frac{1}{a}\gamma_{22}^{(s-1)} - \frac{\alpha_4}{\alpha_3 a}\gamma_{11}^{(s-1)},$$

б)

$$V^{(s)} = M_v D_{12}^{(s)}\cos\delta_1\zeta + M_v D_{22}^{(s)}\sin\delta_1\zeta + N_{v2}D_{32}^{(s)} ch\delta_3\zeta + N_{v2}D_{42}^{(s)} sh\delta_3\zeta + \gamma_{v2}^{(s-1)};$$

$$N_{v2} = \frac{\alpha_4 a + \delta_3^2 b}{\alpha_3 a}. \qquad (23)$$

Подставив значения $U^{(s)},\ V^{(s)}$ в формулы (11), определим $\sigma_{11}^{(s)},\ \sigma_{22}^{(s)},\ \sigma_{12}^{(s)}$:

а)

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\Big(-M_1 D_{11}^{(s)} \sin\delta_1\zeta + M_1 D_{21}^{(s)} \cos\delta_1\zeta - N_{11} D_{31}^{(s)} \sin\delta_2\zeta + \\
&\qquad + N_{11} D_{41}^{(s)} \cos\delta_2\zeta\Big) + \frac{1}{\Delta}\left(\alpha_1 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \alpha_2 \frac{\partial\gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \gamma_1^{(s-1)}\right); \\
&\sigma_{22}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\Big(-M_2 D_{11}^{(s)} \sin\delta_1\zeta + M_2 D_{21}^{(s)} \cos\delta_1\zeta - N_{21} D_{31}^{(s)} \sin\delta_2\zeta + \\
&\qquad + N_{21} D_{41}^{(s)} \cos\delta_2\zeta\Big) + \frac{1}{\Delta}\left(\alpha_3 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \alpha_4 \frac{\partial\gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \gamma_2^{(s-1)}\right); \\
&\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\Big(-M_3 D_{11}^{(s)} \sin\delta_1\zeta + M_3 D_{21}^{(s)} \cos\delta_1\zeta - N_{31} D_{31}^{(s)} \sin\delta_2\zeta + \\
&\qquad + N_{31} D_{41}^{(s)} \cos\delta_2\zeta\Big) + \frac{1}{\Delta}\left(\alpha_5 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \alpha_3 \frac{\partial\gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \gamma_3^{(s-1)}\right); \\
&M_1 = \delta_1 (\alpha_1 + \alpha_2 M_v); \quad N_{11} = \delta_2 (\alpha_1 + \alpha_2 N_{v1}); \\
&M_2 = \delta_1 (\alpha_3 + \alpha_4 M_v); \quad N_{21} = \delta_2 (\alpha_3 + \alpha_4 N_{v1}); \\
&M_3 = \delta_1 (\alpha_5 + \alpha_3 M_v); \quad N_{31} = \delta_2 (\alpha_5 + \alpha_3 N_{v1});
\end{aligned}
\tag{24}
$$

б)

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\Big(-M_1 D_{12}^{(s)} \sin\delta_1\zeta + M_1 D_{22}^{(s)} \cos\delta_1\zeta + N_{12} D_{32}^{(s)} sh\delta_3\zeta + \\
&\qquad + N_{12} D_{42}^{(s)} ch\delta_3\zeta\Big) + \frac{1}{\Delta}\left(\alpha_1 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \alpha_2 \frac{\partial\gamma_{v2}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \gamma_1^{(s-1)}\right); \\
&\sigma_{22}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\Big(-M_2 D_{12}^{(s)} \sin\delta_1\zeta + M_2 D_{22}^{(s)} \cos\delta_1\zeta + N_{22} D_{32}^{(s)} sh\delta_3\zeta + \\
&\qquad + N_{22} D_{42}^{(s)} ch\delta_3\zeta\Big) + \frac{1}{\Delta}\left(\alpha_3 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \alpha_4 \frac{\partial\gamma_{v2}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \gamma_2^{(s-1)}\right); \\
&\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\Big(-M_3 D_{12}^{(s)} \sin\delta_1\zeta + M_3 D_{22}^{(s)} \cos\delta_1\zeta + N_{32} D_{32}^{(s)} sh\delta_3\zeta + \\
&\qquad + N_{32} D_{42}^{(s)} ch\delta_3\zeta\Big) + \frac{1}{\Delta}\left(\alpha_5 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \alpha_3 \frac{\partial\gamma_{v2}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \gamma_3^{(s-1)}\right); \\
&N_{12} = \delta_3 (\alpha_1 + \alpha_2 N_{v2}); \\
&N_{22} = \delta_3 (\alpha_3 + \alpha_4 N_{v2}); \\
&N_{32} = \delta_3 (\alpha_5 + \alpha_3 N_{v2}).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Граничные условия (4) приобретают вид:

