

**ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ
СОСТАВНОГО ПРОСТРАНСТВА С КРУГОВОЙ
ДИСКООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ**

В.Н. Акопян, А.А. Амирджанян

Ключевые слова: осесимметричные смешанные задачи, межфазная трещина, межфазное включение, контактная задача

В работе построено точное решение задачи об осесимметричном напряженном состоянии составного упругого пространства, состоящего из двух разнородных полупространств, на плоскости стыка которых имеется круговая дискообразная трещина, на одном берегу которой заданы напряжения, а в другой берег вдавливается гладкий штамп (шайба). Выведена определяющая система уравнений задачи, которая при помощи операторов вращения сведена к системе сингулярных интегральных уравнений и построено её точное решение. Получены простые формулы как для определения нормальных контактных напряжений под штампом, так и для контактных напряжений на стыке разнородных полупространств.

Axisymmetric mixed boundary problem for a composite space with a circular disc-shaped crack

V.N. Hakobyan, H.A. Amirjanyan

Keywords: axisymmetric mixed problems, interfacial crack, interfacial inclusion, contact problem

An exact solution to the problem of the axisymmetric stress state of a composite elastic space consisting of two dissimilar half-spaces with a circular disc-shaped crack on interface plane is constructed in this work. On one side of the crack, known stresses are acting, and a smooth stamp is pressed on the other side. Defining system of equations for the problem is derived, which, using rotation operators, is reduced to solving a system of singular integral equations, and its exact solution is constructed. Simple formulas are obtained both for determining the normal contact stresses under the stamp and for the contact stresses at the junction plane of dissimilar half-spaces.

Keywords: axisymmetric mixed problems, interfacial crack, interfacial inclusion, contact problem

**Առանցքահամաչափ խառը եզրային խնդիր շրջանային սկավառակաձև ճաք
պարունակող բաղադրյալ փարածույթյան համար**

Վ.Ն.Հակոբյան, Վ.Ա.Ամիրջանյան

Նյութաբանք՝ առանցքահամաչափ խառը եզրային խնդիր, միջփազային ճաք, միջփազային ներդրակ, կոն-
պակրային խնդիր

Աշխատանքում կառուցված է երկու փարբեր կիսափարածույթյուններից կազմված բաղադրյալ փարածու-
թյան առանցքահամաչափ լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ նրանց միացման
հարթության մեջ կա շրջանային սկավառակաձև ճաք, որի ափերից մեկին փրված են լարումներ, իսկ մյուս

ափին սեղմվում է հարթ հիմքով ողորկ դրոշմ: Դուրս են բերված խնդրի որոշիչ հավասարումների համակարգը, որը պարզման օպերատորների օգնությամբ հանգեցված է սինգուլյար ինֆեզրալ հավասարումների համակարգի և կառուցված է նրա ճշգրիտ լուծումը: Սրացված են պարզ բանաձևեր ինչպես դրոշմի փակ գործող նորմալ լարումների, այնպես էլ փարատեռ կիսափարածությունների միացման հարթության մեջ գործող կոնփալկրային լարումների համար:

Введение

Одним из важных направлений контактных и смешанных задач теории упругости и механики разрушения является не только определение локальных полей напряжений, возникающих вокруг концентраторов напряжений различных типов, одновременно находящихся в деформируемых однородных или составных телах, моделирующих те или иные конструкции, но и выявление закономерностей взаимовлияния этих концентраторов и разработка методов для понижения градиентов этих полей, что приведет к повышению прочности и долговечности этих конструкций и их деталей.

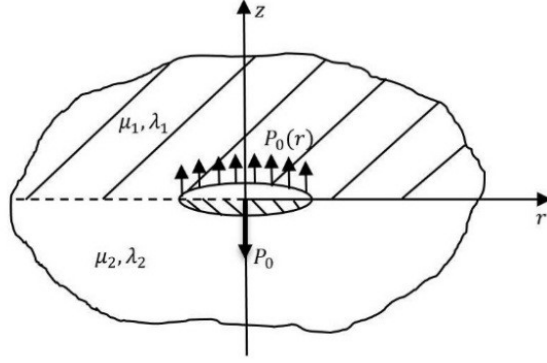
Многие результаты в этом направлении приведены в монографиях [1–6]. Работы в указанном направлении, в основном, посвящены изучению плоских и осесимметричных полей напряжений в однородных и кусочно-однородных массивных телах с концентраторами напряжений типа штампов, трещин и полностью или частично сцепленных с матрицей абсолютно жестких включений. В частности, укажем на работы [7–12], где построены точные решения ряда плоских и осесимметричных задач для кусочно-однородной плоскости и пространства с межфазными, частично оторванными от матрицы, включениями. Особо отметим работу [7], где построено замкнутое решение первой осесимметричной задачи для однородного пространства, содержащего круговую дискообразную трещину, на берегах которой заданы условия смешанного типа. Укажем также на работу [11], где построены разрывные решения уравнений осесимметричной теории упругости для кусочно-однородного пространства с круговой дискообразной трещиной.

Здесь же, на основе этих уравнений, рассматривается осесимметричное напряженное состояние кусочно-однородного пространства с межфазной круговой дискообразной трещиной, в один берег которой вдавливаются гладкий штамп (абсолютно жесткая шайба).

