

**СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ ПОЛОСЫ,
СОДЕРЖАЩЕЙ ВНУТРЕННЮЮ ТРЕЩИНУ, ВЫХОДЯЩУЮ НА
ЛИНИЮ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ**

Саакян А.В., Саркисян В.Г., Хачикян А.С.

Ключевые слова: составная полоса, краевая трещина, упругость, сингулярное интегральное уравнение, неподвижная особенность, коэффициент концентрации напряжений, раскрытие трещины, механические квадратуры.

Sahakyan A.V., Sargsyan V.G., Khachikyan A.S.

**Mixed Boundary Value Problem for an Elastic Composite Strip Containing an
Internal Crack Terminating at the Interface of Materials**

Keywords: composite strip, edge crack, elasticity, singular integral equation, unmoved singularity, stress concentration coefficient, crack opening, mechanical quadrature formula.

The stress state of a piecewise-homogeneous elastic strip is considered, composed of two strips from different materials, one of which contains a crack of finite length, perpendicular terminating at the interface of materials. It is assumed that the composite strip on the side of the strip, in which there is a crack, is rigidly restrained, and the other side is free from stress. The strip is deformed under the influence of a normal load symmetrically applied to the crack edges.

The stress intensity factors at the crack tips, contact stresses at the material interface, as well as the shape of the crack opening were determined. The study of the dependence of the indicated values on the elastic constants of the strip materials and the relative widths of the strips has been carried out.

Մահակյան Ա.Վ., Սարգսյան Վ.Գ., Խաչիկյան Ա.Ս.

**Խառը եզրային խնդիր նյութերի բաժանման գծի վրա դուրս եկող ներքին ճաք պարունակող
առաձգական բաղադրյալ շերտի համար**

Նիւնաբառեր՝ բաղադրյալ շերտ, եզրային ճաք, առաձգականություն, սինգուլյար ինտեգրալ հավասարում, անշարժ եզակիություն, լարումների ուժգնության գործակից, ճաքի բացվածք, մեխանիկական քառակուսացման բանաձևեր:

Դիտարկված է երկու փարանյութ շերտերից կազմված բաղադրյալ առաձգական շերտի լարվածային վիճակը, երբ շերտերից մեկում կա վերջավոր երկարության ճաք, որը ուղղահայաց դուրս է գալիս նյութերի բաժանման գիծ: Ենթադրվում է, որ բաղադրյալ շերտը ճաք պարունակող շերտի կողմից կոշտ ամրակցված է, իսկ մյուս կողմը ազատ է լարումներից: Շերտը դեֆորմացվում է ճաքի ափերին համաչափ կիրառված նորմալ բեռի ազդեցության տակ:

Որոշված են ճաքի զագաթներում լարումների ուժգնության գործակիցները, նյութերի բաժանման գծի վրա կոնտակտային լարումների բախշումը, ինչպես նաև ճաքի բացվածքի տեսքը: Ներագրվել է նշված մեծությունների կախվածությունը շերտերի առաձգական հաստատուններից և շերտերի հարաբերական հաստությունից:

Рассматривается напряженное состояние кусочно-однородной упругой полосы, составленной из двух разнородных полос, в одной из которых содержится трещина конечной длины, перпендикулярно выходящая на линию раздела материалов. Предполагается, что составная полоса со стороны полосы, в которой имеется трещина, жестко закреплена, а другая сторона свободна от напряжений. Полоса деформируется под воздействием нормальной нагрузки, симметрично приложенной к берегам трещины. Определены коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины, контактные напряжения на линии раздела материалов, а также форма раскрытия трещины. Проведено исследование зависимости указанных величин от упругих постоянных материалов полос и относительных ширин полос.

1 Введение

Исследованию напряженного состояния составных массивных тел, содержащих концентраторы напряжений в виде трещин, тонких включений или накладок, посвящено множество исследований, среди которых, в частности, отметим [1–6]. Особое место занимают задачи определения напряженного состояния составной плоскости, когда трещина перпендикулярно или под углом выходит на линию раздела материалов, в этой связи отметим лишь работы [6–8].

В настоящей работе рассмотрено напряженное состояние кусочно-однородной упругой полосы, составленной из двух разнородных полос, в одной из которых содержится трещина конечной длины, перпендикулярно выходящая на линию раздела материалов.

2 Постановка задачи

Пусть имеем упругую кусочно-однородную полосу, которая состоит из двух разнородных бесконечных полос ширины h_1 и h_2 и во второй из них содержит трещину конечной длины a , выходящую на линию раздела материалов $y = 0$. Предположим, что составная полоса по стороне $y = h_2$ жестко закреплена, другая ее сторона $y = -h_1$ свободна от напряжений. Внешняя нагрузка в виде нормального давления p симметрично приложена к берегам трещины (Рис.1).

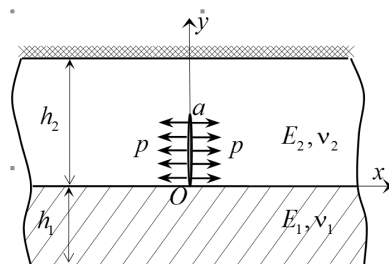


Рис. 1

Для составной полосы будем иметь следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u_2(x, h_2) = 0, \quad v_2(x, h_2) = 0, \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, -h_1) = 0, \quad \sigma_y^{(1)}(x, -h_1) = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

На линии соединения полос имеем условия полного контакта:

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) = u_2(x, 0), \quad v_1(x, 0) = v_2(x, 0), \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0), \quad \sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0), \end{aligned} \quad (2.2)$$

а на берегах трещины заданы напряжения:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(2)}(0, y) = 0 \\ \sigma_x^{(2)}(0, y) = -p \quad (0 < y < a) \end{aligned} \quad (2.3)$$

В силу симметрии в постановке задачи будем рассматривать лишь правую половину составной полосы $x \geq 0$. Далее, индексом «1» будут отмечаться величины, относящиеся к нижней полосе ($-h_1 \leq y \leq 0$), а индексом «2» - к полосе, содержащей трещину, ($0 \leq y \leq h_2$).

