ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 74, № 3, 2021 Механика

УДК 539.3 Doi- http://doi.org/10.33018/74.3.2

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПАНЕЛИ С СВОБОДНЫМ КРАЕМ, СЖАТОЙ В НАПРАВЛЕНИИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ К СКОРОСТИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ГАЗА, ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИНЕРЦИОННЫХ МАСС И МОМЕНТОВ

Белубекям М.В., **Мартиросян С.Р.**

Ключевые слова: достаточно широкая панель, сжимающие силы, сверхзвуковое обтекание, аэроупругая устойчивость, сосредоточенные инерционные массы и моменты, аналитический метод решения, локализованная дивергенция

M.V. Belubekyan, **S.R. Martirosyan**

On the stability of a panel with a free edge compressed in a direction perpendicular to the velocity of a supersonic gas flow in the presence of concentrated inertial masses and moments

Keywords: sufficiently wide panel, compressive forces, supersonic flow, aeroelastic stability, concentrated inertial masses and moments, analytical solution, localized divergence

By analyzing, as an example, a thin elastic compressed sufficiently wide panel streamlined by supersonic gas flows, we study the influence of the initial stress state of the panel on the stability of the disturbed motion of the dynamic system «plate – flow» under the assumption of presence of concentrated inertial masses and moments on its free edge. An analytical solution to the problem was found. We establish the relationship between the characteristics of natural vibrations of the plate and the velocity of the streamlining supersonic gas flow, which enables one to draw some conclusions concerning the stability of disturbed motions of the system depending on the stress factor and the relative thickness of the plate. The possibility of loss of stability of the disturbed motion of the system we have shown only in the form of localized divergence. For various values of the «essential» parameters of the system, we determine the critical velocities of the gas flow leading to the localized divergence. We have shown that in the flow around the initial stress state caused by compressive forces leads to a significant destabilization of the unperturbed equilibrium state of the plate.

Մ.Վ. Բելուբեկյան, **Ս.Ռ.Մարտիրոսյան**

Գերձայնային գազի հոսքում սեղմված ուղղանկյուն սալի աէրոառաձգական կայունության մի խնդրի մասին, սալի ազատ եզրին կենտրոնացված իներցիոն զանգվածների և մոմենտների առկայության դեպքում

Հիմնաբառեր՝ լայն ուղղանկյուն սալ, սեղմող ուժեր, գերձայնային շրջհոսում, աէրոառաձգական կայունություն, կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, անալիտիկ լուծում, տեղայնացված դիվերգենցիա

Ուսումնասիրված է գերձայնային գազի հոսքում սեղմված բավականի լայն ուղղանկյուն սալի նախնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը ՙսալ – հոսք՚ համակարգի կայունության վրա. գազի հոսքը ուղղված է սալի ազատ եզրից դեպի հակադիր հոդակապորեն ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հոդակապորեն ամրակցված եզրերին: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկական լուծումը: Ցույց է տրված, որ առկա է միայն տեղայնացված դիվերգենցիա, իսկ պանելային դիվերգենցիան, ինչպես նաև ֆլատերը, բացակայում են: Գտնված են տեղայնացված դիվերգենցիայի կրիտիկական արագությունների արժեքները, որոնք փաստում են սեղմող ուժերի ապակայունացման ազդեցության մասին:

В линейной постановке исследуется зависимость видов потери устойчивости невозмущённого состояния рановесия достаточно широкой тонкой упругой прямоугольной пластинки от характера первоначального напряжённого состояния при наличии сосредоточенных масс и моментов на её свободном крае в предположении, что пластинка сжата в направлении, перпендикулярном скорости обтекающего сверхзвукового потока газа, набегающего на ее свободный край. Найдено аналитическое решение задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы «плстинка-поток». Показана возможность потери устойчивости возмущённого движения системы только лишь в виде локализованной дивергенции. Установлено, что при обтекании первоначальное напряжённое состояние, обусловленное сжимающими усилиями, приводит к существенной дестабилизации состояния невозмущённого равновесия пластинки.

Введение

Рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение. Вопрос об упругой устойчивости панелей обшивки летательных аппаратов, представляющих собой плоские пластинки или пологие оболочки, неизбежно возникает на этапе проектирования и конструирования любого летательного аппарата для обеспечения безопасности полета.

Теоретические исследования этих задач позволяют выявить различные виды потери устойчивости, обусловленные характером деформаций, а также, дать оценку влияния комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им. Поэтому, в современных исследованиях особенно важным является изучение динамического поведения системы «пластинка–поток», по возможности, аналитическими методами, наряду с численными.

Изучению статической и динамической неустойчивости пластинок и оболочек посвящено огромное количество работ, обзор которых, в основном, содержится в монографиях и в статьях [1–10]. Однако здесь, за исключением работ А.А. Мовчана, построены приближённые решения и не дана эффективная оценка точности этих приближений.

В предлагаемой статье с помощью алгоритма, подробно изложенного в работе [15], получено аналитическое решение задачи устойчивости динамической системы «пластинка–поток» вблизи границ области устойчивости при следующих предположениях. Первоначально сжатая достаточно широкая панель [17] с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями обтекается сверхзвуковым потоком газа в направлении, перпендикулярном сжимающим силам;

поток газа набегает на её свободный край, вдоль которого приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты.

С помощью графоаналитических и численных методов исследований произведено разбиение пространства параметров системы на области устойчивости и неустойчивости. Исследована граница области устойчивости. Как оказалось, в случае достаточно широких прямоугольных панелей, в отличие от панелей достаточно удлинённых [20] и панелей умеренных размеров [21], возмущённое движение динамической системы теряет устойчивость лишь только в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки: дивергенция панели и панельный флаттер отсутствуют. Найдены критические скорости локализованной дивергенции и критические значения коэффициента напряжения в предположении, что в момент «выпучивания» в ней возникают только напряжения изгиба.