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть упругое составное пространство, состоящее из двух разнородных полупространств с коэффициентами Ляме λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2 , заполняющих в цилиндрической системе координат соответственно верхнее ($z \geq 0$) и нижнее ($z \leq 0$) полупространства, на плоскости стыка которых ($z = 0$) имеется монетообразная межфазная трещина с радиусом a , на нижний берег которой при помощи сосредоточенной силы P_0 вдавливаются гладкий штамп с плоским основанием, а

на верхний берег действует распределённая нагрузка интенсивности $p_0(r)$ с равнодействующей, равной P_0 . На Фиг. 1 приведено осевое сечение составного пространства.



Фиг. 1

Ставится задача определить контактные напряжения, действующие как на стыке полупространств, так и на нижнем берегу трещины, а также их коэффициенты интенсивности в концевых точках трещины.

Поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} u_1(r, 0) = u_2(r, 0); & w_1(r, 0) = w_2(r, 0); \\ \sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0); & \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) \end{cases} \quad (a < r < \infty), \quad (1.a)$$

$$\begin{cases} \sigma_z^{(1)}(r, 0) = -p_0(r); & \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = 0; \\ \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) = 0; & w_2(r, 0) = -\delta; \end{cases} \quad (0 < r < a). \quad (1.b)$$

Здесь $w_j(r, z)$ и $u_j(r, z)$ ($j = 1, 2$) - нормальные и радиальные компоненты перемещений соответственно для верхнего и нижнего полупространств в цилиндрической системе координат, удовлетворяющие каждая в своей области определения уравнениям Ляме, $\sigma_z^{(j)}(r, z)$ и $\tau_{rz}^{(j)}(r, z)$ нормальные и касательные компоненты напряжений, а δ - нормальное жесткое смещение штампа.

Чтобы построить решение граничной задачи (1) используем разрывные решения для составного пространства с круговой дискообразной трещиной, полученные в [6, 11].

Используя указанные решения и сохраняя все обозначения, удовлетворим условиям (1.b). В итоге, придем к следующей определяющей системе из трех интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} b_1 L_{0,1}^1 [u] + b_0 L_{0,0}^1 [w] + d_1 L_{0,0}^0 [\sigma] &= \Delta \delta; \\ b_2 L_{0,1}^2 [u] + b_3 L_{0,0}^2 [w] + b_0 L_{0,0}^1 [\sigma] &= -\Delta p_0(r); \quad (0 < r < a) \\ b_3 L_{1,1}^2 [u] + b_2 L_{1,0}^2 [w] + b_1 L_{1,0}^1 [\sigma] &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

которую нужно рассматривать при условиях равновесия штампа и непрерывности смещений на окружности $r = a$:

$$\int_0^a \sigma(r) r dr = 0; \quad u(a) = w(a) = 0 \quad (3)$$

где

$$w(r) = w_1(r, 0) - w_2(r, 0); \quad u_1(r, 0) - u_2(r, 0) = u(r); \quad (0 < r < a),$$

$$\sigma(r) = \sigma_z^{(1)}(r, 0) - \sigma_z^{(2)}(r, 0); \quad \tau(r) = \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) - \tau_{rz}^{(2)}(r, 0); \quad (0 < r < a)$$

$$L_{m,n}^k[\varphi] = \int_0^a W_{m,n}^k(r, \xi) \varphi(\xi) d\xi; \quad W_{m,n}^k(r, \xi) = \int_0^\infty t^k J_m(tr) J_n(t\xi) dt;$$

$$b_2 = 2 \left(\theta_1^{(1)} b_0 + \theta_2^{(1)} b_1 - \theta_1^{(1)} \Delta \right); \quad b_3 = 2 \left(\theta_1^{(1)} b_1 + \theta_2^{(1)} b_0 - \theta_2^{(1)} \Delta \right);$$

$$\theta_1^{(j)} = \frac{\mu_j^2}{\lambda_j + 3\mu_j}; \quad \theta_2^{(j)} = \frac{\mu_j(\lambda_j + 2\mu_j)}{\lambda_j + 3\mu_j} \quad (j = 1, 2),$$

$$d_0 = \frac{\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)}}{2}; \quad d_1 = \frac{\theta_2^{(2)} + \theta_2^{(1)}}{2}; \quad b_0 = \theta_2^{(1)} \left(\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)} \right) - \theta_1^{(1)} \left(\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)} \right);$$

$$b_1 = \theta_1^{(1)} \left(\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)} \right) - \theta_2^{(1)} \left(\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)} \right);$$

$$\Delta = \left[\left(\theta_2^{(2)} + \theta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\theta_1^{(2)} - \theta_1^{(1)} \right)^2 \right].$$

Чтобы решить систему интегральных уравнений (2), следуя работе [11], приведем ее к системе сингулярных интегральных уравнений. Для этого введем новые неизвестные функции по формулам

$$w_*(t) = \frac{2}{\pi} \int_t^a \frac{\xi w(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi; \quad \sigma_*(t) = \frac{2}{\pi} \int_t^a \frac{\xi \sigma(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi; \quad u_*(t) = \frac{2t}{\pi} \int_t^a \frac{u(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi \quad (4)$$