3 Вывод определяющего уравнения задачи

Для вывода определяющего уравнения поставленной задачи воспользуемся бигармонической функцией Эри, которую в соответствующих областях представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= \int_0^\infty (A_1 \operatorname{sh} \lambda y + B_1 \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y (C_1 \operatorname{sh} \lambda y + D_1 \operatorname{ch} \lambda y)) \cos x \lambda d\lambda; \\ \Phi_2(x, y) &= \int_0^\infty (A_2 \operatorname{sh} \lambda y + B_2 \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y (C_2 \operatorname{sh} \lambda y + D_2 \operatorname{ch} \lambda y)) \cos x \lambda d\lambda + \\ &+ \sum_{k=1}^\infty (a_k + x b_k) e^{-\lambda_k x} \sin \lambda_k y; \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\lambda_k = \pi k / h_2$.

Используя формулы, выражающие компоненты напряжений и перемещений через функцию напряжений [9], для компонентов напряжений и перемещений, необходимых для удовлетворения граничным условиям (2.1) на сторонах составной полосы, будем иметь:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_y^{(j)}(x, y) \\ \tau_{xy}^{(j)}(x, y) \\ u_j(x, y) \\ v_j(x, y) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \mathbf{T}(x, \lambda) \mathbf{S}_j(\lambda, y) \begin{Bmatrix} A_j(\lambda) \\ B_j(\lambda) \\ C_j(\lambda) \\ D_j(\lambda) \end{Bmatrix} d\lambda + \mathbf{V}_j(x, y, \lambda_k) \quad (j = 1, 2) \quad (3.2)$$

где

$$\mathbf{T}_j(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos \lambda x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \lambda x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \lambda x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \lambda x \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_j(\lambda, y) = \begin{pmatrix} -\lambda^2 s_y & -\lambda^2 c_y & -\lambda^3 y s_y & -\lambda^3 y c_y \\ \lambda^2 c_y & \lambda^2 s_y & \lambda^2 (y \lambda c_y + s_y) & \lambda^2 (c_y + y \lambda s_y) \\ \frac{\lambda s_y}{2\mu_j} & \frac{\lambda c_y}{2\mu_j} & \frac{\lambda}{2\mu_j} (\lambda y s_y + (\theta_j + 1) c_y) & \frac{\lambda}{2\mu_j} (\lambda y c_y + (\theta_j + 1) s_y) \\ -\frac{\lambda c_y}{2\mu_j} & -\frac{\lambda s_y}{2\mu_j} & -\frac{\lambda}{2\mu_j} (\lambda y c_y - \theta_j s_y) & -\frac{\lambda}{2\mu_j} (\lambda y s_y - \theta_j c_y) \end{pmatrix}; \quad (3.3)$$

$(s_y = \operatorname{sh} y \lambda; \quad c_y = \operatorname{ch} y \lambda)$

$$\mathbf{V}_1(x, y, \lambda_k) = 0;$$

$$\mathbf{V}_2(x, y, \lambda_k) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-x\lambda_k} \lambda_k [a_k \lambda_k + b_k (-2 + x\lambda_k)] \sin \lambda_k y \\ \sum_{k=1}^{\infty} e^{-x\lambda_k} \lambda_k [a_k \lambda_k + b_k (-1 + x\lambda_k)] \cos \lambda_k y \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-x\lambda_k}}{2\mu_2} [a_k \lambda_k + b_k (\theta_2 + x\lambda_k)] \sin \lambda_k y \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-x\lambda_k}}{2\mu_2} [-a_k \lambda_k + b_k (1 + \theta_2 - x\lambda_k)] \cos \lambda_k y \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$\mu_j = \frac{E_j}{2(1+\nu_j)}$ - модуль сдвига, E_j - модуль Юнга, ν_j - коэффициент Пуассона материалов полос, $\theta_j = 1 - 2\nu_j$. Обозначения s_y , c_y введены исключительно для простоты представления матрицы $\mathbf{S}_j(\lambda, y)$.

Из первого условия в (2.3) нетрудно найти, что $b_k = \lambda_k a_k$. Следовательно,

$$\mathbf{V}_2(x, y, \lambda_k) = \begin{pmatrix} e^{-x\lambda_k} \lambda_k^2 a_k (x\lambda_k - 1) \sin \lambda_k y \\ e^{-x\lambda_k} \lambda_k^2 a_k x \lambda_k \cos \lambda_k y \\ \frac{e^{-x\lambda_k}}{2\mu_2} a_k \lambda_k (1 + \theta_2 + x\lambda_k) \sin \lambda_k y \\ \frac{e^{-x\lambda_k}}{2\mu_2} a_k \lambda_k (\theta_2 - x\lambda_k) \cos \lambda_k y \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Из условия симметрии имеем также условия

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{x=0} = 0 \text{ при } a < y < h_2 \text{ и } \left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{x=0} = w(y) \text{ при } 0 < y < a \quad (3.6)$$

где $w(y)$ - искомая функция, представляющая собой производную перемещения берега трещины. Пользуясь представлениями (3.2) и (3.5), найдем

$$a_k = \frac{4\mu_2}{\lambda_k^2 h_2 (1 + \theta_2)} \int_0^a w(\zeta) \cos \lambda_k \zeta d\zeta \quad (3.7)$$

Перейдем к удовлетворению граничных условий (2.1) и (2.2). Представляя компоненты левой части и второго слагаемого правой части равенства (3.2) в виде соответствующих косинус или синус интегралов Фурье, равенство (3.2) запишем в виде:

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_y^{(j)}(\lambda, y) \\ \bar{\tau}_{xy}^{(j)}(\lambda, y) \\ \bar{u}_j(\lambda, y) \\ \bar{v}_j(\lambda, y) \end{pmatrix} = \mathbf{S}_j(\lambda, y) \begin{pmatrix} A_j(\lambda) \\ B_j(\lambda) \\ C_j(\lambda) \\ D_j(\lambda) \end{pmatrix} + (j-1) \begin{pmatrix} \delta_\sigma(\lambda, y) \\ \delta_\tau(\lambda, y) \\ \delta_u(\lambda, y) \\ \delta_v(\lambda, y) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