$$\sigma_{22}^{(s)}(\xi,1) = -\sigma_{yy}^{+(s)}, \quad \sigma_{yy}^{+(0)} = \varepsilon\sigma_{yy}^{+}, \quad \sigma_{yy}^{+(s)} = 0,\ s \neq 0; \quad \sigma_{12}^{(s)}(\xi,1) = 0;$$
$$V^{(s)}(\xi,-1) = 0; \quad \sigma_{12}^{(s)}(\xi,-1) = 0. \tag{26}$$

Удовлетворив условиям (26), получим систему алгебраических уравнений

а)

$$\begin{aligned}
&D_{11}^{(s)}M_2\sin\delta_1 - D_{21}^{(s)}M_2\cos\delta_1 + D_{31}^{(s)}N_{21}\sin\delta_2 - D_{41}^{(s)}N_{21}\cos\delta_2 = {P_{11}}^{(s)};\\
&D_{11}^{(s)}M_3\sin\delta_1 - D_{21}^{(s)}M_3\cos\delta_1 + D_{31}^{(s)}N_{31}\sin\delta_2 - D_{41}^{(s)}N_{31}\cos\delta_2 = {P_{21}}^{(s)};\\
&D_{11}^{(s)}M_v\cos\delta_1 - D_{21}^{(s)}M_v\sin\delta_1 + D_{31}^{(s)}N_{v1}\cos\delta_2 - D_{41}^{(s)}N_{v1}\sin\delta_2 = {P_{31}}^{(s)};\\
&D_{11}^{(s)}M_3\sin\delta_1 + D_{21}^{(s)}M_3\cos\delta_1 + D_{31}^{(s)}N_{31}\sin\delta_2 + D_{41}^{(s)}N_{31}\cos\delta_2 = {P_{41}}^{(s)};\\
&P_{11}^{(s)} = \left(\Delta\sigma_{yy}^{+(s)} + \alpha_3\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \alpha_4\frac{\partial\gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \gamma_2^{(s-1)}\right)_{\zeta=1};\\
&P_{21}^{(s)} = \left(\alpha_5\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \alpha_3\frac{\partial\gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \gamma_3^{(s-1)}\right)_{\zeta=1}; \quad P_{31}^{(s)} = \left(-\gamma_{v1}^{(s-1)}\right)_{\zeta=-1};\\
&P_{41}^{(s)} = \left(-\alpha_5\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\zeta} - \alpha_3\frac{\partial\gamma_{v1}^{(s-1)}}{\partial\zeta} - \gamma_3^{(s-1)}\right)_{\zeta=-1}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Из системы (27) по формуле Крамера определим неизвестные $D_{j1}^{(s)}$

$$D_{j1}^{(s)} = \frac{\Delta_{j1}^{(s)}}{\Delta_1}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} M_2\sin\delta_1 & -M_2\cos\delta_1 & N_{21}\sin\delta_2 & -N_{21}\cos\delta_2 \\ M_3\sin\delta_1 & -M_3\cos\delta_1 & N_{31}\sin\delta_2 & -N_{31}\cos\delta_2 \\ M_v\cos\delta_1 & -M_v\sin\delta_1 & N_{v1}\cos\delta_2 & -N_{v1}\sin\delta_2 \\ M_3\sin\delta_1 & M_3\cos\delta_1 & N_{31}\sin\delta_2 & N_{31}\cos\delta_2 \end{vmatrix};$$

$$j = 1,2,3,4; \quad P_1^{(s)} = \begin{vmatrix} P_{11}^{(s)} \\ P_{21}^{(s)} \\ P_{31}^{(s)} \\ P_{41}^{(s)} \end{vmatrix}, \tag{28}$$