Установлено, что, как и ожидалось, первоначальное напряжённое состояние достаточно широкой панели, обусловленное сжимающими силами, приводит к существенной дестабилизации возмущённого движения системы «пластинка-поток», в сравнении с системой с ненагруженной панелью [15, 17].

Данная работа является продолжением работ [17, 20, 21].

1 Постановка задачи

Рассматривается тонкая упругая достаточно широкая прямоугольная пластинка ($ab^{-1} \geq 1.96$), которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$ [17]. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край пластинки $x = 0$ – свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x = 0$ приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 11].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию сжимающих сил $N_y = 2h\sigma_y$, равномерно распределённых по краям $y = 0$ и $y = b$ пластинки, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; сжимающие усилия σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели, и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y, t)$ [1, 2].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$ «поршневой теории», где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [13, 14]. При этом предполагается, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp, сжимающими усилиями σ_y в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c, приложенными вдоль её свободного края $x = 0$, в предположении, что сжимающие усилия σ_y малы по сравнению с критическими напряжениями $(\sigma_y)_{cr.}$, которые могут произвести выпучивание пластинки в отсутствии обтекания ($V = 0$).

Отметим, что в работе, с целью получения возможности аналитического исследования в рассматриваемой задаче динамической устойчивости системы «пластинка–поток», распределённая масса пластинки условно заменена сосредоточенными инерционными массами и моментами поворота, приложенными вдоль свободного края пластинки [2, 11, 15]. Такая замена вовсе не приводит к искажению динамической картины явления – потери устойчивости системы; быть может, с точностью до численных значений критических скоростей потока газа, которые могут быть несколько завышенными.

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности сжатой прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [13, 14] будет описываться соотношением [2, 8, 20, 21]:

$$D\Delta^2 w + 2h\sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0\rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [2, 11]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = D^{-1} I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D^{-1} m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1.2}$$

при $x = 0$;

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{при } x = a; \tag{1.3}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b; \tag{1.4}$$

где ν– коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr}– наименьшую скорость потока газа в сверхзвуковом и гиперзвуковом интервале скоростей:

$$V_{cr.} \in (a_0 M_0,\, a_0 M_{2\cos m.}), \quad M_0 = \sqrt{2}, M_{2\cos m.} \approx 33.85; \tag{1.5}$$

приводящую к потере устойчивости состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) в предположении, что

$$\sigma_y \ < (\sigma_y)_{cr.} < (\sigma_y)_{pr.}. \tag{1.6}$$

Здесь, M_0 и $M_{2\cos m.}$– граничные значения числа Маха M, соответствующие интервалу допустимых значений сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1]; $(\sigma_y)_{cr.}$– критические напряжения, приводящие к выпучиванию пластинки в отсутствии обтекания ($V = 0$), найденные в работе [17]; $(\sigma_y)_{pr.}$– нижняя граница текучести [1, 17].

Анализ устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) – (1.4) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале скоростей потока газа (1.5) при условии (1.6).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.4) будем исследовать в случае достаточно широких прямоугольных пластинок [15, 17]:

$$\gamma = ab^{-1} \geq 1.96, \tag{1.7}$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b.

Заметим, что в работах [15,16] получено аналитическое решение задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» в предположении отсутствия первоначального напряжённого состояния пластинки, в работе [17] – решение задачи статической устойчивости панели с нагруженными краями $y = 0$ и $y = b$, как при обтекании ($V \neq 0$), так и в отсутствии ($V = 0$).

Данная работа является продолжением работ [20, 21], в которых исследована задача устойчивости (1.1) – (1.4) в случае достаточно удлинённых панелей ($\gamma \leq 0.193$) и панелей умеренных размеров ($0.193 < \gamma < 1.96$) соответственно.

2

Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы (1.1) – (1.4) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны пластинки b.

Возмущённое движение системы (1.1) – (1.4) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\,\lambda < 0$), и неустойчива, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\,\lambda > 0$). Критическая скорость потока газа V_{cr}, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости возмущённого движения системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\mathrm{Re}\,\lambda = 0$).

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение в виде алгебраического уравнения четвёртой степени:

$$r^4 - 2r^2 + \alpha_n^3 r + (1-\beta_y^2) = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3}, \quad \beta_y^2 = 2h\sigma_y D^{-1}\mu_n^{-2}, \quad (2.2)$$

которое в соответствии с методом решения Феррари можно представить в виде [17]:

$$\left(r^2 + \sqrt{2(q+1)}r + q - \sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right)\cdot\left(r^2 - \sqrt{2(q+1)}r + q + \sqrt{q^2-1+\beta_y^2}\right) = 0, \quad (2.3)$$

где $q = q(V)$ – параметр, характеризующий скорость потока газа V – действительный корень кубического уравнения

$$8\cdot(q+1)(q^2-1+\beta_y^2) - \alpha_n^6 = 0, \quad (2.4)$$

удовлетворяющий условию [17]:

$$q \in (q_0, \infty), \quad (2.5)$$

$$q_0 = \left(-1 + 2\sqrt{(4-3\beta_y^2)}\right)/3, \quad \beta_y^2 \le 4/3 \text{ и } q_0 = 1, \quad \beta_y^2 > 4/3 \quad (\text{табл. } 1);$$

$\beta_y^2 = \beta_y^2(n,\gamma,\nu)$ – коэффициент напряжения, который

$$\beta_y^2 < \left(\beta_y^2\right)_{cr.}, \quad \left(\beta_y^2\right)_{cr.} = 2h(\sigma_y)_{cr.}D^{-1}\mu_n^{-2} \quad (\text{табл. } 2) \quad (2.6)$$

в соответствии с ограничением (1.6) и обозначениями (1.7) и (2.2). В соответствии с обозначениями (2.2), очевидно, что параметры α_n^3 и β_y^2 характеризуют, соответственно, неконсервативную и консервативную составляющие нагрузки.