и продолжим функции $\sigma_*(t)$ и $w_*(t)$ на интервал $(-a, 0)$ четным образом, а функцию $u_*(t)$ - нечетным образом, т.е. пусть $w_*(-t) = w_*(t)$, $u_*(-t) = -u_*(t)$, $\sigma_*(-t) = \sigma_*(t)$. Далее, применяя к обеим сторонам первых двух уравнений оператор I , а последнего уравнения - оператор I_1 ,

$$I(\varphi(x)) = \int_0^x \frac{\varphi(r) r dr}{\sqrt{x^2 - r^2}}; \quad I_1(\varphi(x)) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \int_0^y \varphi(r) dr,$$

используя значение некоторых известных интегралов, приведенных в [11], дифференцируя первое уравнение по x , продолжая первое и последнее из полученных уравнений на интервал $(-a, 0)$ четным образом, а второе уравнение - нечетным образом, после некоторых выкладок, систему (2) представим в виде следующей

системы сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\pi d_1}{2} \sigma_*(x) + \frac{\pi b_1}{2} u'_*(x) - \frac{b_0}{2} \int_{-a}^a \frac{w'_*(t)}{t-x} dt &= \Delta \delta; \\ \frac{\pi b_3}{2} w'_*(x) + \frac{b_0}{2} \int_{-a}^a \frac{\sigma_*(t)}{t-x} dt + \frac{b_2}{2} \int_{-a}^a \frac{u'_*(t)}{t-x} dt &= \Delta f(x); \quad (-a < x < a) \quad (5) \\ \frac{\pi b_1}{2} \sigma_*(x) + \frac{\pi b_3}{2} u'_*(x) - \frac{b_2}{2} \int_{-a}^a \frac{w'_*(t)}{t-x} dt &= \Delta C_*. \end{aligned}$$

Условия (3), при этом, записываются следующим образом:

$$\int_{-a}^a u'_*(x) dx = 0; \quad \int_{-a}^a w'_*(x) dx = 0; \quad \int_{-a}^a \sigma_*(x) dx = 0. \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(x) &= I[p_0(r)]; \quad C_* = \frac{\pi b_1}{2\Delta} \sigma_*(0) + \frac{\pi b_3}{2\Delta} u'_*(0) + \frac{b_2}{2\Delta} \int_{-a}^a \frac{w'_*(t)}{t} dt; \\ \Delta &= \left[\left(\theta_2^{(2)} + \theta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\theta_1^{(2)} - \theta_1^{(1)} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Решение определяющей системы уравнений

Приступим к решению определяющей системы (5) при условиях (6). Для этого из первого и последнего уравнений (5) исключая функцию $w'_*(x)$, найдем

$$\sigma_*(x) = 2 \frac{\left(\vartheta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} \right)^2}{\vartheta_1^{(1)}} u'_*(x) - \frac{2(b_2 \delta - b_0 C_*)}{\vartheta_1^{(1)} \vartheta_2^{(2)} \pi}. \quad (7)$$

Интегрируя полученное соотношение на интервале $(-a, a)$ и учитывая условия (6), найдем:

$$b_2 \delta - b_0 C_* = 0. \quad (8)$$

Подставляя полученное выражение для $\sigma_*(x)$ в первое и во второе уравнения (5), для определения приведенных дислокаций смещений получим следующую

систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} u'_*(x) - \frac{\alpha_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{w'_*(t)}{t-x} dt = A\delta; \\ w'_*(x) - \frac{\beta_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'_*(t)}{t-x} dt = Bf(x), \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\vartheta_1^{(1)}}{\vartheta_2^{(1)}}; \quad \beta_1 = -\frac{\vartheta_1^{(1)}b_2 + 2b_0 \left(\left(\vartheta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} \right)^2 \right)}{\vartheta_1^{(1)}b_3}; \quad A = \frac{2\Delta\alpha_1}{\pi b_0}; \quad B = \frac{2\Delta}{\pi b_3}.$$

Сначала рассмотрим случай, когда $\beta_1 \neq 0$. Вводя новые неизвестные функции $\varphi_j(x) = u'_*(x) + \lambda_j w'_*(x)$ ($j = 1, 2$), систему уравнений (9) запишем в виде двух независимых сингулярных интегральных уравнений:

$$\varphi_j(x) + \frac{q_j}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi_j(s)}{s-x} ds = g_j(x) \quad (-a < x < a; j = 1, 2), \quad (10)$$

$$\lambda_j = (-1)^j \sqrt{\alpha_1/\beta_1} = (-1)^j \lambda; \quad q_j = (-1)^{j+1} \sqrt{\alpha_1\beta_1} = (-1)^{j+1} q;$$

$$g_j(x) = A\delta + \lambda_j Bf(x).$$

При этом условия (6) примут вид:

$$\int_{-a}^a \varphi_j(x) dx = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (11)$$

Сначала рассмотрим случай, когда q – действительное положительное число. В этом случае решения уравнений (10) будут следующие [6]:

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{1+q_j^2} \left[g_j(x) + \frac{q_j X_j^+(x)}{\pi} \int_{-a}^a \frac{g_j(s) ds}{X_j^+(s)(s-x)} \right] \quad (-a < x < a; j = 1, 2) \quad (12)$$

$$X_j(z) = \left(\frac{z+a}{z-a} \right)^{\gamma_j}; \quad X_j^+(x) = \sqrt{G_j} \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^{\gamma_j} = \sqrt{G_j} \omega_j(x);$$

$$\gamma_j = (-1)^{j+1} \gamma; \quad \gamma = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2q}{1-q^2} & (q < 1) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2q}{1-q^2} & (q > 1) \end{cases}; \quad G_j = \frac{1 - (-1)^{j+1} i q}{1 + (-1)^{j+1} i q}.$$

Отметим, что здесь, как и в [6], ввиду энергетических соображений в тех

концевых точках, где показатель особенности больше 1/2, взято ограниченное решение. Подставляя значения функции $g_j(x)$ в (12) и учитывая интегральное соотношение [14]:

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+s}{a-s} \right)^\gamma \frac{ds}{s-x} = \frac{\pi}{\sin \pi \gamma} \left[1 - \cos \pi \gamma \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^\gamma \right] \quad (|x| < a; |\operatorname{Re} \gamma| < 1).$$

Найдем

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{1+q_j^2} \left[\lambda_j B f(x) - \frac{\delta q_j \omega_j(x)}{\sin \pi \gamma_j} + \frac{\lambda_j q_j B \omega_j(x)}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(s) ds}{\omega_j(s)(s-x)} \right].$$

Удовлетворяя условиям (11), для жесткого смещения штампа получим следующее выражение

$$\delta = -\frac{\lambda_j B \sin \pi \gamma_j}{2\pi a \gamma_j A} \int_{-a}^a \frac{f(s) ds}{\omega_j(s)},$$

а для C_* будем иметь следующую формулу:

$$C_* = \frac{\lambda_j b_2 B \sin \pi \gamma_j}{2\pi a b_0 \gamma_j A} \int_{-a}^a \frac{f(s) ds}{\omega_j(s)}.$$

Далее, для компонентов дислокации смещений по формулам

$$w'_*(x) = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad u'_*(x) = \frac{\lambda_1 \varphi_2(x) - \lambda_2 \varphi_1(x)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

найдем:

$$w'_*(x) = \frac{B}{1+q^2} \left\{ f(x) + \frac{A\delta q [\omega(x) - \omega(-x)]}{2\lambda B \sin \pi \gamma} + \frac{q}{2\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{\omega(x)}{\omega(s)} - \frac{\omega(-x)}{\omega(-s)} \right] \frac{f(s) ds}{s-x} \right\}$$

$$u'_*(x) = -\frac{Aq}{2(1+q^2)} \left\{ \frac{\delta [\omega(x) + \omega(-x)]}{\sin \pi \gamma} + \frac{\lambda B}{A\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{\omega(x)}{\omega(s)} + \frac{\omega(-x)}{\omega(-s)} \right] \frac{f(s) ds}{s-x} \right\};$$

$$\left(\omega(x) = \omega_1(x) = \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^\gamma; \quad \omega_2(x) = \omega(-x) \right)$$

Следовательно из (7) для скачка приведенных нормальных напряжений получим:

$$\begin{aligned}\sigma_*(x) &= \frac{2 \left[\left(\vartheta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} \right)^2 \right]}{\vartheta_1^{(1)}} u'_*(x) = \\ &= - \frac{Aq \left[\left(\vartheta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} \right)^2 \right]}{\vartheta_1^{(1)} (1+q^2)} \left\{ \frac{\delta [\omega(x) + \omega(-x)]}{\sin \pi \gamma} + \frac{\lambda B}{A\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{\omega(x)}{\omega(s)} + \frac{\omega(-x)}{\omega(-s)} \right] \frac{f(s) ds}{s-x} \right\}.\end{aligned}$$

В частном случае, когда $p_0(r) = P_0/\pi a^2 = \text{const}$,

$$f(x) = \frac{P_0}{\pi a^2} \int_0^x \frac{r dr}{\sqrt{x^2 - r^2}} = - \frac{P_0}{\pi a^2} \sqrt{x^2 - r^2} \Big|_0^x = \frac{P_0}{\pi a^2} x.$$

Тогда, используя значения интеграла

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{\omega_j(x)} = \int_{-a}^a \left(\frac{a-x}{a+x} \right)^{\gamma_j} dx = \frac{2\pi a \gamma_j}{\sin \pi \gamma_j},$$

найдем

$$\int_{-a}^a \frac{f(s) ds}{\omega_j(s)} = - \frac{2P_0 \gamma_j^2}{\sin \pi \gamma_j}.$$

Следовательно, в указанном случае, для жесткого смещения штампа получим выражения

$$\delta = \frac{\lambda_j \gamma_j B P_0}{\pi a A} = - \frac{\lambda \gamma B P_0}{\pi a A}, \quad (13)$$

а постоянная C_* будет даваться формулой:

$$C_* = - \frac{\lambda_j \gamma_j b_2 B P_0}{\pi a b_0 A} = \frac{\lambda \gamma b_2 B P_0}{\pi a b_0 A}.$$

При этом из (12), учитывая значение интеграла [14]