где $\Delta_{j1}^{(s)}$ получается из $\Delta_1$ заменой $j$ - того столбца столбцом $P_1^{(s)}$ из свободных членов.

Решение (20), (28) будет конечным, если $\Delta_1 \neq 0$. Те значения $\Omega$, при которых $\Delta_1 = 0$, являются резонансными частотами.

Для случая б) имеем систему

б)

$$\begin{aligned}
&D_{12}^{(s)} M_2 \sin\delta_1 - D_{22}^{(s)} M_2 \cos\delta_1 - D_{32}^{(s)} N_{22} sh\delta_3 - D_{42}^{(s)} N_{22} ch\delta_3 = P_{12}^{(s)};\\
&D_{12}^{(s)} M_3 \sin\delta_1 - D_{22}^{(s)} M_3 \cos\delta_1 - D_{32}^{(s)} N_{32} sh\delta_3 - D_{42}^{(s)} N_{32} ch\delta_3 = P_{22}^{(s)};\\
&D_{12}^{(s)} M_v \cos\delta_1 - D_{22}^{(s)} M_v \sin\delta_1 + D_{32}^{(s)} N_{v2} ch\delta_3 - D_{42}^{(s)} N_{v2} sh\delta_3 = P_{32}^{(s)};\\
&D_{12}^{(s)} M_3 \sin\delta_1 + D_{22}^{(s)} M_3 \cos\delta_1 - D_{32}^{(s)} N_{32} sh\delta_3 + D_{42}^{(s)} N_{32} ch\delta_3 = P_{42}^{(s)}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Из системы (29) по формуле Крамера определяем неизвестные $D_{j2}^{(s)}$

$$D_{j2}^{(s)} = \frac{\Delta_{j2}^{(s)}}{\Delta_2}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} M_2 \sin\delta_1 & -M_2 \cos\delta_1 & -N_{22} sh\delta_3 & -N_{22} ch\delta_3 \\ M_3 \sin\delta_1 & -M_3 \cos\delta_1 & -N_{32} sh\delta_3 & -N_{32} ch\delta_3 \\ M_v \cos\delta_1 & -M_v \sin\delta_1 & N_{v2} ch\delta_3 & -N_{v2} sh\delta_3 \\ M_3 \sin\delta_1 & M_3 \cos\delta_1 & -N_{32} sh\delta_3 & N_{32} ch\delta_3 \end{vmatrix}; \tag{30}$$

$$j = 1,2,3,4; \quad P_2^{(s)} = \begin{vmatrix} P_{12}^{(s)} \\ P_{22}^{(s)} \\ P_{32}^{(s)} \\ P_{42}^{(s)} \end{vmatrix}.$$

После определения $D_{j1}^{(s)}, D_{j2}^{(s)}$, по формулам (20)-(25), определятся все компоненты вектора перемещений и тензора напряжений.

Для этого случая резонансными частотами будут те значения $\Omega$, при которых $\Delta_2 = 0$.

## 3 О математически точном решении во внешней задаче

Если функция $\sigma_{yy}^{+}(\xi)$является алгебраическим многочленом по переменной $\xi$, итерация обрывается на определенном приближении, зависящем от степени многочлена, в результате получаем математически точное решение во внешней задаче. Для иллюстрации сказанного, рассмотрим случай когда

$$\sigma_{yy}^{+} = c_0 + c_1 \xi. \tag{31}$$

Согласно формул (11), (15), (20), (22), (24), (27), (28), (31), имеем:

а) при $s = 0$

$$D_{j1}^{(0)} = \frac{\Delta_{j1}^{(0)}}{\Delta_1}; \quad P_1^{(0)} = \begin{vmatrix} \Delta\varepsilon\left(c_0 + c_1\xi\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad j = 1,2,3,4;$$
$$\begin{array}{l} \Delta_{11}^{(0)} = \Delta\varepsilon\left(c_0 + c_1\xi\right)M_1^1; \quad \Delta_{21}^{(0)} = -\Delta\varepsilon\left(c_0 + c_1\xi\right)M_2^1; \\ \Delta_{31}^{(0)} = \Delta\varepsilon\left(c_0 + c_1\xi\right)M_3^1; \quad \Delta_{41}^{(0)} = -\Delta\varepsilon\left(c_0 + c_1\xi\right)M_4^1, \end{array} \tag{32}$$

где $M_i^j$ является минором элемента, стоящего на пересечении $i$ - того столбца и $j$ - той строки определителя $\Delta_1$.

Для неизвестных $D_{j1}^{(0)}$, входящих в $U_0^{(0)}$, имеем

$$\begin{array}{l} D_{11}^{(0)} = \frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0 + c_1\xi\right)M_1^1; \quad D_{21}^{(0)} = -\frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0 + c_1\xi\right)M_2^1; \\ D_{31}^{(0)} = \frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0 + c_1\xi\right)M_3^1; \quad D_{41}^{(0)} = -\frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0 + c_1\xi\right)M_4^1. \end{array} \tag{33}$$

Следовательно

$$\begin{array}{l} U^{(0)} = \frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0 + c_1\xi\right)\left(M_1^1\cos\delta_1\zeta - M_2^1\sin\delta_1\zeta + M_3^1\cos\delta_2\zeta - M_4^1\sin\delta_2\zeta\right); \\ V^{(0)} = \frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0 + c_1\xi\right)\left(M_1^1 M_v\cos\delta_1\zeta - M_2^1 M_v\sin\delta_1\zeta + M_3^1 N_{v1}\cos\delta_2\zeta - \right. \\ \qquad \left. -M_4^1 N_{v1}\sin\delta_2\zeta\right); \\ \sigma_{11}^{(0)} = \frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0 + c_1\xi\right)\left(-M_1^1 M_1\sin\delta_1\zeta - M_2^1 M_1\cos\delta_1\zeta - M_3^1 N_{11}\sin\delta_2\zeta - \right. \\ \qquad \left. -M_4^1 N_{11}\cos\delta_2\zeta\right); \\ \sigma_{22}^{(0)} = \frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0 + c_1\xi\right)\left(-M_1^1 M_2\sin\delta_1\zeta - M_2^1 M_2\cos\delta_1\zeta - M_3^1 N_{21}\sin\delta_2\zeta - \right. \\ \qquad \left. -M_4^1 N_{21}\cos\delta_2\zeta\right); \\ \sigma_{12}^{(0)} = \frac{\Delta}{\Delta_1}\varepsilon\left(c_0 + c_1\xi\right)\left(-M_1^1 M_3\sin\delta_1\zeta - M_2^1 M_3\cos\delta_1\zeta - M_3^1 N_{31}\sin\delta_2\zeta - \right. \\ \qquad \left. -M_4^1 N_{31}\cos\delta_2\zeta\right), \end{array} \tag{34}$$