β_y^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.21	1.333	>1.333
q_0	1	0.840	0.721	0.510	0.338	0.072	–0.333	1

Таблица 1

Данные таблицы 2 – значения функции $\left(\beta_y^2\right)_{cr.} = \left(\beta_y^2\right)_{cr.}(n,\gamma,\nu)$ при $n = 1$ – являются решениями следующих дисперсионных уравнений – характеристических определителей задачи статической устойчивости нагруженной панели $\left(m_c = 0,\ I_c = 0,\ \beta_y^2 \ne 0\right)$ в отсутствии обтекания $(V = 0)$ [1, 7, 17]:

$$\begin{aligned} K_1 = {} & \left(\sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}}\cdot\left(1-\sqrt{\beta_y^2}-\nu\right)^2 + \sqrt{1-\sqrt{\beta_y^2}}\cdot\left(1+\sqrt{\beta_y^2}-\nu\right)^2\right)\times \\ & \times sh\pi n\gamma\left(\sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}} - \sqrt{1-\sqrt{\beta_y^2}}\right) - \left(\sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}}\cdot\left(1-\sqrt{\beta_y^2}-\nu\right)^2 - \right. \\ & \left. - \sqrt{1-\sqrt{\beta_y^2}}\cdot\left(1+\sqrt{\beta_y^2}-\nu\right)^2\right)\cdot sh\pi n\gamma\left(\sqrt{1+\sqrt{\beta_y^2}} + \sqrt{1-\sqrt{\beta_y^2}}\right) = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

при $\beta_y^2 < 1$;

$$K_2 = (2-\nu)^2 \cdot sh(\sqrt{2} \cdot \pi n \gamma) - \sqrt{2} \cdot \pi n \gamma \cdot \nu^2 \cdot ch(\sqrt{2} \cdot \pi n \gamma) = 0, \qquad (2.8)$$

при $\beta_y^2 = 1$;

$$K_3 = \left(\sqrt{\beta_y^2} + 1 - \nu\right)^2 \cdot \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} - 1} \cdot sh\left(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} + 1}\right) \cdot \cos\left(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} - 1}\right) -$$
$$- \left(\sqrt{\beta_y^2} - 1 + \nu\right)^2 \cdot \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} + 1} \cdot ch\left(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} + 1}\right) \cdot \sin\left(\pi n \gamma \sqrt{\sqrt{\beta_y^2} - 1}\right) = 0, \qquad (2.9)$$

при $\beta_y^2 > 1$.

В работе [17] показано, что

$$K_1\left(n, \gamma, \nu, \beta_y^2\right) > 0, \quad \gamma < \gamma_*^1, \quad \beta_y^2 < 1; \qquad (2.10)$$

$K_1\left(n, \gamma, \nu, \beta_y^2\right) = 0$ имеет два корня в интервале $\gamma \in \left(\gamma_*^1,\ \gamma_{gr.}\right)$, а при $\gamma \geq \gamma_{gr.}$– один корень, равный $\beta_y^2 = \left(\beta_y^2\right)_{loc.}$ (табл. 3) – единственному корню уравнения

$$K_{loc.inst.}\left(\nu, \beta_y^2\right) = \left(1 + \sqrt{1-\beta_y^2}\right)^2 - 2\nu\left(1 + \sqrt{1-\beta_y^2}\right) - (1-\nu)^2 = 0,\ \beta_y^2 < 1, \qquad (2.11)$$

являющимся дисперсионным уравнением локализованной неустойчивости полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$) [17], полученным из условия затухания колебаний на крае $x = a$ [3, 6, 18].

γ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
1.96	1.125	1.105	1.092	1.067	1.0040
2.00	1.120	1.101	1.089	1.064	1.0015
2.025	1.117	1.099	1.086	1.062	1.0000
3.00	1.052	1.041	1.033	1.017	0.9702
4.226	1.026	1.018	1.0123	1.0000	0.9605
5.00	1.018	1.0115	1.0067	0.9956	0.9586
7.226	1.0084	1.0036	1.0000	0.9910	0.9573
10.00	1.0042	1.00054	0.9975	0.9896	0.9571
11.03	1.0033	1.00000	0.9971	0.9892	0.9571
20.00	1.0008	0.99860	0.9962	0.9892	0.9571
40.00	1.000076	0.99836	0.9962	0.9892	0.9571
50.643	1.000000	0.99835	0.9962	0.9892	0.9571
$\geq$ 80.00	0.999920	0.99835	0.9962	0.9892	0.9571

Таблица 2: Значения критического коэффициента напряжения $\left(\beta_y^2\right)_{cr.}$ при $n = 1$.

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$(\beta_y^2)_{loc.}$	0.99992	0.99835	0.9962	0.9892	0.9571

Таблица 3

Здесь, $\gamma_*^1 = \gamma_*^1(n,\ \nu)$ – решение уравнения (2.8) – значения γ при $\beta_y^2 = 1$ (табл. 2); $\gamma_{gr.} = \gamma_{gr.}(n,\ \nu)$ (табл. 4) – граничное значение параметраγ, начиная с которого невозмущённая форма равновесия сжатой прямоугольной пластинки при значениях $\beta_y^2 \geq \left(\beta_y^2\right)_{cr.}(n,\nu) = \left(\beta_y^2\right)_{loc}(\nu)\ < 1$ (табл. 2 и 3) теряет устойчивость в виде локализованной неустойчивости, при котором прогиб локализуется в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки, аналогично полубесконечной пластине–полосе ($\gamma = \infty$). По сути, напряжения, возникающие в срединной поверхности прямоугольной пластинки при$\gamma \geq \gamma_{gr.}$, такие же, как и в случае полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$).