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a \frac{f(s) ds}{\omega_j(s)(s-x)} &= \frac{P_0}{\pi a^2} \int_{-a}^a \frac{ds}{\omega_j(s)} + \frac{P_0}{\pi a^2} x \int_{-a}^a \frac{ds}{\omega_j(s)(s-x)} = \\ &= \frac{P_0}{a^2 \sin \pi \gamma_j} \left[2a \gamma_j - x + \frac{x \cos \pi \gamma_j}{\omega_j(x)} \right],\end{aligned}$$

для функций $\varphi_j(x)$ найдем выражение

$$\varphi_j(x) = \frac{q_j \omega_j(x)}{(1+q_j^2) \sin \pi \gamma_j} \left[A_*^{(j)} - x B_*^{(j)} \right], \quad (14)$$

где

$$A_*^{(j)} = -\frac{P_0 B \lambda \gamma}{\pi a}; \quad B_*^{(j)} = (-1)^j \frac{P_0 B \lambda}{\pi a^2}.$$

А приведенные компоненты скачков дислокации смещений и нормальных напряжений будут даваться формулами:

$$\begin{aligned} u'_*(x) &= -\frac{P_0 B}{2\pi a^2 \vartheta_2^{(1)} (1+q^2) \sin \pi \gamma} \{a\gamma [\omega(x) + \omega(-x)] + x [\omega(x) - \omega(-x)]\}; \\ w'_*(x) &= \frac{P_0 B q}{2\pi a^2 (1+q^2) \sin \pi \gamma} \{a\gamma [\omega(x) - \omega(-x)] - x [\omega(x) + \omega(-x)]\}, \\ \sigma_*(x) &= \frac{(\vartheta_2^{(1)})^2 - (\vartheta_1^{(1)})^2}{\vartheta_1^{(1)}} u'_*(x) = -\frac{P_0 B \left[(\vartheta_2^{(1)})^2 - (\vartheta_1^{(1)})^2 \right]}{2\pi \vartheta_2^{(1)} a^2 (1+q^2) \sin \pi \gamma} \times \\ &\quad \times \{a\gamma [\omega(x) + \omega(-x)] + x [\omega(x) - \omega(-x)]\}. \end{aligned}$$

Скачок истинных нормальных напряжений, действующих на берега трещины, определится по формуле обращения:

$$\sigma(r) = \sigma_z^{(1)}(r, 0) - \sigma_z^{(2)}(r, 0) = P(r) - p_0(r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{s \sigma_*(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds,$$

где $P(r) = -\sigma_z^{(2)}(r, 0)$ контактное давление под штампом. Следовательно, контактное давление на нижний берег трещины определится формулой:

$$\begin{aligned} P(r) = p_0(r) - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{s \sigma_*(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds &= \frac{P_0}{\pi a^2} + \frac{P_0 B \left[(\vartheta_2^{(1)})^2 - (\vartheta_1^{(1)})^2 \right]}{2\pi \vartheta_2^{(1)} a^2 (1+q^2) \sin \pi \gamma} \times \\ &\quad \times \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{s \{a\gamma [\omega(s) + \omega(-s)] + s [\omega(s) - \omega(-s)]\}}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Для определения контактных напряжений на плоскости стыка разнородных полу-пространств вне области дискообразной трещины используем формулы, полученные в [6], в случае $\tau_*(t) = 0$. Тогда, учитывая полученные формулы для $u'_*(x)$, $w'_*(x)$ и $\sigma_*(x)$, после некоторых несложных выкладок, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)}(r, 0) &= -\frac{b_3}{\Delta r} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{t w'_*(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \\ &= -\frac{b_3 P_0 B}{2\pi a^2 (1+q^2) \sin \pi \gamma \Delta r} \frac{d}{dr} \int_{-a}^a \frac{t (a\gamma + t) \omega(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \quad (r > a), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz}^{(1)}(r, 0) &= -\frac{b_1}{\Delta} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{\sigma_*(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} - \frac{b_3}{\Delta} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{u'_*(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \\
&= \frac{\vartheta_2^{(1)} b_2 P_0 \lambda}{2\vartheta_1^{(1)} \pi^2 a^2 b_3 (1 + q^2) \sin \pi \gamma} \frac{d}{dr} \int_{-a}^a \frac{[a\gamma - t] \omega(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \quad (r > a).
\end{aligned} \tag{17}$$

Теперь, при помощи формул (16) и (17) определим коэффициенты разрушающих напряжений на окружности $r = a$. Для этого, используя значение интеграла [14]

$$\int_{-a}^a \left(\frac{a+t}{a-t} \right)^{\alpha-1} \frac{dt}{t-r} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \left[\left| \frac{r+a}{r-a} \right|^{\alpha-1} - 1 \right] \quad (|r| > a),$$

эти формулы представим в видах:

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(j)}(r, 0) &= \frac{aP_0}{\pi q^2 r} \left\{ \frac{2\gamma^2 + \gamma - 1}{(r-a)^{1/2+\gamma}(r+a)^{3/2-\gamma}} + \frac{\gamma+1}{(r-a)^{1/2}(r+a)^{3/2}} \right\} + \\
&+ \Phi_1(r) \quad (|r| > a),
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz}^{(j)}(r, 0) &= \frac{\lambda(\gamma+1)\vartheta_2^{(1)} B_2 P_0}{\pi \vartheta_1^{(1)} q^2 b_3} \left\{ \frac{1}{(r-a)^{1/2+\gamma}(r+a)^{3/2-\gamma}} + \right. \\
&\left. + \frac{\gamma+1}{(r-a)^{1/2}(r+a)^{3/2}} \right\} + \Phi_2(r) \quad (|r| > a).
\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Phi_1(r) &= -\frac{P_0}{\pi^2 r (1 + q^2) \sin \pi \gamma} \frac{d}{dr} \int_{-a}^a \frac{[\psi_\sigma(t, r) - \psi_\sigma(a, r)] \omega(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}; \\
\Phi_2(r) &= \frac{\vartheta_2^{(1)} b_2 P_0 \lambda}{\vartheta_1^{(1)} \pi^2 a^2 b_3 (1 + q^2) \sin \pi \gamma} \frac{d}{dr} \int_{-a}^a \frac{[\psi_\tau(t, r) - \psi_\tau(a, r)] \omega(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}};
\end{aligned}$$

$$\psi_\sigma(t, r) = t(a\gamma + t) \sqrt{\frac{r-t}{r+t}}; \quad \psi_\tau(t, r) = (a\gamma - t) \sqrt{\frac{r-t}{r+t}}.$$

Используя представления (18) и (19), для коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений на окружности $r = a$ получим следующие формулы :

$$K_I(a) = \frac{\sqrt{2}(2\gamma^2 + \gamma - 1) P_0}{\sqrt{\pi} q^2 (2a)^{3/2-\gamma}}; \quad K_{II}(a) = \frac{\sqrt{2} \vartheta_2^{(1)} (\gamma+1) b_2 \lambda P_0}{\sqrt{\pi} q^2 \vartheta_1^{(1)} b_3 (2a)^{3/2-\gamma}}.$$

Отметим, что в случае, когда q — чисто мнимое число, $q = iq^*$, то несложно доказать, что G_j ($j = 1, 2$) — действительные положительные числа и, следовательно

но, точки $\pm a$ являются концами автоматической ограниченности. В этом случае решения рассмотренной задачи будут даваться формулами (14), если в этих формулах заменить γ на $i\beta$ ($2\pi\beta = \ln(1+q^*) - \ln(1-q^*)$). При этом как контактные напряжения, так и разрушающие напряжения на окружности $r = a$ будут иметь корневую особенность с осцилляцией.

В конце, рассмотрим случай $q = 0$, который возможен лишь в случае, когда $\beta_1 = 0$. В этом случае из системы (9) и условий (6) получим

$$w'_*(x) = Bf(x); \quad u'_*(x) = A\delta + \frac{\alpha_1 B}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t-x} dt; \quad \delta = \frac{\alpha_1 B}{2\pi a A} \int_{-a}^a \ln\left(\frac{a-t}{a+t}\right) f(t) dt.$$

Далее, по формуле (7), нетрудно получить формулу для определения функции $\sigma_*(x)$, а затем и для истинных контактных напряжений, действующих как под штампом, так и вне трещины. Приведем указанные формулы в выше рассмотренном частном случае, когда $f(x) = P_0 x / \pi a^2$. В этом случае из (20) будем иметь:

$$w'_*(x) = \frac{BP_0}{\pi a^2} x; \quad u'_*(x) = \frac{2\Delta\alpha_1 P_0}{\pi^3 a^2 b_3} \left[a - x \ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right) \right]; \quad \delta = -\frac{3\vartheta_1^{(1)} b_0 P_0}{\pi^2 a \vartheta_2^{(1)} b_3};$$

$$\sigma_*(x) = \frac{4 \left[\left(\vartheta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} \right)^2 \right] \Delta P_0}{\pi^3 a^2 \vartheta_2^{(1)} b_3} \left[a - x \ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right) \right].$$

Тогда

$$\sigma(r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{s \sigma_*(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = A_0 \left\{ \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\int_r^a \sqrt{s^2 - r^2} \ln\left(\frac{a-s}{a+s}\right) ds - r^2 \int_r^a \frac{\ln\left(\frac{a-s}{a+s}\right)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds \right] \right\},$$

и, следовательно, для контактного давления под штампом будем иметь:

$$p(r) = p_0(r) + \frac{a A_0}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \frac{A_0}{r} \frac{d}{dr} \left[\int_r^a \sqrt{s^2 - r^2} \ln\left(\frac{a-s}{a+s}\right) ds - r^2 \int_r^a \frac{\ln\left(\frac{a-s}{a+s}\right)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds \right].$$

Здесь

$$A_0 = \frac{4 \left[\left(\vartheta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} \right)^2 \right] \Delta P_0}{\pi^3 a^2 \vartheta_2^{(1)} b_3}.$$