при $s = 1$

$$U^{(1)} = U_0^{(1)} + U^{(0)}.$$

Используя формулы (14), (20), имеем

$$\begin{aligned}
U^{(0)} &= B_1 \cos\delta_1\zeta + B_2 \sin\delta_1\zeta + B_3 \cos\delta_2\zeta + B_4 \sin\delta_2\zeta;\\
B_1 &= \frac{\Delta\varepsilon c_1}{b\Delta_1}\left(M_2^1\left(a - \delta_1^2\left(\alpha_4 - \alpha_3\right)\right)\left(M_1 + \alpha_1\delta_1 + \alpha_5 M_v \delta_1\right)\right);\\
B_2 &= \frac{\Delta\varepsilon c_1}{b\Delta_1}\left(M_1^1\left(a - \delta_1^2\left(\alpha_4 - \alpha_3\right)\right)\left(M_1 + \alpha_1\delta_1 + \alpha_5 M_v \delta_1\right)\right)\\
B_3 &= \frac{\Delta\varepsilon c_1}{b\Delta_1}\left(M_4^1\left(a - \delta_2^2\left(\alpha_4 - \alpha_3\right)\right)\left(N_{11} + \alpha_1\delta_2 + \alpha_5 N_{v1} \delta_2\right)\right);\\
B_4 &= \frac{\Delta\varepsilon c_1}{b\Delta_1}\left(M_3^1\left(a - \delta_2^2\left(\alpha_4 - \alpha_3\right)\right)\left(N_{11} + \alpha_1\delta_2 + \alpha_5 N_{v1} \delta_2\right)\right).
\end{aligned} \tag{35}$$

Из системы (27), согласно (20), (28), будем иметь

$$\begin{aligned}
U_0^{(1)} &= D_{11}^{(1)} \cos\delta_1\zeta + D_{21}^{(1)} \sin\delta_1\zeta + D_{31}^{(1)} \cos\delta_2\zeta + D_{41}^{(1)} \sin\delta_2\zeta;\\
P_1^{(1)} &= \begin{vmatrix} P_{11}^{(1)} \\ P_{21}^{(1)} \\ P_{31}^{(1)} \\ P_{41}^{(1)} \end{vmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{11}^{(1)}\left(\zeta = 1\right) &= \left(\Delta\sigma_{yy}^{+(1)} + \alpha_3\frac{\partial U^{(0)}}{\partial\zeta} + \alpha_4\frac{\partial\gamma_{v1}^{(0)}}{\partial\zeta} + \gamma_2^{(0)}\right)_{\zeta=1};\\
P_{21}^{(1)}\left(\zeta = 1\right) &= \left(\alpha_5\frac{\partial U^{(0)}}{\partial\zeta} + \alpha_3\frac{\partial\gamma_{v1}^{(0)}}{\partial\zeta} + \gamma_3^{(0)}\right)_{\zeta=1};\\
P_{31}^{(1)}\left(\zeta = -1\right) &= \left(-\gamma_{v1}^{(0)}\right)_{\zeta=-1};\\
P_{41}^{(1)}\left(\zeta = -1\right) &= \left(-\alpha_5\frac{\partial U^{(0)}}{\partial\zeta} - \alpha_3\frac{\partial\gamma_{v1}^{(0)}}{\partial\zeta} - \gamma_3^{(0)}\right)_{\zeta=-1};
\end{aligned} \tag{36}$$

$$
\begin{aligned}
&D_{j1}^{(1)} = \frac{\Delta_{j1}^{(1)}}{\Delta_1}, \quad j = 1,2,3,4;\\
&\Delta_{11}^{(1)} = P_{11}^{(1)}(\zeta=1)\,M_1^1 - P_{21}^{(0)}(\zeta=1)\,M_1^2 + P_{31}^{(1)}(\zeta=-1)\,M_1^3 - P_{41}^{(1)}(\zeta=-1)\,M_1^4;\\
&\Delta_{21}^{(1)} = P_{11}^{(1)}(\zeta=1)\,M_2^1 - P_{21}^{(0)}(\zeta=1)\,M_2^2 + P_{31}^{(1)}(\zeta=-1)\,M_2^3 - P_{41}^{(1)}(\zeta=-1)\,M_2^4;\\
&\Delta_{31}^{(1)} = P_{11}^{(1)}(\zeta=1)\,M_3^1 - P_{21}^{(0)}(\zeta=1)\,M_3^2 + P_{31}^{(1)}(\zeta=-1)\,M_3^3 - P_{41}^{(1)}(\zeta=-1)\,M_3^4;\\
&\Delta_{41}^{(1)} = P_{11}^{(1)}(\zeta=1)\,M_4^1 - P_{21}^{(0)}(\zeta=1)\,M_4^2 + P_{31}^{(1)}(\zeta=-1)\,M_4^3 - P_{41}^{(1)}(\zeta=-1)\,M_4^4.
\end{aligned}
$$