Тем самым, при всех n имеем

$$\lim_{\gamma\to\gamma_{gr}} K_1 = \lim_{\gamma\to\gamma_{gr}} K_1\left(n,\gamma,\nu,\beta_y^2\right) = K_{loc.inst.}\left(\nu,\beta_y^2\right), \quad \beta_y^2 \geq \left(\beta_y^2\right)_{loc}(\nu) < 1. \quad (2.12)$$

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
$\gamma_{gr.}(n,\ \nu)$ при $n = 1$	80	42	18	11	9

Таблица 4

Заметим, что как было отмечено в работе [17], устойчивость необтекаемых прямоугольных пластинок при различных граничных условиях и при разных значениях отношения сторон γ прямоугольной пластинки рассматривалась, в частности, в работах [1, 3, 6, 7, 19]. В статье [3] и в монографиях [6, 7], в которых рассмотрена устойчивость сжатой пластинки, соответственно, с двумя свободными краями и с одним свободным и жёстко заделанным краями, при $\nu = 0.3$ и $\gamma = \infty$ получено то же самое значение критического коэффициента напряжения: $\left(\beta_y^2\right)_{loc.} = 0.9962$ (табл. 2 и 3). Это совпадение связано с локализацией прогиба $w(x,y)$ вблизи свободного края $x = 0$ пластинки при достаточно больших значениях $\gamma \geq \gamma_{gr}$, в результате которой граничные условия на крае $x = a$ перестают оказывать влияние [6, 19].

Таким образом, невозмущённая форма равновесия сжатой прямоугольной пластинки при $\gamma < \gamma_{gr.}$(табл. 4) и $\beta_y^2 \geq \left(\beta_y^2\right)_{cr.}(n,\nu)$ (табл. 2) теряет устойчивость в виде неустойчивости панели, а при $\gamma \geq \gamma_{gr.}$ и $\beta_y^2 \geq \left(\beta_y^2\right)_{loc}(\nu)\ < 1$ (табл. 3) – в виде локализованной неустойчивости.

2.1. В работе [17] с помощью графоаналитических методов исследований показано, что при допустимых значениях параметра скорости (2.5) характеристическое уравнение (2.2) имеет два действительных корня $r_1 \in \mathbb{R}$, $r_2 \in \mathbb{R}$ и пару комплексно сопряжённых корней $r_{3,4} \in W$ с положительной вещественной частью, которые легко находятся, как решения квадратных уравнений – сомножителей соотношения (2.3):

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} - 0.5(q-1)}, \tag{2.13}$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + 0.5(q-1)}. \tag{2.14}$$

При этом, имеем [17]:

$$r_1 < 0,\ r_2 < 0,\ \text{когда}\ \beta_y^2 \in [0,1),\ q \in \left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2})/3, \infty\right); \tag{2.15}$$

$$r_1 < 0,\ r_2 = 0,\ \text{когда}\ \beta_y^2 = 1,\ q \in (1/3, \infty); \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered} r_1 < 0,\ r_2 > 0, \beta_y^2 \in (1, 4/3],\ q \in \left((-1+2\sqrt{4-3\beta_y^2})/3, \infty\right)\ \text{и} \\ \beta_y^2 > 4/3, q \in (1, \infty). \end{gathered} \tag{2.17}$$

Отсюда следует, что общее решение (2.1) дифференциального уравнения (1.1), запишется в виде двойного ряда:

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4} C_{nk} \cdot \exp(\mu_n r_k x + \lambda t)\sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \tag{2.18}$$

C_{nk} – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны пластинки b; r_k, $k = \overline{1,4}$ – корни характеристического уравнения (2.2), определяемые выражениями (2.13) и (2.14).

А также, как известно [17, 18], неравенства (2.15), в соответствии с условием затухания колебаний на крае $x = a$ пластинки, определяют необходимое условие потери устойчивости системы «пластинка–поток» в виде локализованной дивергенции в случае достаточно широких пластинок ($\gamma \gg 1$) и полубесконечной пластины-полосы ($\gamma = \infty$). При этом, общее решение (2.1) дифференциального уравнения (1.1), запишется в виде

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} C_{nk} \cdot \exp(\mu_n r_k x + \lambda t)\sin(\mu_n y), \mu_n = \pi n b^{-1}. \tag{2.19}$$

Учитывая обозначения (2.2), из соотношения (2.4) находим явный вид зависимости скорости потока газа Vот параметров системы «пластинка–поток», который для достаточно широких пластин ($\gamma \geq 1.96$) и полубесконечной пластины полосы ($\gamma = \infty$) имеет следующее описание [17]:

$$V\left(q,\, n, \nu, \beta_y^2\right) = 2\sqrt{2(q+1)\cdot(q^2-1+\beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 \cdot D\left(a_0\rho_0 b^3\right)^{-1}. \tag{2.20}$$

В силу условия (1.5), отсюда, очевидно, следует, что

$$V\left(q, n, \nu, \beta_y^2\right) \in \left(V\left(q_0, n, \nu, \beta_y^2\right), \quad a_0 M_{2\cos m.}\right) \subseteq \left(a_0 M_0, \quad a_0 M_{2\cos m.}\right), \tag{2.21}$$

когда $V\left(q_0,n,\nu,\beta_y^2\right) > a_0M_0$, и

$$V\left(q,n,\nu,\beta_y^2\right) \in \left(a_0M_0,\ a_0M_{2\cos m.}\right), \text{ когда } V\left(q_0,n,\nu,\beta_y^2\right) \le a_0M_0. \qquad (2.22)$$