где компоненты последнего столбца, с учетом (3.5), имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta_\sigma(\lambda, y) &= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 a_k \frac{2\lambda^2 \lambda_k}{(\lambda_k^2 + \lambda^2)^2} \sin \lambda_k y \\ \delta_\tau(\lambda, y) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 a_k \frac{2\lambda \lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \lambda^2)^2} \cos \lambda_k y \\ \delta_u(\lambda, y) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \frac{\lambda^3 (1 + \theta_2) + \lambda (3 + \theta_2) \lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \lambda^2)^2} \sin \lambda_k y \\ \delta_v(\lambda, y) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 a_k \frac{\lambda^2 (1 + \theta_2) - (1 - \theta_2) \lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \lambda^2)^2} \cos \lambda_k y \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставляя в (3.8) $y = 0$ и учитывая условия (2.2), восемь коэффициентов A_j, B_j, C_j, D_j ($j = 1, 2$) выразим через значения $\{\sigma_0, \tau_0, u_0, v_0\}$ трансформантов Фурье компонентов напряжений и перемещений на линии $y = 0$ и величин из (3.9), содержащих в себе основную искомую функцию $w(\zeta)$:

$$\begin{pmatrix} A_j(\lambda) \\ B_j(\lambda) \\ C_j(\lambda) \\ D_j(\lambda) \end{pmatrix} = \mathbf{S}_j^{-1}(\lambda, 0) \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \tau_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} - (j-1) \mathbf{S}_j^{-1}(\lambda, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_\tau(\lambda, 0) \\ 0 \\ \delta_v(\lambda, 0) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Далее, подставляя полученные представления в (3.2) и удовлетворяя граничным условиям (2.1), выразим компоненты $\{\sigma_0, \tau_0, u_0, v_0\}$, а следовательно и все компоненты напряжений и перемещений, через функции $\delta_\tau(\lambda, 0)$, $\delta_v(\lambda, 0)$ и $\delta_v(\lambda, h_2)$, которые, с учетом (3.7), можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \delta_\tau(\lambda, 0) &= M \int_0^a w(\zeta) \left(\frac{\operatorname{ch} \lambda (h_2 - \zeta)}{\operatorname{sh} \lambda h_2} - \lambda \zeta \frac{\operatorname{sh} \lambda (h_2 - \zeta)}{\operatorname{sh} \lambda h_2} - \lambda h_2 \frac{\operatorname{ch} \lambda \zeta}{\operatorname{sh}^2 \lambda h_2} \right) d\zeta \\ \delta_v(\lambda, 0) &= M \int_0^a w(\zeta) \left[\zeta \frac{\operatorname{sh} \lambda (h_2 - \zeta)}{\operatorname{sh} \lambda h_2} + h_2 \frac{\operatorname{ch} \lambda \zeta}{\operatorname{sh}^2 \lambda h_2} + \theta_2 \frac{\operatorname{ch} \lambda (h_2 - \zeta)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_2} - \frac{1 + \theta_2}{\lambda^2 h_2} \right] d\zeta \end{aligned}$$

$$\delta_v(\lambda, h_2) = M \int_0^a w(\zeta) \left[h_2 \frac{\text{ch } \lambda(h_2 + \zeta)}{\text{sh}^2 \lambda h_2} - (\zeta + h_2) \frac{\text{sh } \lambda \zeta}{\text{sh } \lambda h_2} + \frac{\theta_2 \text{ch } \lambda \zeta}{\lambda \text{sh } \lambda h_2} - \frac{1 + \theta_2}{\lambda^2 h_2} \right] d\zeta \quad (3.11)$$

$$M = \frac{4\mu_2}{\pi(1 + \theta_2)}$$

Полученные представления не приводятся ввиду громоздкости, обусловленной, главным образом, многопараметровостью поставленной задачи. На примере компоненты σ_0 представим общую структуру полученных выражений.

$$\sigma_0 = \frac{\cos x\xi}{\Delta(\lambda) \text{ch } \lambda h_2} [G_1(\lambda) \delta_v(\lambda, h_2) + G_2(\lambda) \delta_v(\lambda, 0) + G_3(\lambda) \delta_\tau(\lambda, 0)] \quad (3.12)$$

Здесь

$$G_1(\lambda) = -\lambda(1 + \theta_2) \{ \lambda h_1 \text{sch}^2 \lambda h_1 [-\mu(1 + \theta_1)(1 + \theta_2 + \lambda h_2 \text{th } \lambda h_2) + \lambda h_1(\lambda h_2(\mu - 1) - (1 + (2 - \mu)\theta_2) \text{th } \lambda h_2)] + \text{th } \lambda h_1 [\mu(1 + \theta_1)(1 + \theta_2) + (1 + 2\theta_2 + \theta_1\theta_2\mu) \text{th } \lambda h_1 \text{th } \lambda h_2 + \lambda h_2((1 + \theta_1\mu) \text{th } \lambda h_1 + (1 + \theta_1)\mu \text{th } \lambda h_2)] \} ,$$

$G_2(\lambda)$ и $G_3(\lambda)$ имеют похожий вид, $\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$,

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & \mu^2(1 + 2\theta_2 + (\lambda^2 h_2^2 + \theta_2^2) \text{sch}^2 \lambda h_2)(1 + 2\theta_1 + (\lambda^2 h_1^2 + \theta_1^2) \text{sch}^2 \lambda h_1) + \\ & \left(-\lambda^2 h_2^2 \text{sch}^2 \lambda h_2 + (1 + 2\theta_2)^2 \text{th}^2 \lambda h_2 \right) (1 - (1 + \lambda^2 h_1^2) \text{sch}^2 \lambda h_1) + \\ & 2\mu(1 + \theta_1)(1 + \theta_2)(\lambda^2 h_1 h_2 \text{sch}^2 \lambda h_1 \text{sch}^2 \lambda h_2 + (1 + 2\theta_2) \text{th } \lambda h_1 \text{th } \lambda h_2) + \\ & 2\mu(-\lambda^2 h_2^2 \text{sch}^2 \lambda h_2 + \theta_2(1 + 2\theta_2) \text{th}^2 \lambda h_2) ((\lambda^2 h_1^2 - \theta_1) \text{sch}^2 \lambda h_1 + \theta_1) . \end{aligned}$$