При этом раскрытие трещины, в указанном случае, определится формулой:

$$w(r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{sw_*(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} = -\frac{BP_0}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Для контактных напряжений, действующих вне трещины на стыке разнородных полупространств, получим выражения:

$$\sigma_z^{(j)}(r, 0) = -\frac{b_3}{\Delta r} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{tw'_*(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = -\frac{b_3 P_0 B}{\pi a^2 \Delta r} \left[\frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} - \arcsin\left(\frac{r}{a}\right) \right];$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) &= -\frac{b_1}{\Delta} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{\sigma_*(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} - \frac{b_3}{\Delta} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{u'_*(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \\ &= \frac{E_0}{r\sqrt{r^2 - a^2}} \left[1 + \frac{2r^2}{a^2} \ln\left(\frac{r^2}{r^2 - a^2}\right) \right], \end{aligned}$$

где

$$E_0 = \frac{2P_0 \left[\vartheta_1^{(1)} b_3 + 2 \left(\left(\vartheta_2^{(1)} \right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)} \right)^2 \right) b_1 \right]}{\vartheta_2^{(1)} \pi^3 b_3}.$$

Отметим, что при выводе этих формул было использовано значение интеграла:

$$\int_0^a \frac{\ln\left(\frac{a-s}{a+s}\right)}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds = -2a \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right) + \sqrt{r^2 - a^2} \ln\left(\frac{r^2}{r^2 - a^2}\right).$$

Из полученных формул явствует, что нормальные напряжения на окружности $r = a$ имеют обычную корневую особенность, а касательные напряжения, помимо корневой, имеют также логарифмическую особенность.

Некоторые численные результаты

Известно, что использование операторов вращения при решении осесимметричных контактных и смешанных задач облегчает решение этих задач и часто для приведенных искомым функций получаются замкнутые решения в квадратурах. Однако, также известно, что даже при численном обращении операторов вращения часто можно столкнуться с непреодолимыми трудностями вычислительного характера. Ниже приводится алгоритм, при помощи которого можно получить численное обращение операторов вращения даже в случаях, когда приведённые искомые функции имеют показательную особенность с осцилляцией.

Рассмотрим интегралы вида

$$G_{n,\alpha,\beta}(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^1 \frac{s^n \omega_{\alpha,\beta}(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}},$$

где $\omega_{\alpha,\beta}(s) = (1-s)^\alpha (1+s)^\beta$. Используя соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \int_r^1 \frac{g(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds &= \frac{d}{dr} \int_r^1 \left(\frac{g(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} - \frac{g(r)}{\sqrt{s^2 - r^2}} \right) ds + \frac{d}{dr} \left(g(r) \int_r^1 \frac{1}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds \right) = \\ &= \int_r^1 \left(\frac{r(g(s) - g(r))}{\sqrt{s^2 - r^2}^3} - \frac{g'(r)}{\sqrt{s^2 - r^2}} \right) ds + \frac{d}{dr} \left(g(r) \operatorname{arctanh} \sqrt{1 - r^2} \right) = \\ &= r \int_r^1 \frac{g(s) - g(r)}{\sqrt{s^2 - r^2}^3} ds - \frac{g(r)}{r\sqrt{1 - r^2}}, \end{aligned}$$

$G_{n,\alpha,\beta}(r)$ можно представить в виде

$$G_{n,\alpha,\beta}(r) = \int_r^1 \frac{s^n \omega_{\alpha,\beta}(s) - r^n \omega_{\alpha,\beta}(r)}{\sqrt{s^2 - r^2}^3} ds - r^{n-2} \omega_{\alpha-0.5,\beta-0.5}(r).$$

Чтобы выявить поведение $G_{n,\alpha,\beta}(r)$ при r , близких к нулю, рассмотрим интеграл

$$Q(r) = \int_r^b \frac{q(s) - q(r)}{\sqrt{s^2 - r^2}^3} ds; \quad \text{где} \quad q(s) = \sum_{i=0}^{2k} a_i s^i.$$

Подставляя представление $q(s)$ в $Q(r)$, меняя порядок интегрирования и суммирования, вычисляя интегралы в слагаемых и, далее, разлагая полученное для $Q(r)$ выражение в ряд, найдем, что сингулярная часть интеграла не зависит от верхнего предела интегрирования и имеет вид

$$H_{n,k,\alpha,\beta}(r) = \frac{a_1}{r} - \ln r \sum_{i=1}^k \frac{2\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n)} a_{2i} r^{2i}.$$

Если вместо a_i взять коэффициенты разложения функции $s^n \omega_{\alpha,\beta}(s)$ в ряд при $s=0$: $a_i = \frac{\omega_{\alpha,\beta}^{(i-n)}(0)}{(i-n)!}$, $i > n$; то $H_{n,k,\alpha,\beta}(r)$ будет совпадать с плохо интерполируемой частью $G_{n,\alpha,\beta}(r)$.

Численные расчёты показывают, что комбинация

$$f_n(\alpha, \beta, r) = \frac{G_{n,\alpha,\beta}(r)}{\omega_{\alpha-0.5,\beta-0.5}(r)} - H_{n,2,\alpha,\beta}(r) + r^{n-2}$$

гладкая функция от r , α и β , хорошо интерполируемая при помощи полиномов.