Тогда, согласно формуле цилиндрической жёсткости $D = \dfrac{E\cdot(2h)^3}{12\cdot(1-\nu^2)}$, допустимые интервалы значений приведённой скорости $V\left(q,n,\nu,\beta_y^2\right)\cdot D^{-1}\left(a_0\rho_0b^3\right)$, соответственно, будут вида:

$$\begin{aligned} &V\left(q,n,\nu,\beta_y^2\right)D^{-1}(a_0\rho_0b^3) \in (V(q_0,n,\nu,\beta_y^2)D^{-1}(a_0\rho_0b^3), a_0M_{2\cos m}\Psi) \subseteq \\ &\subseteq (a_0M_0\Psi, a_0M_{2\cos m.}\Psi) \quad \text{при } V\left(q_0,n,\nu,\beta_y^2\right) \ge a_0M_0; \end{aligned} \qquad (2.23)$$

$$V\left(q,n,\nu,\beta_y^2\right)D^{-1}(a_0\rho_0b^3) \in (a_0M_0\Psi, a_0M_{2\cos m}\Psi) \text{ при } V\left(q_0,n,\nu,\beta_y^2\right) < a_0M_0;$$

$$\Psi = 12(1-\nu^2)a_0\rho_0E^{-1}\left(2hb^{-1}\right)^{-3}, \quad M_0=\sqrt{2}, \quad M_{2\cos m.} \approx 33.85.$$

Из соотношений (2.23) видно, что длины соответствующих допустимых интервалов $d(\nu,2hb^{-1}) \le a_0(M_{2\cos m.}-M_0)\Psi$ являются убывающими функциями как от относительной толщины пластинки $2hb^{-1}$, так и от коэффициента Пуассона ν при фиксированных значениях остальных параметров системы. Для стальных достаточно широких прямоугольных пластинок $\gamma \ge 1.96$ подсчитанные интервалы допустимых значений приведённых скоростей потока газа $VD^{-1}\left(a_0\rho_0b^3\right)$ даны в таблице 5.

Как следует из данных таблицы 5, длины d допустимых интервалов с ростом параметра $2hb^{-1}$ уменьшаются примерно в 52 раза при всех фиксированных значениях ν, а с ростом коэффициента Пуассона ν – уменьшаются в 1.32 раза при фиксированных значениях параметра $2hb^{-1}$.

$2hb^{-1}$ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.0040	(184.98, 4368.81)	(175.61, 4147.43)	(170.49, 4026.55)	(160.99, 3802.27)	(140.52, 3318.59)
0.0045	(129.92, 3068.36)	(123.34, 2912.88)	(119.74, 2827.98)	(113.07, 2670.46)	(98.69, 2330.75)
0.0060	(54.81, 1311.78)	(52.03, 1245.27)	(50.52, 1208.98)	(47.70, 1141.58)	(41.63, 996.35)
0.0100	(11.84, 283.45)	(11.24, 269.09)	(10.91, 261.25)	(10.30, 246.70)	(8.99, 215.32)
0.0120	(6.85, 164.01)	(6.50, 155.72)	(6.32, 151.20)	(5.96, 142.69)	(5.20, 124.60)
0.0150	(3.51, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23, 77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

Таблица 5

3

Перейдем к описанию дисперсионных уравнений – достаточных признаков потери устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.4) вблизи границ области устойчивости.

Подставляя общее решение дифференциального уравнения (1.1) в виде (2.18) и в виде (2.19) в граничные условия (1.2) – (1.4) и (1.2), (1.4) соответственно, получаем однородные системы алгебраических уравнений четвёртого и второго порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель каждой из этих систем уравнений – характеристический определитель Δ_i приводит к соответствующему дисперсионному уравнению:

$$\Delta_1 = \Delta_1\left(q(V), n, \gamma, \nu, \beta_y^2, \chi_n, \delta_n\right) = \chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + (\chi_n A_1 + \delta_n A_2)\lambda^2 + A_3 = 0; \quad (3.1)$$

$$\Delta_2 = \Delta_2\left(q(V), n, \nu, \beta_y^2, \chi_n, \delta_n\right) = \chi_n \delta_n A_0^* \lambda^4 + (\chi_n A_1^* + \delta_n A_2^*)\lambda^2 + A_3^* = 0; \quad (3.2)$$

$$\chi_n = I_c D^{-1} b(\pi n)^{-1}, \quad \delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}. \quad (3.3)$$

Дисперсионное уравнение (3.1) приведено и подробно изучено в работах [20, 21] при исследовании задачи устойчивости (1.1) – (1.4) в случае достаточно удлинённых пластин ($\gamma \leq 0.193$) и пластинок умеренных размеров ($\gamma \in (0.193,\, 1.96)$) соответственно. Так как данная работа является продолжением работ [20, 21], то в её тексте дисперсионное уравнение (3.1), в силу его громоздкости и ограниченности объёма статьи, можно не приводить, используя ссылку на эти работы.

Результаты численных исследований уравнений (3.1) и (3.2) показали их равносильность в интервале $\beta_y^2 \geq \left(\beta_y^2\right)_{loc}(\nu) < 1$ (табл. 3) при $\gamma \geq \gamma^*(\nu) \approx 1.96$ для всех ν: влияние коэффициента Пуассона ν на граничное значение $\gamma = \gamma^*$ неощутимо мало. Иными словами,

$$\lim_{\gamma \to \gamma^*} \Delta_1 = \Delta_2 = \chi_n \delta_n A_0^* \lambda^4 + (\chi_n A_1^* + \delta_n A_2^*)\lambda^2 + A_3^* = 0, \quad (3.4)$$

где

$$A_0^* = 1, A_1^* = \sqrt{2(q+1)} \cdot \left(q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right); A_2^* = \sqrt{2(q+1)}; \quad (3.5)$$

$$A_3^* = \left(q + 1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right)^2 - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2. \quad (3.6)$$

Следовательно, в интервале $\beta_y^2 \geq \left(\beta_y^2\right)_{loc}(\nu) < 1$ (табл. 3) при всех $\gamma \in [1.96,\, \infty)$ динамическое поведение системы «пластинка–поток» аналогино динамическому поведению системы «пластинка–поток», в которой обтекаемая пластинка – полубесконечная пластина–полоса ($\gamma = \infty$).