Очевидно, что аналитические представления для интегралов Фурье (3.8) будут достаточно громоздкими, но они легко реализуются при численных расчетах. Из граничных условий (2.1)-(2.3) неудовлетворенным осталось только второе из условий (2.3). Выписав выражение напряжения $\sigma_x^{(2)}(x, y)$ посредством функции Эри и просчитав сумму с учетом представления (3.7), для компоненты $\sigma_x^{(2)}$ на линии $x = 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(2)}(0, y) = & \int_0^\infty \lambda^2 [(B_2 + \lambda y D_2 + 2C_2) \text{ch } \lambda y + (A_2 + 2D_2 + \lambda y C_2) \text{sh } \lambda y] d\lambda - \\ & - \frac{\mu_2}{h_2(1 + \theta_2)} \int_0^a w(\zeta) \left(\text{ctg } \frac{\pi(y - \zeta)}{2h_2} + \text{ctg } \frac{\pi(y + \zeta)}{2h_2} \right) d\zeta \end{aligned} \quad (3.13)$$

Подставляя в (3.13) полученные выше представления коэффициентов A_2, B_2, C_2 и D_2 через интегралы (3.11) и меняя порядок интегрирования, из второго из условий (2.3) получим определяющее уравнение поставленной задачи:

$$\frac{\mu_2}{\pi(1+\theta_2)} \int_0^a w(\zeta) \left[Q(y, \zeta) - \frac{\pi}{2h_2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(y-\zeta)}{2h_2} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(y+\zeta)}{2h_2} \right) \right] d\zeta = -p \quad (3.14)$$

где функция $Q(y, \zeta)$ является интегралом Фурье по лучу $\lambda \in (0, \infty)$. Детальное исследование поведения подынтегральной функции на бесконечности позволило выделить сингулярную часть ядра $Q(y, \zeta)$:

$$Q(y, \zeta) = \frac{c_1}{y+\zeta} + \frac{c_2 y}{(y+\zeta)^2} + \frac{c_3 y^2}{(y+\zeta)^3} + Q^*(y, \zeta) \quad (3.15)$$

Здесь $Q^*(y, \zeta)$ является регулярной частью ядра, принимающей конечное значение при $y, \zeta \rightarrow 0$,

$$c_1 = \frac{(3 + 3\mu\kappa_1 - \mu - \kappa_2)(1 + \kappa_2)}{2(\mu + \kappa_2)(1 + \mu\kappa_1)}, \quad c_2 = 6 \frac{\mu - 1}{\mu + \kappa_2}, \quad c_3 = 4 \frac{1 - \mu}{\mu + \kappa_2}, \quad \kappa_i = 3 - 4\nu_i.$$

Учитывая поведение гиперболического котангенса около нуля, гиперболические слагаемые в (3.14) представим в виде:

$$\frac{\pi}{2h_2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(y-\zeta)}{2h_2} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(y+\zeta)}{2h_2} \right) = \frac{1}{y-\zeta} + \frac{1}{y+\zeta} + Q_0(y, \zeta) \quad (3.16)$$

где регулярная функция $Q_0(y, \zeta)$ определяется формулой:

$$Q_0(y, \zeta) = \frac{\pi}{2h_2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(y-\zeta)}{2h_2} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(y+\zeta)}{2h_2} \right) - \frac{2y}{y^2 - \zeta^2}$$

В итоге, определяющее уравнение (3.14) можно переписать в виде сингулярного интегрального уравнения с обобщенным ядром Коши:

$$\int_0^a w(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - y} + \frac{c_0}{y + \zeta} + \frac{c_2 y}{(y + \zeta)^2} + \frac{c_3 y^2}{(y + \zeta)^3} + R(y, \zeta) \right] d\zeta = -\frac{\pi(1 + \theta_2)}{\mu_2} p \quad (3.17)$$

где

$$R(y, \zeta) = Q^*(y, \zeta) - Q_0(y, \zeta)$$

,

$$c_0 = c_1 - 1 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{3(\mu - 1)}{\mu + \kappa_2} - \frac{1 + \kappa_2}{1 + \mu\kappa_1} \right]$$

Уравнение (3.17) можно переписать и в виде, который и будет использован при его решении

$$\int_0^a w(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - y} + L \left[\frac{1}{y + \zeta} \right] + R(y, \zeta) \right] d\zeta = -\frac{\pi(1 + \theta_2)}{\mu_2} p \quad (3.18)$$

где L – дифференциальный оператор:

$$L \equiv c_0 - c_2 y \frac{d}{dy} + \frac{c_3 y^2}{2} \frac{d^2}{dy^2} \quad (3.19)$$

Вместе с уравнением (3.18) необходимо также удовлетворить условию смыкания концов трещины

$$\int_0^a w(\zeta) d\zeta = 0 \quad (3.20)$$

(3.20) Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению сингулярного интегрального уравнения с обобщенным ядром Коши (неподвижной особенностью) (3.18) при условии (3.20).