Перемещение $V^{(1)}$ и напряжения $\sigma_{11}^{(1)}$, $\sigma_{12}^{(1)}$, $\sigma_{22}^{(1)}$ определяются по формулам (22) и (24). Аналогичным образом можно получить данные для случая (б). Несложно убедиться, что при $s \geq 2$ получается нулевое решение. Таким образом, во внешней задаче имеем математически точное решение:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij} = \varepsilon^{-1}\sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}, \quad i,j = 1,2;\\
&u_x = l\left(U^{(0)} + \varepsilon U^{(1)}\right); \quad u_y = l\left(V^{(0)} + \varepsilon V^{(1)}\right);\\
&\sigma_{xx} = \sigma_{11}(x,y)\exp(i\Omega t), \quad (x,y:1,2); \quad \sigma_{xy} = \sigma_{12}(x,y)\exp(i\Omega t);\\
&u = u_x \exp(i\Omega t); \quad v = u_y \exp(i\Omega t).
\end{aligned} \tag{37}
$$

## Заключение

Решена смешанная динамическая плоская задача для анизотропного тела, имеющего плоскость упругой симметрии. Считается, что полоса конечных размеров свободно опирается на абсолютно жесткое основание, а на верхнюю кромку полосы действует нормальная нагрузка, которая во времени изменяется гармонически. Асимптотическим методом получено решение внешней задачи (в русскоязычной литературе оно часто называется решением внутренней задачи). В отличие от той же задачи для ортотропного тела, вынужденные колебания не распадаются на продольные и поперечные колебания. Определена амплитуда колебаний, установлены условия возникновения резонанса. Указаны случаи, когда асимптотическое решение становится математически точным.

## Литература


[1] Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с.

[2] Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore. London. World Scientific. 2015. 376p. (Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. наука. 1997. 414с.)

[3] Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ер.: Изд-во "Гитутюн" НАН РА. 2005. 468с.

[4] Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела // Межвуз. сб. Механика. Изд-во ЕГУ. 1982. Вып. 2. С. 7-12.

[5] Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин. // Изв. вузов Северо-Кавказ. регион. Естеств. наук. 2000. №3. С. 8-11.

[6] Агаловян М.Л. Асимптотика решения пространственной динамической задачи для анизотропных пластин. В сб. докладов XX Межд. конф. по теории оболочек и пластин «Механика оболочек и пластин ». Изд. Нижегородского госуниверситета. Нижний Новгород. 2002г. С. 78-82.

[7] Агаловян М.Л. О вынужденных колебаниях анизотропных пластин на абсолютно жестком основании. Тр. межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвященном 95-летию акад. Н.Х. Арутюняна, Цахкадзор. Ереван. 2007г. С. 28-31.

[8] Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 111-125.

[9] Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О решении первой динамической пространственной краевой задачи для ортотропной прямоугольной пластинки. // Докл. НАН РА. 2009. Т. 109. №4. С. 304-309.

[10] Агаловян Л.А. О пространственных динамических задачах пластин и оболочек. Изв. НАН РА, Механика. 2017. Т. 70. №1. С. 3-21.

[11] Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 1977. М. Наука. 416с.

[12] Агаловян Л.А. Об основных соотношениях обобщенной плоской деформации анизотропных тел. Докл. НАН РА. 2021. Т. 121. №1. С. 54-60.

Сведения об авторах:

**Агаловян Ленсер Абгарович** - академик НАН РА, докт. физ.-мат. наук, зав. отделом «Механика тонкостенных систем »Института механики НАН РА
**Тел.**: (+37410) 529630, **email**: lagal@sci.am

**Япуджян Варужан Тигранович** - аспирант, млад. науч. сотр. Института механики НАН РА
**Тел.**: (+37444) 990250, **email**: varujan.yapujyan@mail.ru

Поступила в редакцию 11.09.2021