Учитывая соотношение (2.4), из выражений (3.5) очевидно следует

$$(\chi_n A_1^* + \delta_n A_2^*) > 0 \quad (3.7)$$

в области $\left\{\gamma \in [1.96,\, \infty),\, \beta_y^2 \geq \left(\beta_y^2\right)_{loc}(\nu) < 1\right\}$ при всех $q \in (q_0, \infty)$ (табл. 1).

Нетрудно показать, что дискриминант биквадратного уравнения (3.4)

$$Diskr\,(\Delta_2) = \left(k_n A_1^* + A_2^*\right)^2 - 4k_n A_3^* > 0, k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}; \tag{3.8}$$

при $q \in (q_0, \infty)$ (табл. 1), $\beta_y^2 \in \left[0,\, \left(\beta_y^2\right)_{loc}(\nu)\right)$ (табл. 3), $k_n \geq 0$ и ν.

В самом деле, подставляя в формулу дискриминанта (3.8) выражения (3.4) и (3.5), после несложных преобразований получаем

$$Diskr\,(\Delta_2) = 2\,(q+1)\left[k_n\left(q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right) - 1\right]^2 + 4k_n(1 - \beta_y^2 + (2q+\nu)\nu) > 0.$$

Итак, в соответствии с условием затухания колебаний на краю пластинки $x = a$, анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка-поток» (1.1), (1.2) и (1.4) для всех $\gamma \in [1.96, \infty)$ и $\gamma = \infty$ сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.4), определяющих собственные движения системы в пространстве существенных параметров $\Im = \left\{q(V),\, n,\, \nu, \beta_y^2, k_n\right\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическое поведение системы. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

4

Из способа разбиения пространства параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» на область устойчивости $\Im_0$ и области неустойчивости $\Im_1, \Im_2, \Im_3$ [12, 15, 20, 21], в силу условий (3.7) и (3.8) очевидно, что в данном случае пространство параметров $\Im$ состоит из двух областей $\Im_0$ и $\Im_1$: в области $\Im_0$ все корни λ_k уравнения (3.4) находятся в левой части комплексной плоскости($\operatorname{Re}\lambda_k < 0$); в области $\Im_1$ среди корней λ_k имеется один положительный корень. А стало быть, область устойчивости $\Im_0$ будет определяться соотношением $A_3^* > 0$, соответственно, область неустойчивости $\Im_1$ – соотношением $A_3^* < 0$. Тем самым, уравнение (3.4) в области устойчивости $\Im_0$ имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$: обтекаемая прямоугольная пластинка при $\gamma \in [1.96,\, \infty)$ как и полубесконечная пластина-полоса ($\gamma = \infty$), совершают гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния. В области $\Im_1$ уравнение (3.4) имеет два действительных $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ корня и пару чисто мнимых $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$ корней (из двух собственных движений пластинки, соответствующих собственным значениям λ_1 и λ_2, одно затухает, а другое неограниченно отклоняется по экспоненциальному закону). В соответствии с этим, прогибы пластинки будут возрастать во времени по экспоненциальному закону: в области $\Im_1$ имеет место потеря статической устойчивости.

Границей области устойчивости $\Im_0$, в соответствии с соотношениями, определяющих области $\Im_0$ и $\Im_1$, является гиперповерхность [12, 15, 17]: $A_3^* = 0$, или, согласно обозначению (3.6),

$$A_3^* = \left(q + 1 - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2}\right)^2 - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2 = 0, \tag{4.1}$$

на которой дисперсионное уравнение (3.4) имеет нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2 и пару чисто мнимых корней $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$. Очевидно, что уравнение (4.1) является достаточным условием потери статической устойчивости возмущённого движения системы в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки $x = 0$, когда $\gamma \in [1.96,\ \infty)$ и $\gamma = \infty$.

Заметим, что уравнение (4.1) тождественно дисперсионному уравнению, полученному в работе [17] при исследовании задачи устойчивости обтекаемой сжатой панели в статической постановке по методу Эйлера.

Критические скорости потока газа $V_{loc.div.}$, найденные подстановкой решения $q_{loc.div.} \in (q_0, \infty)$ уравнения (4.1) в формулу (2.20), разграничивают область устойчивости $\Im_0$ и область локализованной дивергенции $\Im_1$. При скоростях $V \geq V_{loc.div}$ потока газа происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к статической неустойчивости в виде локализованной дивергенции: прогибы пластинки локализованы в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки.

Таким образом, в отличие от достаточно удлинённых пластинок ($\gamma \leq 0.193$) [20] и пластинок умеренных размеров ($0.193 < \gamma < 1.96$) [21], в случае достаточно широких пластинок ($\gamma \geq 1.96$) возмущённое движение системы «пластинка–поток» теряет устойчивость только лишь в виде локализованной дивергенции, подобно полубесконечной пластине–полосе ($\gamma = \infty$).

5

Исследуем динамику возмущённого движения системы «пластинка–поток» при $\gamma \in [1.96,\ \infty)$, $\beta_y^2 \in \left[0,\ \left(\beta_y^2\right)_{loc}(\nu)\right)$ (табл. 3) в интервале допустимых значений $q \in (q_0, \infty)$ (табл. 1).

Результаты численных исследований показали, что возмущённое движение системы является устойчивым вблизи начала интервала сверхзвуковых скоростей $a_0\sqrt{2}$ для пластинок относительной толщины, примерно, $2h^{-1}b \in (0.006,\ 0.015]$ при всех значениях коэффициента Пуассона ν. А в случае пластинок относительной толщины, примерно, $2h^{-1}b \leq 0.004$ возмущённое движение системы при скоростях потока газа $V \geq a_0\sqrt{2}$ является статически неустойчивым: имеет место локализованная дивергенция. При этом, сверхзвуковое обтекание приводит к «скачкообразному падению» критического коэффициента напряжения $\left(\beta_y^2\right)_{loc}(\nu)$ (табл. 3): $\beta_y^2 \in \left(0,\ \left(\beta_y^2\right)^*_{loc.}\right)$, $\left(\beta_y^2\right)^*_{loc.} \approx \chi^{-1}(\nu) \cdot \left(\beta_y^2(\nu)\right)_{loc.}$ (табл. 6).

ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
χ	1.541	1.527	1.495	1.432	1.372

Таблица 6

Цепочки переходов [20, 21] в интервале $\beta_y^2 \in \left(0,\ \left(\beta_y^2\right)^*_{loc.}\right)$ при всех $\gamma \geq 1.96$ и $\gamma = \infty$, при $2h^{-1}b \in (0.006,\ 0.015]$, при всех значениях коэффициента Пуассона

ν будут иметь следующее описание:

$$\Im_0 \xrightarrow{V_{loc.div}} \Im_1. \tag{5.1}$$

Подставляя решение $q_{loc.div.} \in (q_0, \infty)$ уравнения (4.1) в формулу (2.20), получаем значения приведённой критической скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$, представленные для некоторых значений коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in \left(0,\ \left(\beta_y^2\right)_{loc.}^*\right)$ и коэффициента Пуассона ν в таблице 7.

Из данных таблицы 7 следует, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ является монотонно убывающей функцией от коэффициента Пуассона ν при фиксированном значении коэффициента напряжения β_y^2, а также, монотонно убывающей функцией от β_y^2 при фиксированном значении ν.

β_y^2	0	0.3	0.5	0.6	0.7	0.72
$V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$	295.420	227.320	181.029	156.386	130.327	124.636
	169.690	128.511	102.902	87.480	70.749	67.216
	143.916	110.280	85.591	72.310	58.134	55.180
	114.692	86.247	66.136	55.249	43.875	41.526
	79.937	58.238	42.789	39.011	26.282	24.640

Таблица 7

Из данных таблицы 7 следует, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ убывает в 3.02 – 9.11 раз с ростом ν, а с ростом β_y^2 – в 2.84 – 6.76 раза, в сравнении с приведённой критической скоростью локализованной дивергенции системы с ненагруженной панелью $\left(\beta_y^2 = 0\right)$ [15]. Это означает, что первоначальное напряжённое состояние достаточно широкой пластинки приводит к существенной дестабилизации возмущённого движения системы «пластинка–поток», в сравнении с возмущённым движением системы с первоначально ненагруженной достаточно широкой пластинкой.

Сопоставление данных таблиц 5 и 7 подтверждает истинность вывода о неустойчивости возмущённого движения системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.5), когда относительная толщина достаточно широких пластинок $2h^{-1}b \leq 0.004$. Более того, при дальнейшем увеличении скорости потока газа возмущённое движение – при скоростях $V \geq a_0\sqrt{2}$ так же является статически неустойчивым при всех допустимых значениях остальных параметров: имеет место локализованная дивергенция.

Таким образом, возмущённое движение системы «пластинка – поток» в случае достаточно широких пластин $(\gamma \geq 1.96)$ и полубесконечной пластины–полосы $(\gamma = \infty)$ теряет устойчивость только в виде локализованной дивергенции при скоростях потока газа $V \geq V_{loc.div.}$. Приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ является монотонно убывающей функцией от коэффициента напряжения β_y^2, характеризующего первоначальное напряжённое состояние пластинки: убывает примерно на порядок, в сравнении с ненагруженной панелью. Тем самым, первоначальное напряжённое состояние приводит к существенной дестабилизации возмущённого движения системы «достаточно широкая пластинка – поток».

В силу независимости функции $V_{loc.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 b^3\right)$ от параметра k_1, ясно, что коэффициенты χ_1 и δ_1, характеризующие сосредоточенные инерционные моменты I_c и массы m_c, соответственно, влияют всего лишь на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности свободного края пластинки $x = 0$.

Заметим, что дисперсионное уравнение (4.1) при $\beta_y^2 = 0$ тождественно дисперсионному уравнению, полученному в работе [15] при исследовании задачи устойчивости возмущённого движения системы (1.1) – (1.4) в случае достаточно широких пластинок с ненагруженными, первоначально, краями. А также, из сравнения граничных значений $\gamma = \gamma^* \approx 1.96$ при $\beta_y^2 = 0$ и $\beta_y^2 > 0$ следует, что в данной постановке задачи устойчивости влияние коэффициента напряжения β_y^2 на граничное значение γ^* неощутимо мало.

6 Основные результаты

В работе исследуется своеобразное влияние первоначального напряжённого состояния достаточно широкой прямоугольной пластинки ($\gamma \geq 1.96$) с свободным краем на устойчивость возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» при наличии на свободном крае пластинки сосредоточенных инерционных масс и моментов поворота.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости возмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» в предположении, что края прямоугольной пластинки, параллельные скорости потока газа, нагружены ещё до обтекания равномерно распределёнными сжимающими усилиями. Аналитическое решение найдено с помощью метода, подробно описанного в работе [15].

Получены явные выражения дисперсионных уравнений, характеризующих достаточные признаки потери устойчивости.

С помощью графоаналитических и численных методов анализа произведено разбиение многопараметрического пространства $\Im$ системы «пластинка–поток» на область устойчивости $\Im_0$ и области неустойчивости $\Im_i$, $i = 1, 2, 3$. Показано, что пространство «существенных» параметров системы состоит лишь только из двух областей: области устойчивости $\Im_0$ и области статической неустойчивости $\Im_1$, в которой имеет место локализованная дивергенция. При этом, в случае стальных пластинок относительной толщины $2h^{-1}b \leq 0.004$ пространство параметров состоит только из области $\Im_1$. Определены интервалы изменения «существенных» параметров системы, разграничивающие области устойчивости и неустойчивости. Исследована граница перехода из области устойчивости $\Im_0$ в область $\Im_1$, которая, очевидно, является «безопасной» [12].