4 Решение определяющей системы уравнений

Решение определяющей системы уравнений (3.18), (3.20) построим при помощи метода механических квадратур. Для применения последнего сведем уравнения на интервал $(-1, 1)$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) \left[\frac{1}{\xi - z} + L_* \left[\frac{1}{z + \xi + 2} \right] + R_*(z, \xi) \right] d\xi &= -p_* \quad (-1 < z < 1) \\ \int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= w \left(\frac{2}{a} \zeta - 1 \right), \quad R_*(z, \xi) = R \left(\frac{2}{a} y - 1, \frac{2}{a} \zeta - 1 \right), \quad p_* = \frac{\pi(1 + \theta_2)}{\mu_2} p, \\ L_* &\equiv c_0 - c_2 (z + 1) \frac{d}{dz} + \frac{c_3 (z + 1)^2}{2} \frac{d^2}{dz^2}. \end{aligned}$$

При этом в регулярном ядре $R_*(z, \xi)$ появятся относительные толщины $h_1^* = h_1/a$ и $h_2^* = h_2/a$, а также отношение модулей сдвига μ , по которым и будет в дальнейшем проведен численный анализ. Решение системы (4.1) будем искать в виде

$$\varphi(\xi) = (1 - \xi)^\alpha (1 + \xi)^\beta \varphi_*(\xi) \quad (-1 < \alpha, \beta < 0), \quad (4.2)$$

Показатели особенности α и β определяются из исследования поведения сингулярного

интегрального уравнения в окрестности концов интервала интегрирования $(-1, 1)$. Используя известные результаты о поведении сингулярных интегралов в окрестности концевых точек [9], найдем, что $\alpha = -0.5$, а показатель β является корнем следующего трансцендентного уравнения

$$\cos \pi \beta + c_0 - \beta c_2 + \frac{\beta(\beta-1)}{2} c_3 = 0 \quad (-1 < \beta < 0) \quad (4.3)$$

Численный анализ показывает, что при любых допустимых значениях упругих характеристик материалов полос уравнение (4.3) имеет единственный корень в указанном интервале. При этом, при возрастании модуля сдвига μ_1 материала полосы, не содержащей трещину, т.е. $\mu = \mu_2/\mu_1 \rightarrow 0$ показатель β приближается к нулю, а при $\nu_2 = 0$ обращается в ноль, при убывании же модуля сдвига μ_1 показатель β приближается к -1 .

После определения показателя β , решение определяющего сингулярного интегрального уравнения с неподвижной особенностью строится методом механических квадратур [10]. Воспользуемся квадратурной формулой для интеграла типа Коши [11], применимой для обоих сингулярных слагаемых в ядре интегрального уравнения (4.1),

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x-t} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \approx \sum_{i=1}^n w_i \frac{f(\xi_i)}{\xi_i-t} [1-q_i(t)] \quad (t \neq \pm 1, \alpha, \beta > -1) \quad (4.4)$$

где $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ – корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$,

$$w_i = \frac{2}{n + \alpha + \beta + 1} \frac{Q_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_i)}{P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\xi_i)}, \quad q_i(t) = \frac{Q_n^{(\alpha, \beta)}(t)}{Q_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_i)},$$

$$Q_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{t-1}\right)^{n+1} 2^{\alpha+\beta} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \times \\ \times F\left(n+1, n+\alpha+1; 2n+\alpha+\beta+2; \frac{2}{1-t}\right) & t \notin [-1, 1] \\ (Q_n^{(\alpha, \beta)}(t+i0) + Q_n^{(\alpha, \beta)}(t-i0))/2 & (-1 < t < 1) \end{cases}$$

Правую часть уравнения (4.1) заменим квадратурной формулой, будем иметь

$$\sum_{i=1}^n w_i \varphi_*(\xi_i) \left\{ \frac{1-q_i(z)}{\xi_i-z} + L_* \left[\frac{1-q_i(-z-2)}{\xi_i+z+2} \right] + R_*(z, \xi_i) \right\} = -p_* \quad (4.5)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \varphi_*(\xi_i) = 0$$

Для получения системы линейных алгебраических уравнений относительно искомых величин $\varphi_*(\xi_i)$ ($i = 1, n$) необходимо для первого уравнения выбрать $(n-1)$ точек коллокации. Заметим, что квадратурная формула для третьего слагаемого является формулой наивысшей алгебраической точности при любых z , в то время как для первого слагаемого квадратурная формула является таковой только тогда, когда z совпадает с корнями функции $q_i(z)$, точнее функции $Q_n^{(\alpha, \beta)}(z)$, для второго же слагаемого этого не имеет места ни при каких значениях z . Очевидно, что в качестве точек коллокации следует выбрать корни функции $q_i(z)$, число которых, как нетрудно проверить, равно именно $(n-1)$.

Таким образом, положив в (4.5) $z = \zeta_k$ ($k = 1, n - 1$), ζ_k – корни функции $q_i(z)$, получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно величин $\varphi_*(\xi_i)$ ($i = 1, n$), после определения которых функцию $\varphi_*(\xi)$ можно будет интерполировать следующим многочленом:

$$\varphi_*(x) = \sum_{i=1}^n w_i \varphi_*(\xi_i) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{h_m} P_m^{(\alpha, \beta)}(\xi_i) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (4.6)$$

где

$$h_m = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(m+\alpha+1) \Gamma(m+\beta+1)}{(2m+\alpha+\beta+1) \Gamma(m+1) \Gamma(m+\alpha+\beta+1)}$$

5 Численный анализ

Проведем исследование сходимости решения системы (4.5) к решению системы (4.1). Очевидно, что как геометрические, так и механические параметры задачи достаточно существенно влияют на скорость сходимости метода механических квадратур. Особенно сильно это влияние заметно в случаях, когда хотя бы один из этих параметров приближается к критическому значению, приводящему к стремлению хотя бы одного из показателей особенности решения (4.2) к конечным значениям области их определения либо к появлению особенностей в регулярном ядре $R_*(z, \xi)$, а следовательно, и к изменению структуры первого уравнения в (4.1). В рассматриваемой задаче такими критическими значениями являются $h_1^* = 0$, $h_2^* = 1$ и $\mu = 0, \infty$.