Таким образом если заменить $f_n(\alpha, \beta, r)$ интерполяционным полиномом $f_n^{(m)}(\alpha, \beta, r)$, то можно получить простую аналитическую формулу для $G_{n,\alpha,\beta}(r)$, которое требует численного интегрирования только в малом количестве точек

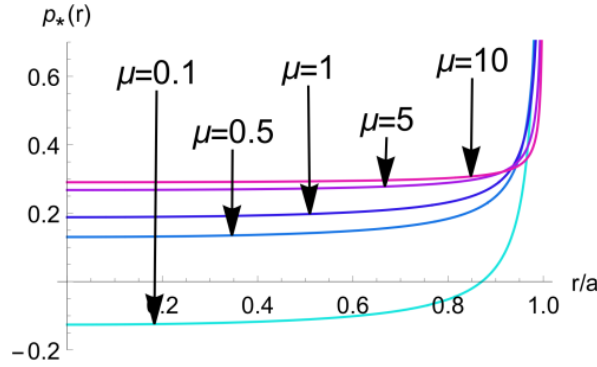
$$G_n^{(m)}{}_{\alpha,\beta}(r) = \left(f_n^{(m)}(\alpha, \beta, r) + \frac{G_{n,0,0}(r)}{\omega_{-0.5,-0.5}(r)} \right) \omega_{\alpha-0.5,\beta-0.5}(r).$$

Используя интерполяционный полином для $\sigma_*(s)$, легко получить выражение для $\sigma(r)$ через $G_n^{(m)}{}_{\alpha,\beta}(r)$

$$\sigma_*(s) = \omega_{\alpha,-\alpha}(s) \sum_{i=0}^n a_i s^i; \quad \sigma(r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^1 \frac{s \sigma_*(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} = -\sum_{i=0}^n a_i G_{i+1,\alpha,-\alpha}^{(m)}(r).$$

В численном примере приведённом ниже, уже при десяти точках на всём интервале $0 < r < 1$, значения, полученные с помощью интерполяции, совпадают со значениями, полученными численным интегрированием, с точностью до 10^{-8} .

Используя указанный алгоритм было построено численное обращение оператора вращения для контактного давления в случае, когда q действительное число. На Фиг.2 приведены графики приведённого контактного давления $p_*(r) = a^2 p(r)/P_0$ в зависимости от соотношения $\mu = \mu_2/\mu_1$ в случае, когда $\nu_1 = 0.3$ и $\nu_2 = 0.2$. Из них видно, что при возрастании параметра μ , что можно трактовать как возрастание μ_2 при постоянной μ_1 , контактное давление в средней части контактной зоны увеличивается, стремясь к определённому пределу, соответствующему случаю, когда второе полупространство абсолютно жёсткое.



Фиг. 2

При этом в случае, когда первое полупространство жестче, чем второе, больше чем в пять раз, в центральной части контактной зоны контактное давление становится отрицательным, т.е. в этой области штамп может оторваться от матрицы и, следовательно, нужно рассматривать задачу в новой постановке.

Заключение

Таким образом, построено точное решение поставленной задачи в квадратах и получены простые формулы для определения нормального контактного давления и контактных напряжений, действующих вне трещины на стыке разнородных полупространств. Показано, что нормальные контактные напряжения на окружности, ограничивающей трещину имеют корневую особенность, а касательные напряжения, помимо этого, имеют также и логарифмическую особенность.

Разработан также алгоритм для численного обращения операторов вращения, который успешно применен для вычисления истинного контактного давления.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта №21Т-2С209.

Литература

- [1] Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости, М. Наука, 1980г.,304с.,
- [2] Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.- М.: Наука, 1982.- 344с.,
- [3] Панасюк В.В. Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.- Киев: Наукова думка, 1976.- 443с.
- [4] Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.708с.
- [5] Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стацук Н.Г. Взаимодействие жестких ли-нейных включений и трещин в деформируемом теле.-К: Наукова думка, 1983-288с.
- [6] Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2014. 322с.
- [7] Попов Г.Я. О концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения.- В сб.: "Современные проблемы механики и авиации посвященном И.Ф. Образцову. 1980, с. 156-162.
- [8] Акопян В. Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, №4, с.57-65.
- [9] Акопян В.Н. Напряжения возле абсолютно жёсткого монетообразного включения в кусочно-однородном пространстве // В сб. трудов межд. конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посв. 95-летию со дня рожд. Акад. Н.Х.Арутюняна, Ереван-2007, с.45-51.

- [10] Ильина И.И., Сильвестров В.В. Задача о тонком жёстком включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. // Изв. РАН. МТТ. 2005. №3. С.153-166.
- [11] Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Осесимметричная смешанная задача для составного пространства с монетообразной трещиной // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. №3. С. 31-46.
- [12] Hakobyan V., Dashtoyan L. On a stress state of orthotropic plane with absolutely rigid inclusion // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 2016,69 (2). pp. 23-31. Doi- <http://doi.org/10.33018/69.2.2>
- [13] Mkhitarayan S.M. On the stress-strain state of an elastic infinite plate with a crack expanding by means of smooth thin inclusion indentation// Proceedings of NAS RA, Mechanics. 2019,72(4). pp. 38-64. Doi- <http://doi.org/10.33018/72.4.4>
- [14] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 738с.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм - доктор физ.- мат. наук, проф., главный научный сотрудник Института механики НАН РА
Тел.: (+37491) 350 – 222, email: vhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн - кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН РА
Тел.: (+37477) 92-06-39, email: amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 22.09.2021