Найдены критические скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$, в предположении, что в пластинке в момент «выпучивания» возникают только напряжения изгиба: при скоростях потока газа $V \geq V_{loc.div.}$ возмущённое движение системы теряет устойчивость.

Найдены критические значения коэффициента напряжения изгиба при обтекании $\left(\beta_y^2\right)^*_{loc.}$. Установлено, что критический коэффициент напряжения $\left(\beta_y^2\right)^*_{loc.}$

примерно в 1.37 – 1.54 раза меньше критического коэффициента напряжения при отсутствии обтекания $\left(\beta_y^2(\nu)\right)_{loc.}$ [17].

Показано, что критические скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$ являются монотонно убывающими функциями от коэффициента напряжения $\beta_y^2 \in \left[0,\ \left(\beta_y^2\right)_{loc.}^*\right)$: убывают примерно на порядок, в сравнении с ненагруженной панелью [15].

Таким образом, в случае достаточно широких пластин ($\gamma \geq 1.96$) и в случае полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$) первоначальное напряжённое состояние приводит к существенной дестабилизации возмущённого движения системы «пластинка – поток».

Заключение

Изложенный в данной работе графоаналитический метод исследования может быть применён для получения аналитического решения широкого класса задач устойчивости упругих систем, в частности, при комбинированном нагружении.

Литература

[1] Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с. Volmir A.S. The Stability of the elastic system. Moscow: Physmathgiz. 1963. 880 p.

[2] Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с. Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, 340 p. Izd. Fizmat lit. Moscow.

[3] Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 38–46. Ishlinskii A.Yu. About the same, limit transition in the theory of stability of elastic rectangular plates. // Reports of USSR Academy of Sciences. 1954. V. 95. No. 3. Pp. 38-46.

[4] Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // Изв. АН СССР. ПММ. 1957. Т.21. № 2. С. 231–243. Movchan A.A.(1956). About vibrations of a plate, moving in gas. Izv. Acad. Nauk USSR. PMM. V. 20. No. 2, pp. 211-222.

[5] Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука. 1972. 432 с. Volmir A.S. (1972). Nonlinear dynamics of plates and shells. Nauka. Moscow. 432p.

[6] Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асиптотические методы. – М.: Наука. Физматлит. 1995. 320 с. Tovstic P.E. Stability of the thin plate: Asymptotic metods // Moscow: Science. Physmathlit. 1995. 320 p.

[7] Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968. Strength. Stability.

Vibrations. Directory in 3 v. // Under the editorship of I. A. Birger and Ya. G. Panovko. – Moscow.: Mechanical Engineering. 1968.

[8] Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука. 2006. 247 с. Algazin, S.D., Kijko, I.A. (2006). Flutter of Plates and Shells. Nauka. Moscow. 247 p.

[9] Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. // Итоги науки и технологии Механика деформируемых твердых тел. – М.: Наука. 1978. Т.11. С. 67–122. Novichkov Yu. N. A flutter of plates and shells. Results of science and technology Mechanics of deformable solids. – Moscow: Science. 1978. V. 11. Pp. 67-122.

[10] Crowell A.R., McNamara J.J., Miller B.A. (2011). Hypersonic aerothermoelastic response prediction of skin panels using computational fluid dynamic surrogates. Journal of aeroelasticity and structural dynamics. V. 2. No. 2, p. 3-30.

[11] Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. № 5. С.33–44. Rzhanitsyn A.R. (1985). "A cantilever elastic beam loaded by a follower force", Izv. Acad. Nauk Arm. SSR, Mekhanika, 38, No. 5, pp. 33-44.

[12] Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с. Bautin N.N. The behavior of dynamical systems near the boundaries of the stability region. – M.: Science. 1984. 176 p.

[13] Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755. Il'yushin A.A.(1956). Law of Flat Sections at the Big Supersonic Velocity. PMM, v. 20(6), pp. 733-755.

[14] Ashley G H., Zartarian G. Piston theory - a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N12. P. 1109–1118.

[15] Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край. // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge. //Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2014. V. 67(2). P. 12–42.

[16] Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On a problem of supersonic panel flutter in the presence of concentrated inertial masses and moments // Изв. НАН Армении, Механика. 2016, т.69, № 3, с.41-59.

[17] Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции сжатой панели при набегании сверхзвукового потока газа на ее свободный край. // Изв. НАН Армении, Механика. 2017, т.70, № 4, с.12–34. M.V. Belubekyan, S.R. Martirosyan. On divergence of compressed panel in supersonic gas flow, an accumulating on its free edge// Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2017. V. 70(4). P.12–34.

[18] Коненков Ю.К. Об изгибной волне “релеевского” типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С. 124–126. Konenkov Yu.K. A Rayleigh–Type Flexural Wave // Soviet Physics. Akoustic Journal. 1960, v. 6, № 1, pp. 124–126.

[19] Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip, Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65(1). С. 29–34. (2012). The localized instability of the elastic plate–strip streamlined by a supersonic gas flow. Izv. NAS of Armenia, Mechanika, v. 65 (1), pp. 29-34.

[20] Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. Supersonic flutter of a compressed elongated plate in the presence of concetrated inertial masses and moments.// Изв. НАН Армении. Механика. 2020. Т.73, № 4, с. 58–74. Proceed. of NAS of Armenia. Mechanics. 2020. V. 73(4). P. 58–74.

[21] Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер панели с свободным краем, сжатой в направлении, перпендикулярном к скорости потока газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов. // Изв. НАН Армении, Механика. 2021. Т.74, №2. 33-59

Сведения об авторе

Мартиросян Стелла Размиковна - кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения.
Тел. (+374 10) 524890
Email: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 14.07.2021