Учитывая, что наибольшее отклонение интерполирующего многочлена от интерполируемой функции имеет место на концах отрезка интерполирования, в качестве показателей сходимости метода выбраны коэффициенты интенсивности напряжений в концах трещины, определяемые формулами

$$K_{(-1)} = \frac{(1 + \kappa_2) [(1 + 2\beta)(1 + \mu\kappa_1) - (3 + 2\beta)(\mu + \kappa_2)]}{2(1 + \mu\kappa_1)(\mu + \kappa_2) \sin \pi\beta} p_* \varphi_*(-1)$$

$$K_{(+1)} = -2^{0.5+\beta} p_* \varphi_*(1),$$

а также среднеквадратичное отклонение левой части первого уравнения системы (4.5), рассчитанной во внутренних узлах равномерной сетки, делящей интервал $(-1, 1)$ на 20 отрезков, от правой части:

$$K_{(err)} = \sqrt{\frac{1}{20} \sum_{k=1}^{19} \left[\sum_{i=1}^n w_i \varphi_*(\xi_i) \left\{ \frac{1 - q_i(t_k)}{\xi_i - t_k} + L_* \left[\frac{1 - q_i(-t_k - 2)}{\xi_i + t_k + 2} \right] + R_*(t_k, \xi_i) \right\} + p_* \right]^2}$$

$$t_k = -1 + \frac{k}{20}, \quad (k = 1, 19).$$

В Табл. 1 приведены значения указанных величин при разных порядках аппроксимации n и различных значениях параметров h_1^* , h_2^* и μ . Для коэффициентов Пуассона приняты значения $\nu_1 = 0.35$, $\nu_2 = 0.25$, а также положено $p_* = 1$. Результаты приведены для пяти групп значений указанных параметров, из которых в первой значения параметров далеки от критических, а в остальных хотя бы один из параметров относительно близок к

критическому значению. Из таблицы видно, что для всех групп, за исключением, может быть, последней, сходимость достаточно хорошая и численный анализ поставленной задачи можно провести при $n = 10$.

	n	6	10	14	18
$h_1^* = 2$	$K_{(-1)}$	0.1109	0.1121	0.1124	0.1126
$h_2^* = 2.5$	$K_{(+1)}$	0.3550	0.3549	0.3549	0.3549
$\mu = 5$	$K_{(err)}$	0.0031	7.6×10^{-4}	9.2×10^{-5}	1.2×10^{-4}
$h_1^* = 2$	$K_{(-1)}$	0.5644	0.5628	0.5623	0.5621
$h_2^* = 1.05$	$K_{(+1)}$	0.1894	0.1896	0.1900	0.1901
$\mu = 0.5$	$K_{(err)}$	1.1×10^{-3}	5.3×10^{-4}	5.2×10^{-5}	2.7×10^{-5}
$h_1^* = 0.05$	$K_{(-1)}$	0.3664	0.3649	0.3644	0.3647
$h_2^* = 2.5$	$K_{(+1)}$	0.3726	0.3716	0.3717	0.3717
$\mu = 2$	$K_{(err)}$	3.9×10^{-3}	1.4×10^{-3}	4.6×10^{-5}	1.3×10^{-4}
$h_1^* = 2.8$	$K_{(-1)}$	1.7809	1.7536	1.7466	1.7442
$h_2^* = 4.2$	$K_{(+1)}$	0.2751	0.2756	0.2757	0.2757
$\mu = 0.0001$	$K_{(err)}$	0.0031	8.6×10^{-4}	1.4×10^{-4}	8.9×10^{-5}
$h_1^* = 2.8$	$K_{(-1)}$	0.0083	0.0084	0.0082	0.0084
$h_2^* = 4.2$	$K_{(+1)}$	0.4414	0.4490	0.4440	0.4417
$\mu = 100$	$K_{(err)}$	0.0018	0.0054	0.1134	0.0004

Таблица 1: Сходимость численного метода

Исходя из результатов таблицы, численный анализ проведен для значений исходных параметров относительно далеких от критических значений при $n = 10$. Исследована зависимость коэффициентов интенсивности напряжений у концов трещины, показателя особенности β , а также формы раскрытия трещины от исходных параметров задачи.

На Рис.2-Рис.5 представлены графики зависимости коэффициентов концентрации напряжений $K_{(-1)}$ у конца трещины, выходящего на линию раздела материалов, (далее, внешний конец) (сплошные линии) и $K_{(+1)}$ у внутреннего конца трещины (пунктирные линии) от отношения модулей сдвига материалов полос $\mu = \mu_2/\mu_1$ при различных значениях одного из параметров h_1^* , h_2^* , ν_1 и ν_2 при неизменных трех остальных. При численных расчетах параметр μ изменялся в пределах $[0.1, 8.35]$. В зависимости от этого же параметра исследовано также изменение показателя особенности β при различных значениях коэффициентов Пуассона ν_1 и ν_2 . Выяснено, что коэффициент Пуассона ν_1 материала нижнего слоя мало влияет на показатель особенности β , особенно при приближении к концам интервала изменения μ , в средней же части чем больше коэффициент ν_1 , тем меньше по модулю показатель β . Коэффициент же ν_2 влияет на этот показатель в равной мере по всему интервалу изменения μ , при этом чем больше коэффициент ν_2 , тем больше по модулю показатель β (Табл.2).

μ	$\nu_2 = 0.25$			$\nu_1 = 0.35$		
	$\nu_1 = 0.15$	$\nu_1 = 0.25$	$\nu_1 = 0.35$	$\nu_2 = 0.15$	$\nu_2 = 0.25$	$\nu_2 = 0.35$
0.1	-0.3221	-0.3116	-0.3001	-0.2398	-0.3001	-0.3538
2.1	-0.5965	-0.5809	-0.5596	-0.5413	-0.5596	-0.5788
4.35	-0.6744	-0.6627	-0.6462	-0.6307	-0.6462	-0.6632
8.35	-0.7421	-0.7335	-0.7211	-0.7074	-0.7211	-0.7363

Таблица 2: Показатель особенности β

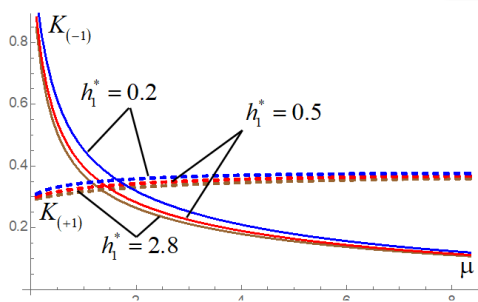


Рис.2 $h_2^* = 4.2; \nu_1 = 0.35, \nu_2 = 0.25$

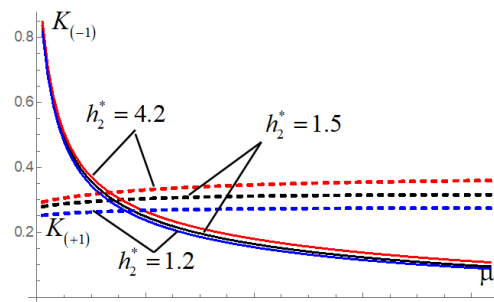


Рис.3 $h_1^* = 2.8; \nu_1 = 0.35, \nu_2 = 0.25$

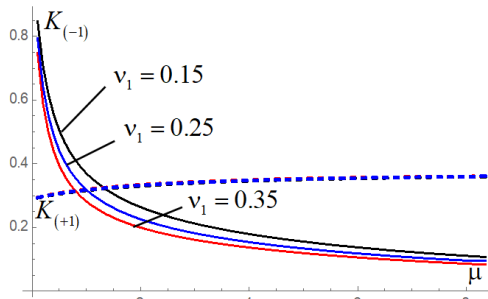


Рис.4 $h_1^* = 2.8; h_2^* = 4.2, \nu_2 = 0.25$

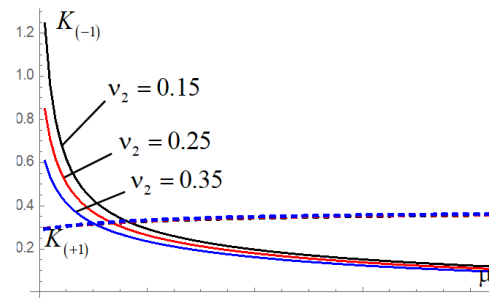


Рис.5 $h_1^* = 2.8; h_2^* = 4.2, \nu_1 = 0.35$

Из приведенных графиков можно сделать следующие выводы:

- С возрастанием отношения коэффициент концентрации напряжений у внешнего конца трещины существенно падает, стремясь к нулю, а второй коэффициент медленно возрастает, стремясь к определенному пределу,
- Коэффициенты Пуассона обоих материалов практически не влияют на коэффициент концентрации напряжений у внутреннего конца трещины,
- Наибольшее влияние на коэффициент концентрации напряжений у внешнего конца трещины имеет коэффициент Пуассона материала верхнего слоя,

- Изменение толщины верхнего слоя влияет, главным образом, на коэффициент концентрации напряжений у внутреннего конца трещины,
- Изменение толщины нижнего слоя почти одинаково влияет на коэффициенты концентрации напряжений у обоих концов трещины.

На Рис.6 – Рис.7 приведены графики распределения безразмерных контактных напряжений $\tau_{xy}(x, 0)/(a\mu_2)$ и $\sigma_y(x, 0)/(a\mu_2)$ по линии раздела материалов вблизи вершины трещины для различных значений параметров задачи. На Рис.6 приведены указанные графики для различных значений толщины нижней полосы $h_1^* = 1.5; 0.75; 0.5$ при неизменных остальных: $h_2^* = 4.5; \mu = 0.5; \nu_1 = 0.35$ и $\nu_2 = 0.25$, а на Рис.7 те же графики для $\mu = 0.5; 1; 2$ и $h_2^* = 4.5; h_1^* = 0.5; \nu_1 = \nu_2 = 0.25$.

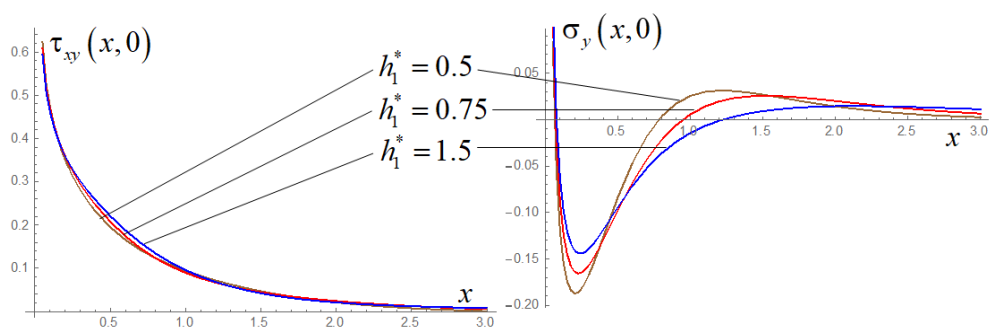


Рис. 6: Распределение тангенциальных (слева) и нормальных (справа) напряжений по линии раздела материалов для различных значений толщины нижней полосы h_1^* .

Судя по графикам Рис.6, изменение толщины нижней полосы h_1^* не сильно влияет на распределение тангенциальных напряжений, нормальные же напряжения, несмотря на то, что они по величине существенно меньше тангенциальных, достаточно сильно реагируют на это изменение. При этом тангенциальные напряжения при удалении от вершины трещины убывают монотонно, а нормальные напряжения на достаточно близком расстоянии от вершины трещины меняют знак, достигают локального минимума, возрастают до определенного локального максимума и далее монотонно убывают до нуля. Уменьшение толщины h_1^* приводит к увеличению абсолютных значений локальных экстремумов и уменьшению интервала этих активных изменений, после которого начинается монотонное убывание до нуля. Причем уменьшение этой зоны обусловлено, главным образом, сдвигом локального максимума.

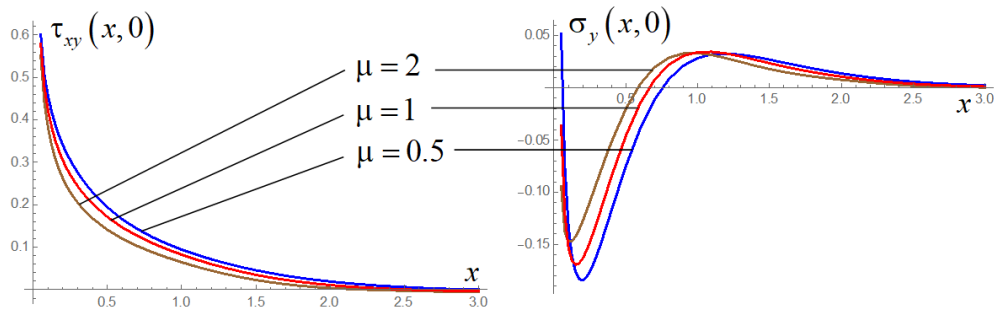


Рис. 7: Распределение тангенциальных (слева) и нормальных (справа) напряжений по линии раздела материалов для различных значений отношения модулей сдвига μ .

Изменение отношения модулей сдвига μ равнозначно влияет на распределение обоих напряжений. Увеличение отношения μ приводит к уменьшению как тангенциальных напряжений, так и абсолютных значений нормальных напряжений. При этом интервал активных изменений нормальных напряжений уменьшается, а локальный максимум, оставаясь на одном уровне, и локальный минимум, уменьшаясь по абсолютной величине, приближаются к вершине трещины. Здесь, в отличие от предыдущих графиков, оба локальных экстремума в равной мере приближаются к вершине трещины.

При помощи квадратурной формулы для вычисления интеграла с переменным пределом [12] вычислено также раскрытие трещины. На Рис.8 представлены формы раскрытия трещины при различных значениях параметров. Два параметра приняты постоянными $h_2^* = 4.2$; $\nu_2 = 0.25$.

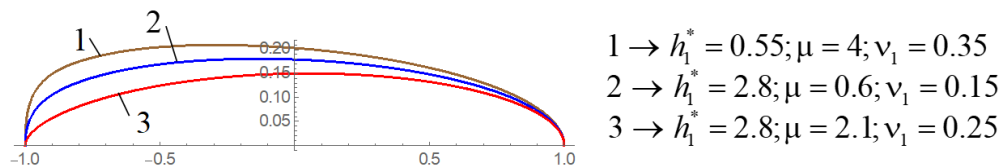


Рис. 8: Форма раскрытия трещины

Заключение

Исследовано напряженное состояние двухкомпонентной составной полосы вокруг трещины конечной длины, перпендикулярно выходящей на линию раздела материалов. Получено определяющее уравнение задачи, являющееся сингулярным интегральным уравнением с обобщенным ядром Коши, иначе называемым уравнением с неподвижной особенностью. При помощи метода механических квадратур исследованы зависимости коэффициентов концентрации напряжений в концах трещины, показателя особенности на внешнем конце трещины, формы раскрытия трещины, а также распределение нормальных и тангенциальных напряжений на линии раздела материалов от упругих и геометрических параметров задачи.

Выявлена степень влияния отдельных параметров на коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины: толщина нижней полосы почти одинаково, с преобладанием у внешнего конца, влияет на оба коэффициента интенсивности; толщина верхней полосы заметно влияет только на коэффициент интенсивности напряжений у внутреннего конца трещины; оба коэффициента Пуассона существенно влияют на коэффициент интенсивности у внешнего конца и практически не влияют на коэффициент у внутреннего конца трещины.

Показано, что толщина нижней полосы влияет также на распределение контактных напряжений по линии раздела материалов, причем значительно существеннее на нормальные контактные напряжения, отношение же модулей сдвига влияет на оба контактных напряжения в равной мере.

Авторы выражают глубокую признательность своему молодому коллеге к.ф.м.н. А.А. Амирджаняну за очень полезное обсуждение на всем, достаточно долгом, протяжении подготовки статьи и помощь при выполнении численных расчетов.

Литература

- [1] Развитие теории контактных задач в СССР. Под редакцией Л.А.Галина. М.: Наука, 1976
- [2] Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Известия АН СССР, ОТН, механика и машиностроение, 1962, №1, с.131-137. З. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
- [3] Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
- [4] Саркисян В.Г., Хачикян А.С. Равновесие упругой плоскости, содержащей полосу и симметричные трещины на линиях контакта. Изв. НАН Армении. Механика. 2015 т.68. №2, с3-9. <http://doi.org/10.33018/68.2.1>
- [5] Саакян А.В., Саркисян В.Г., Хачикян А.С. Равновесие составной упругой плоскости, содержащей полосу и симметрично расположенные взаимно перпендикулярные трещины. Изв. НАН РА. Механика. 2017, т. 70, №4, С. 57-67. <http://doi.org/10.33018/70.4.5>
- [6] Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Е., «Гитутюн», 2014, 322 с.
- [7] Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. (1973) Numerical solution of singular integral equations. In: Sih G.C. (eds) Methods of analysis and solutions of crack problems. Mechanics of fracture, vol 1. Springer, Dordrecht
- [8] Соболев Б.В., Рашидова Е.В., Борисова Е.В. Задача о поперечной внутренней трещине в составной упругой полуплоскости. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред: Труды VIII межд. конф., 22-26 сент. 2014г., Горис-Степанакерт.-Ереван, 2014.-С. 403-407.

- [9] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. –М.: Наука, 1968. 511с.
- [10] A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
- [11] Саакян А.В., Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. Известия НАН Армении, Механика, 2000, т.53, №3, сс.12-19. <https://mechanics.sci.am/docs/v53i3a2>
- [12] 12. Саакян А.В., Квадратурные формулы для вычисления интеграла с переменным верхним пределом. Труды II международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды », Дилижан, Армения, 4-8 октября 2010, сс. 107-111. <http://www.mechins.sci.am/download/conf-proceedings-2010-vol2.pdf>

Сведения об авторах:

Саакян Аветик Вараздатович - д.ф.м.н., в.н.с., avetik.sahakyan@sci.am
Саркисян Вардан Гарегинович - к.т.н., с.н.с., varsargsyan43@gmail.com
Хачикян Альберт Серобович - к.ф.м.н., в.н.с., khachikyanalbert39@gmail.com

Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию 27.08.2021